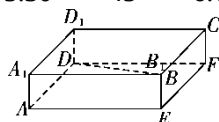


高二数学精炼题集参考答案

第一部分 立体几何

第1讲

1. B 2.D 3.A 4.平行或相交 5. 30° 45° 6.③④



7. 解析: (1)将平面 BF 折起后, 补成长方体 $AEFD-A_1BCD_1$, 则 BD 恰好是长方体的一条对角线.

因为 AE 、 EF 、 EB 两两垂直,

所以 BD 恰好是以 AE 、 EF 、 EB 为长、宽、高的长方体的对角线.

所以 $BD = \sqrt{AE^2 + EF^2 + EB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

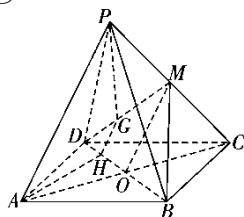
(2)证明: 因为 $AD \parallel EF$, $EF \parallel BC$, 所以 $AD \parallel BC$.

所以点 A 、 C 、 B 、 D 在同一平面内, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

所以 AC 、 BD 交于一点且被该点平分.

第2讲

1. C 2.C 3.B 4.B 5.④ 6.④



7. 证明: 如图所示, 连接 AC .

设 AC 交 BD 于 O , 连接 MO .

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 O 是 AC 的中点.

又因为 M 是 PC 的中点, 所以 $MO \parallel PA$.

又因为 $MO \subset$ 平面 BDM , $PA \not\subset$ 平面 BDM ,

所以 $PA \parallel$ 平面 BDM ,

平面 $BDM \cap$ 平面 $APG = GH$,

所以 $AP \parallel GH$.

第3讲

1. A 2.C 3.B 4.B 5.垂直 6.①③④ $\Rightarrow$ ②或②③④ $\Rightarrow$ ①

7. 证明: (1)因为 N 为 PC 的中点, 所以 $ON \parallel PA$.

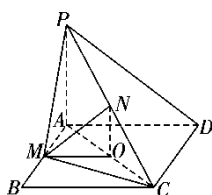
而 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $ON \perp$ 平面 $ABCD$. 所以 $ON \perp AB$.

又四边形 $ABCD$ 为矩形, M 为 AB 的中点,

所以 $OM \perp AB$, 所以 $AB \perp$ 平面 OMN , 所以 $AB \perp MN$.

(2) $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, 则 $PD \perp DC$.

故 $\angle PDA$ 为平面 PDC 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的平面角, 即 $\angle PDA = 45^\circ$, 所以 $PA = AD = BC$.

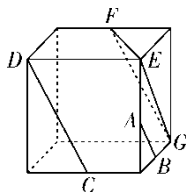


连接 MC ，由 $\text{Rt}\triangle BCM \cong \text{Rt}\triangle APM$ 知， $MC=MP$ ，所以 $MN \perp PC$ 。
 因为 $AB \perp MN$ ，所以 $MN \perp CD$ ，所以 $MN \perp$ 平面 PCD ，
 所以平面 $MNO \perp$ 平面 PCD 。

第 4 讲

巩固练习

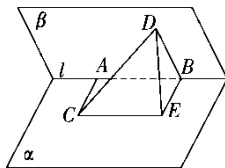
1. C 2. C 3. A



4. C 解析：把展开图复原为正方体后示意图如右图所示， $\angle EGF$ 为 AB 和 CD 所成的角， F 为正方体一棱的中点。设棱长为 1，

$$\text{则 } EF=GF=\frac{\sqrt{5}}{2}, EG=\sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } \cos \angle EGF = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$



5. 2 解析：过 B 作 $BE \perp AC$ ，连接 CE 、 DE 。

则 $\angle DBE$ 即为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角。

易证 $CE \perp DE$ ，

$$\text{所以 } CD = \sqrt{CE^2 + DE^2}$$

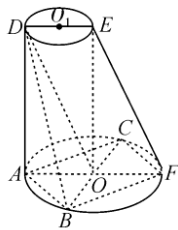
$$= \sqrt{AB^2 + BE^2 + BD^2 - 2BE \cdot BD \cos \angle DBE}$$

$$= \sqrt{1+1+1-2 \times 1 \times 1 \cos 120^\circ}$$

$$= 2.$$

$$6. \frac{1}{4}$$

解析：根据这两个视图可以推知折起后二面角 $C-BD-A$ 为直二面角，其侧视图是一个两直角边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的直角三角形，其面积为 $\frac{1}{4}$ 。



7. 解析: (1) 因为 AD 与两圆所在的平面均垂直,
所以 $AD \perp AB$, $AD \perp AF$, 故 $\angle BAF$ 是二面角 $B-AD-F$ 的平面角.
依题意可知, 四边形 $ABFC$ 是正方形, 所以 $\angle BAF = 45^\circ$,
即二面角 $B-AD-F$ 的大小为 45° .

(2) 连接 OD , 则 $OD \parallel EF$,

所以 $\angle ODB$ 为异面直线 BD 与 EF 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = 10$, $OA = OB = 3\sqrt{2}$.

因为四边形 $ABFC$ 是正方形, 所以 $DB \perp AF$.

又 $AD \perp$ 平面 $ABFC$,

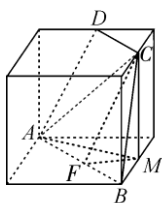
所以 $OB \perp$ 平面 DAO ,

所以 $OB \perp OD$,

$$\text{故 } \cos \angle ODB = \frac{DO}{BD} = \frac{\sqrt{8^2 + (3\sqrt{2})^2}}{10} = \frac{\sqrt{82}}{10}.$$

第 5 讲

1. C 2. D 3. D 4. B 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6. ①②③④



7. 解析: 设点 M 到截面 $ABCD$ 的距离为 h .
连接 AC 、 AM , 作 $CF \perp AB$, 垂足为 F , 连接 CM .

$$V_{C-ABM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot CM$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{12}.$$

$$\text{又 } V_{M-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \times h = \frac{h}{4},$$

$$\text{故由 } V_{C-ABM} = V_{M-ABC}, \text{ 得 } \frac{h}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } h = \frac{1}{3}.$$

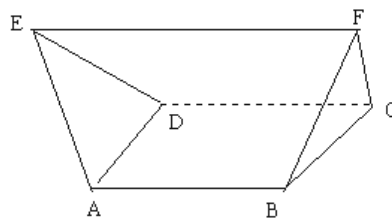
第六讲 简单多面体和旋转体

例 1. (1) 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱 SA, SB, SC 两两垂直, 体积为 V , A', B', C' 分别是 SA, SB, SC 上的点, 且 $SA' = \frac{1}{2}SA, SB' = \frac{1}{3}SB, SC' = \frac{1}{4}SC$, 则三棱锥 $S-A'B'C'$ 的体积为 ()

- (A) $\frac{1}{9}V$ (B) $\frac{1}{12}V$ (C) $\frac{1}{24}V$ (D) $\frac{1}{72}V$

(2) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE, \triangle BCF$ 均为正三角形, $EF \parallel AB, EF = 2$, 则该多面体的体积为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

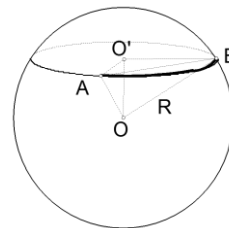


解: (1) 选 C; (2) 选 A.

说明: 对于第 (1) 小题, 注意转化三棱锥的顶点灵活使用体积计算公式; 对于 (2) 则需要利用图形的割补思想求解。

例 2. 在北纬 45° 圈上有 A, B 两点, 设该纬度圈上 A, B 两点的劣

弧长为 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$ (R 为地球半径), 求 A, B 两点间的球面距离。



解: 设北纬 45° 圈的半径为 r , 则 $r = \frac{\sqrt{2}}{4}R$, 设 O' 为北纬 45°

圆心, $\angle AOB' = \alpha$, 则 $\alpha r = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$, $\frac{\sqrt{2}}{2}R\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$,

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, 所以 $AB = \sqrt{2}r = R$, 在 $\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$,

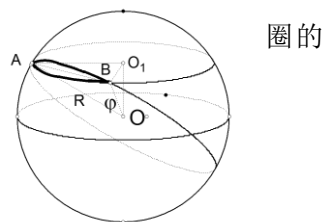
所以, A, B 两点的球面距离等于 $\frac{\pi}{3}R$ 。

说明: 要求两点的球面距离, 应先由已知条件求出两点的直线距离, 再求出这两点的球心角, 进一步求出这两点的球面距离。

例 3. 图 1 是某储蓄罐的平面展开图, 其中 $\angle GCL = \angle EDC = \angle F = 90^\circ$, 且 $AD = CD = DE = CG$, $FG = FE$. 若将五边形 $CDEFG$ 看成底面, AD 为高, 则该储蓄罐是一个直五棱柱。

(1) 图 2 为面 $ABCD$ 的直观图, 请以此为底面将该储蓄罐的直观图画完整;

(2) 已知该储蓄罐的容积为 $V = 1250\text{cm}^3$, 求制作该储蓄罐所需材料的总面积 S (精确到整



数位，材料厚度、接缝及投币口的面积忽略不计）。

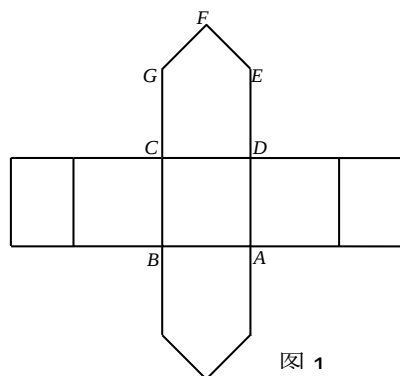


图 1

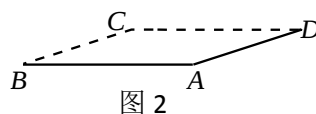


图 2

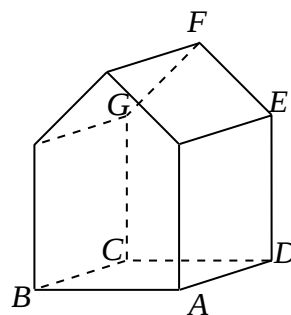
解：(1) 该储蓄罐的直观图如右图所示；

(2) 若设 $AD = a$ ，则五边形 $CDEFG$ 的面积为 $\frac{5}{4}a^2$ ，

得容积 $V = \frac{5}{4}a^3 = 1250$ ，解得 $a = 10$ ，

其展开图的面积 $S = 5a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{2}a^2 = 50(11 + 2\sqrt{2}) \approx 691$ ，

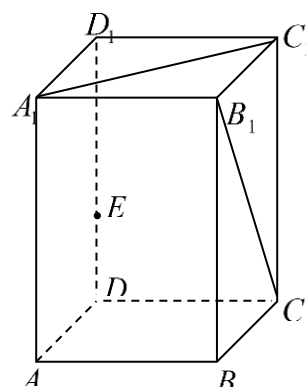
因此制作该储蓄罐所需材料的总面积约为 691 cm^2 。



例 4. 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 4$ ， $AA_1 = 8$ 。

(1) 求异面直线 B_1C 与 A_1C_1 所成角的大小；（用反三角函数形式表示）

(2) 若 E 是线段 DD_1 上（不包含线段的两端点）的一个动点，请提出一个与三棱锥体积有关的数学问题（注：三棱锥需以点 E 和已知正四棱柱八个顶点中的三个为顶点构成）；并解答所提出的问题。



解：(1) 如图，连接 AC 、 AB_1 ，由 $AA_1 \parallel CC_1$ ，

知 A_1ACC_1 是平行四边形，则 $A_1C_1 \parallel AC$ ，

所以 $\angle B_1CA$ 为异面直线 B_1C 与 A_1C_1 所成角。

在 $\triangle B_1CA$ 中， $AC = 4\sqrt{2}$ ， $AB_1 = B_1C = 4\sqrt{5}$ ，

$$\text{则 } \cos \angle ACB_1 = \frac{AC^2 + B_1C^2 - AB_1^2}{2AC \cdot B_1C} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

所以 $\angle ACB_1 = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ 。(也可用向量求解)

(2) 第一种:

提出问题: 证明三棱锥 $E-B_1BC$ 的体积为定值。

问题解答: 如图, 因为 $DD_1 \parallel$ 平面 B_1BCC_1 , 所以 D_1D

上任意一点到平面 B_1BCC_1 的距离相等, 因此三棱锥

$E-B_1BC$ 与三棱锥 $D-B_1BC$ 同底等高, $V_{E-B_1BC} = V_{D-B_1BC}$ 。

$$\text{而 } V_{D-B_1BC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle B_1BC} \cdot DC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times 4 = \frac{64}{3},$$

所以三棱锥 $E-B_1BC$ 的体积为定值 $\frac{64}{3}$ 。

说明: 若在侧面 B_1BCC_1 上任取三个顶点, 与点 E 构成

三棱锥时, 结论类似。

第二种:

提出问题: 三棱锥 $E-ADC$ 的体积在 E 点从点 D 运动到 D_1 过程中单调递增。

问题解答: 因为 $V_{E-ADC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ADC} \cdot DE$, 知 $S_{\triangle ADC}$ 为定值,

则三棱锥 $E-ADC$ 的体积与 DE 成正比, 可知 V_{E-ADC}

随着 DE 增大而增大, 又因为 $DE \in (0, 8)$,

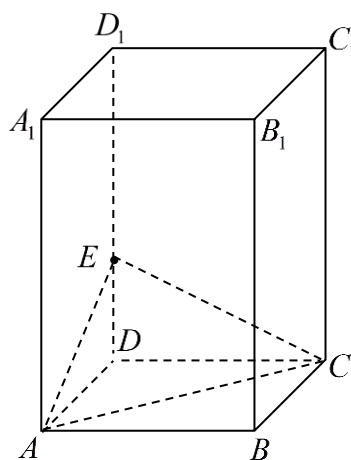
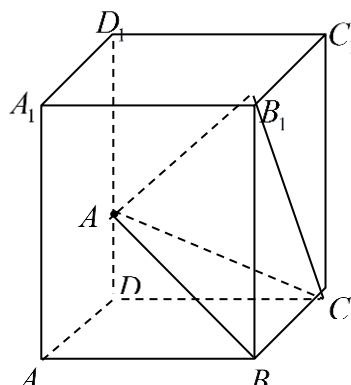
即三棱锥 $E-ADC$ 的体积在 E 点从点 D 运动到 D_1 过程中单调递增。

说明: (1) 若提出的问题是求三棱锥 $E-ADC$ 的体积范围, 也可。

解答: 因为 $S_{\triangle ADC} = 8$, 而 $V_{E-ADC} = \frac{8}{3} DE$, $DE \in (0, 8)$, 则 $V_{E-ADC} \in (0, \frac{64}{3})$ 。

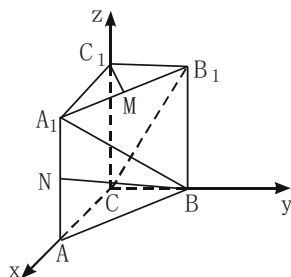
(2) 若在底面 $ABCD$ 上任取三个顶点, 与点 E 构成三棱锥时, 结论类似; 若在底面 $A_1B_1C_1D_1$

上任取三个顶点, 与点 E 构成三棱锥时, 结论类似 (单调递减)。



第七讲 空间向量

- 1 【解法】: $\because AC \perp BC, CC_1 \perp \text{面 } ABC$,
 $\therefore$ 可以建立如图所示的坐标系



(1) 依题意得 $B(0, 1, 0), N(1, 0, 1)$,

$$\therefore |\overrightarrow{BN}| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}.$$

(2) $A_1(1, 0, 2), B(0, 1, 0), C(0, 0, 0), B_1(0, 1, 2)$,

$$\therefore \overrightarrow{BA_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{CB_1} = (0, 1, 2), \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 3, |\overrightarrow{BA_1}| = \sqrt{6}, |\overrightarrow{CB_1}| = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}| |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

所以, 异面直线 BA 与 CB_1 的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$

(3) 证明: $C_1(0, 0, 2), M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$,

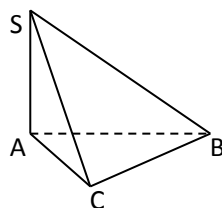
$$\overrightarrow{A_1B} = (-1, 1, -2), \overrightarrow{C_1M} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \therefore \overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{C_1M} = 0, \therefore A_1B \perp C_1M.$$

【点评】底面有直角的直棱柱适合建立坐标系的条件, 可以用两点间的距离公式, 数量积的夹角公式, 用坐标法求点点距、向量夹角。特别注意异面直线角的范围 $(0, \frac{\pi}{2}]$, 而向量角的范围为 $[0, \pi]$ 。

【变式与拓展】在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\angle SAB = \angle SAC = \angle ACB = 90^\circ$, $AC=2, BC=\sqrt{13}$,

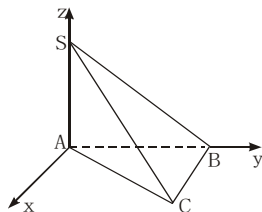
$$SB=\sqrt{29}.$$

- (1) 求证: $SC \perp BC$;
 (2) 求 SC 与 AB 所成角的余弦值.



【解法一】: 如下图, 取 A 为原点, AB, AS 分别为 y, z 轴建立空间直角坐标系,

则有 $AC=2$, $BC=\sqrt{13}$, $SB=29$, 得 $B(0, \sqrt{17}, 0)$ 、 $S(0, 0, 2\sqrt{3})$ 、 $C(2\sqrt{\frac{13}{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, 0)$, $\overrightarrow{SC} = (2\sqrt{\frac{13}{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CB} = (-2\sqrt{\frac{13}{17}}, \frac{13}{\sqrt{17}}, 0)$.



(1) $\because \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, $\therefore SC \perp BC$.

(2) 设 SC 与 AB 所成的角为 α , $\because \overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{17}, 0)$, $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$, $|\overrightarrow{SC}| = 4\sqrt{17}$, $\therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, 即为所求.

【解法二】: (1) $\because SA \perp$ 面 ABC , $AC \perp BC$, AC 是斜线 SC 在平面 ABC 内的射影, $\therefore SC \perp BC$.

(2) 如下图, 过点 C 作 $CD \parallel AB$, 过点 A 作 $AD \parallel BC$ 交 CD 于点 D , 连结 SD 、 SC , 则 $\angle SCD$ 为异面直线 SC 与 AB 所成的角. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $CD = \sqrt{17}$, $SA = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12 + 13} = 5$, $\therefore$ 在 $\triangle SDC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle SCD = \frac{\sqrt{17}}{17}$, 即为所求.

2 解: (I) 以 D 为原点, 以 $\overrightarrow{DA}$ 、 $\overrightarrow{DC}$ 、 $\overrightarrow{D_1D}$ 的正向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 则

$D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$, $D_1(0,0,5)$, $E(0,0,1)$, $F(2,2,4)$.

于是 $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AF} = (0, 2, 4)$, $\overrightarrow{BE} = (-2, -2, 1)$.

$\therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$, $\therefore BE \perp AC$, $BE \perp AF$, 且

$AC \cap AF = A$,

$\therefore BE \perp$ 平面 ACF

(II) 由 (I) 知, $\overrightarrow{BE}$ 为平面 ACF 的一个法向量,

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{BE}$ 上的射影长即为 E 到平面 ACF 的距离, 设为 d , 于是

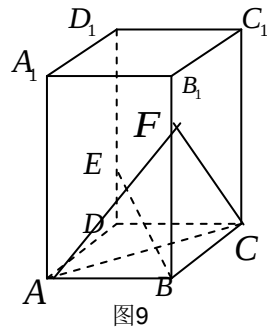


图9

$$d = |\vec{AE}| \cdot |\cos \langle \vec{AE}, \vec{BE} \rangle| = |\vec{AE}| \cdot \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{BE}|}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{BE}|} = \frac{|(-2, 0, 1) \cdot (-2, -2, 1)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{3},$$

故点 E 到平面 ACF 的距离为 $\frac{5}{3}$.

第 8 讲 三视图

1. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是（ ）

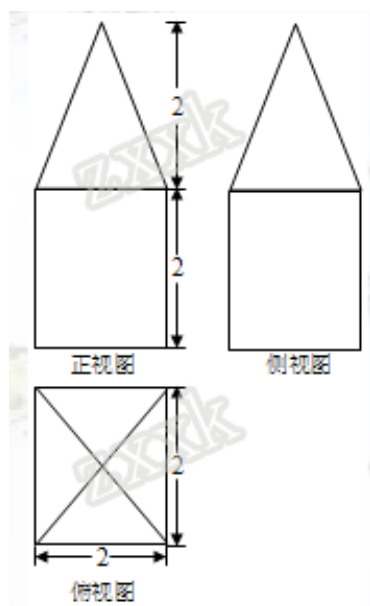
A. 8 cm^3

B. 12 cm^3

C. $\frac{32}{3} \text{ cm}^3$

D. .

$\frac{40}{3} \text{ cm}^3$



【答案】C

【解析】由三视图可知，该几何体是一个棱长为 2 的正方体与一个底面边长为 2，高为 2 的正四棱锥的组合体，故其体积为 $V = 2^3 + \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$. 故选 C.

【考点定位】1. 三视图；2. 空间几何体的体积.

2. 已知底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上，则该球的体积为（ ）

A. $\frac{32\pi}{3}$

B. 4π

C. 2π

D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】D

【解析】

试题分析：根据正四棱柱的几何特征得：该球的直径为正四棱柱的体对角线，故

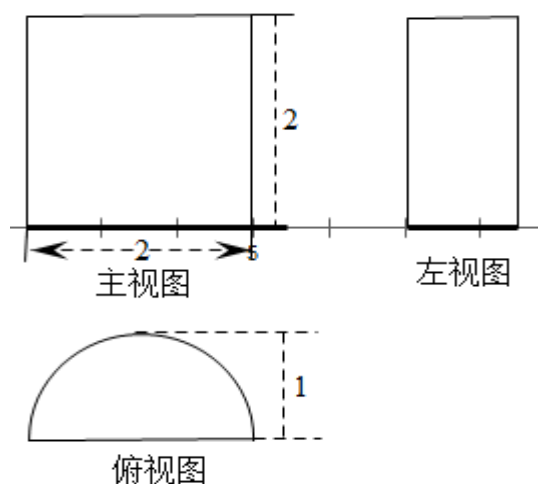
$$2R = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2, \text{ 即得 } R = 1, \text{ 所以该球的体积 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 1^3 = \frac{4\pi}{3}, \text{ 故选}$$

D.

考点：正四棱柱的几何特征；球的体积.

3. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（ ）

A. 3π B. 4π C. $2\pi + 4$ D. $3\pi + 4$

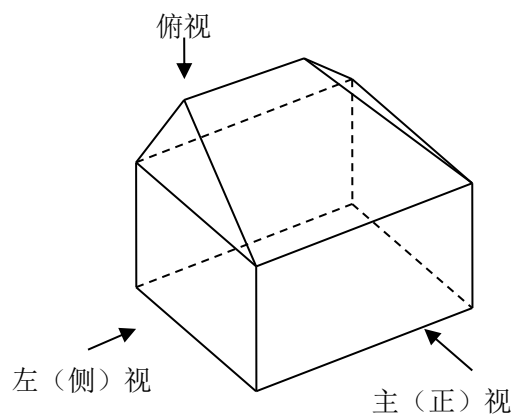


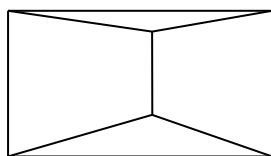
【答案】D

【解析】由几何体的三视图可知该几何体为圆柱的截去一半，所以该几何体的表面积为 $\pi \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times 2 + 2 \times 2 = 3\pi + 4$ ，故答案选 D

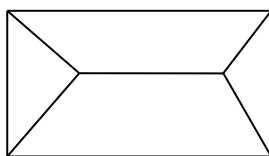
考点：几何体的表面积

4. 一几何体的直观图如右图，下列给出的四个俯视图中正确的是（ ）

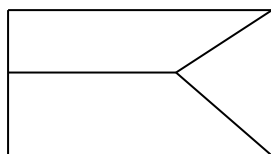




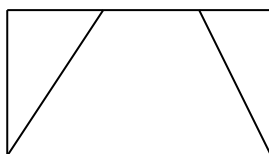
A



B



C



D

【答案】B

【解析】

试题分析：俯视图为几何体在底面上的投影，应为 B 中图形.

考点：三视图

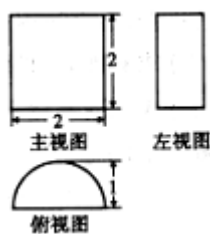
5. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（ ）

A. 3π

B. 4π

C. $2\pi+4$

D. $3\pi+4$



【答案】D

【解析】由三视图知：该几何体是半个圆柱，其中底面圆的半径为1，母线长为2，所以该几何体的表面积是 $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 \times (1+2) + 2 \times 2 = 3\pi + 4$ ，故选 D.

【考点定位】1、三视图；2、空间几何体的表面积.

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如右图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为()

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{6}$

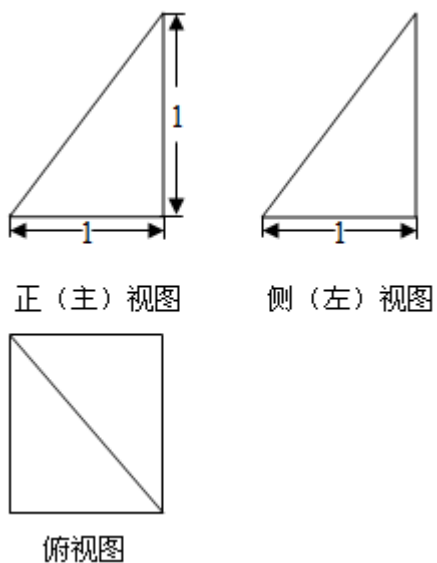
D. $\frac{1}{5}$

【解析】由三视图得，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，截去四面体 $A-A_1B_1D_1$ ，如图所示，设正方体棱长为 a ，则 $V_{A-A_1B_1D_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^3 = \frac{1}{6} a^3$ ，故剩余几何体体积为 $a^3 - \frac{1}{6} a^3 = \frac{5}{6} a^3$ ，所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$ ，故选 D.

[illegible]

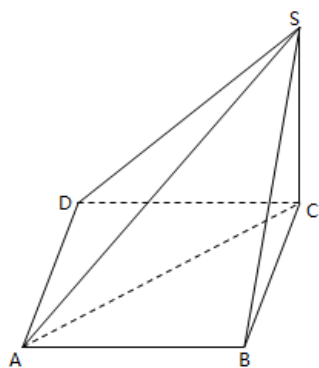
7. 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥最长棱的棱长为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$
- D. 2



【答案】C

【解析】四棱锥的直观图如图所示：



由三视图可知， $SC \perp$ 平面 $ABCD$ ， SA 是四棱锥最长的棱，

$$SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = \sqrt{SC^2 + AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}，故选 C.$$

【考点定位】三视图.

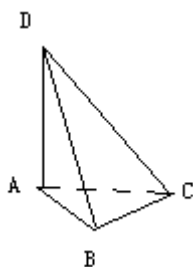
8. 已知三棱锥 $D-ABC$ 中， $AB=BC=1$ ， $AD=2$ ， $BD=\sqrt{5}$ ， $AC=\sqrt{2}$ ， $BC \perp AD$ ，则三棱锥的外接球的表面积为（ ）

- A. $\sqrt{6}\pi$ B. 6π C. 5π D. 8π

【答案】B

【解析】

试题分析：如图所示，由已知， $DA \perp AB$ ， $AB \perp BC$ ， $BC \perp$ 平面 DAB ，



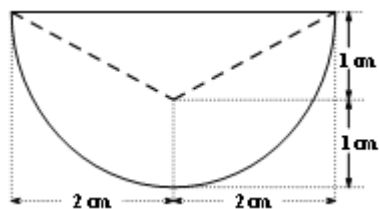
所以, $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{6}, BD^2 + BC^2 = CD^2, BC \perp BD$,

取 CD 的中点 O , 由直角三角形的性质, O 到 A, B, C, D 的距离均为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 其即为三棱锥的

外接球球心, 故三棱锥的外接球的表面积为 $4\pi(\frac{\sqrt{6}}{2})^2 = 6\pi$, 选 B.

考点: 垂直关系, 球的表面积

9. 某零件的正(主)视图与侧(左)视图均是如图所示的图形(实线组成半径为 2 cm 的半圆, 虚线是等腰三角形的两腰), 俯视图是一个半径为 2 cm 的圆(包括圆心), 则该零件的体积是 ()



- A. $\frac{4}{3}\pi \text{ cm}^3$ B. $\frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3$
C. $4\pi \text{ cm}^3$ D. $\frac{20}{3}\pi \text{ cm}^3$

【答案】C

【解析】

试题分析: 由三视图可知该零件为半球挖去一个同底的圆锥, 所以该零件的体积为

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 2^3 - \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 1 = 4\pi.$$

考点: 空间几何体的三视图、表面积和体积.

10. 正四面体的外接球和内切球的半径的关系是 ()

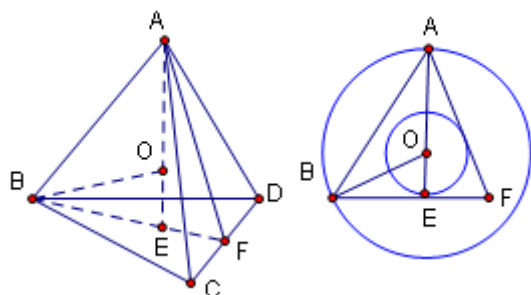
- A. $R = \frac{7}{2}r$

- B. $R = \frac{5}{2}r$
 C. $R = 2r$
 D. $R = 3r$

【答案】D

【解析】

如图所示，设点 O 是内切球的球心，正四面体棱长为 a 。由图形的对称性知，点 O 也是外接球的球心。设内切球半径为 r ，外接球半径为 R 。



在 $Rt\triangle BEO$ 中， $BO^2 = BE^2 + EO^2$ ，即 $R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + r^2$ ，得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，得 $R = 3r$ ，

故选 D.

考点：球与几何体的组合体

11. 设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 a ，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（ ）

- A. πa^2
 B. $\frac{7}{3}\pi a^2$
 C. $\frac{11}{3}\pi a^2$
 D. $5\pi a^2$

【答案】B

【解析】由题意知此三棱柱为正三棱柱，

设球心为 O ，正三棱柱上底面为 $\triangle ABC$ ，其中心为 O' ，

因为三棱柱所有棱的长都为 a ，所以 $OO' = \frac{a}{2}$ ， $O'A = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，

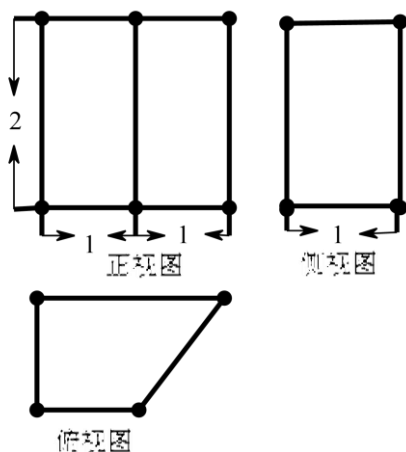
由球的相关性质可知， $\triangle O'AO$ 为直角三角形，其中 AO 为球的半径 R

即 $R = \frac{\sqrt{OO'^2 + O'A'^2}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{6} a$ ，所以球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$ ，故选 B.

考点：球的表面积

12. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积等于（ ）

- A. $8+2\sqrt{2}$ B. $11+2\sqrt{2}$ C. $14+2\sqrt{2}$ D. 15



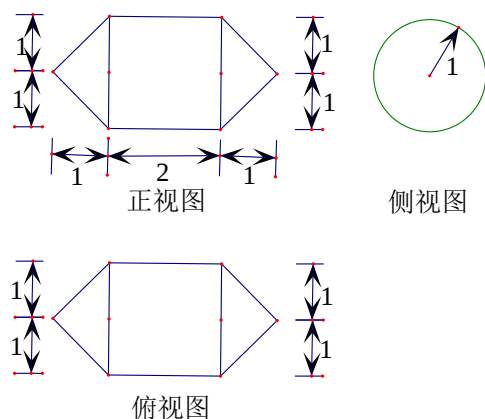
【答案】B

【解析】由三视图还原几何体，该几何体是底面为直角梯形，高为 2 的直四棱柱，且底面直角梯形的两底分别为 1, 2，直角腰长为 1，斜腰为 $\sqrt{2}$ 。底面积为 $2 \times \frac{1}{2} \times 3 = 3$ ，侧面积为 $2+2+4+2\sqrt{2}=8+2\sqrt{2}$ ，所以该几何体的表面积为 $11+2\sqrt{2}$ ，故选 B.

【考点定位】三视图和表面积.

二. 填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为_____ m^3 .

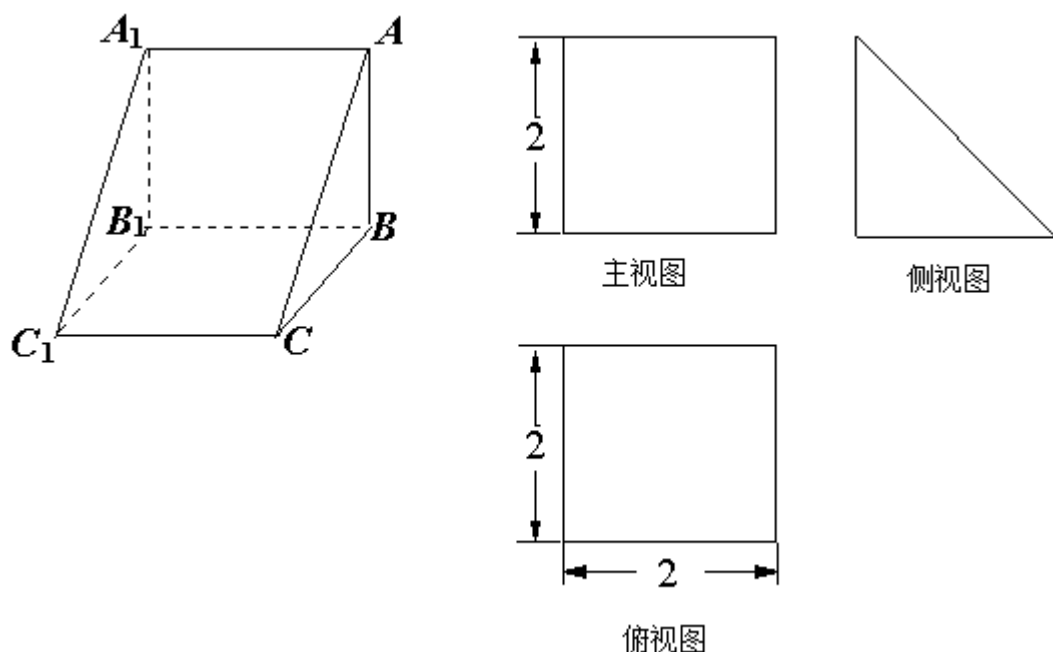


【答案】 $\frac{8}{3}\pi$

【解析】由三视图可知，该几何体是中间为一个底面半径为1，高为2的圆柱，两端是底面半径为1，高为1的圆锥，所以该几何体的体积 $V = 1^2 \times \pi \times 2 + 2 \times \frac{1}{3} \times 1^2 \times \pi \times 1 = \frac{8}{3}\pi$.

【考点定位】三视图与旋转体体积公式.

14. 三棱柱的直观图和三视图(主视图和俯视图是正方形，左视图是等腰直角三角形)如图所永，则这个三棱柱的全面积等于_____



【答案】 $11+4\sqrt{2}$

【解析】

试题分析：解： $S_{\text{侧}} = (2+2+2\sqrt{2}) \times 2 = 8+4\sqrt{2}$, $S_{\text{底}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\therefore S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}} = 8+4\sqrt{2}+2 \times 2 = 12+4\sqrt{2}$ ，所以答案应填 $12+4\sqrt{2}$.

考点：1、三视图；2、棱柱的表面积.

15. 若圆锥的内切球与外接球的球心重合，且内切球的半径为1，则圆锥的体积为_____.

【答案】 3π

【解析】

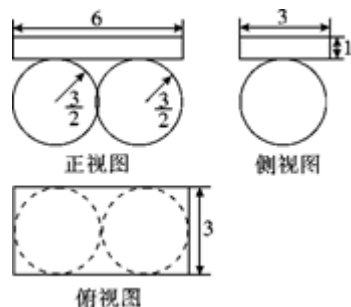
试题分析：过圆锥的旋转轴作轴截面，得 $\triangle ABC$ 及其内切圆 $\odot O_1$ 和外切圆 $\odot O_2$ ，且两圆

同圆心,即 $\triangle ABC$ 的内心与外心重合,易得 $\triangle ABC$ 为正三角形,由题意 $\odot O_1$ 的半径为 $r=1$,

$\therefore \triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, $\therefore$ 圆锥的底面半径为 $\sqrt{3}$, 高为3, $\therefore V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3 \times 3 = 3\pi$.

考点: 圆锥的体积.

16. 一个几何体的三视图如图所示(单位: mm), 则该几何体的体积为_____ mm^3 .



【答案】 $18+9\pi$

【解析】由三视图可知, 此几何体为两个相切的球上方放了一个长方体组成的组合体, 所以其体积为:

$$V = 3 \times 6 \times 1 + 2 \times \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 18 + 9\pi$$

考点: 几何体的体积

第二部分 排列组合二项式定理

1. 【解析】: (1) 3^4 (2) 4^3 (3) 4^3

(4) 【解析】: 把 A, B 视为一人, 且 B 固定在 A 的右边, 则本题相当于 4 人的全排列, $A_4^4 = 24$ 种

(5) 【解析】: 间接法 6 位同学站成一排, 3 位女生中有且只有两位女生相邻的排法有,

$$C_3^2 A_2^2 A_4^2 = 432 \text{ 种} \quad \text{其中男生甲站两端的有 } A_2^1 C_3^2 A_2^2 A_3^2 = 144, \text{ 符合条件的排法故共有 } 288$$

(6) 【解析】: 除甲乙外, 其余 5 个排列数为 A_5^5 种, 再用甲乙去插 6 个空位有 A_6^2 种, 不同的排法种数是 $A_5^5 A_6^2 = 3600$ 种

(7) 【解析】: $A_7^1 A_8^1 A_9^1 = 504$

(8) 【解析】: 把此问题当作一个排对模型, 在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 盏不亮的灯 C_5^3

种方法, 所以满足条件的关灯方案有 10 种.

(9) 【解析】: 方法一: 从后两项工作出发, 采取位置分析法。 $A_3^2 A_3^3 = 36$

方法二: 分两类: 若小张或小赵入选, 则有选法 $C_2^1 C_2^1 A_3^3 = 24$; 若小张、小赵都入选, 则有

选法 $A_2^2 A_3^2 = 12$, 共有选法 36 种, 选 A.

(10) 【解析】: 老师在中间三个位置上选一个有 A_3^1 种, 4 名同学在其余 4 个位置上有 A_4^4 种方法; 所以共有 $A_3^1 A_4^4 = 72$ 种。.

(11) 【解析】 前后两排可看成一排的两段, 因此本题可看成 6 个不同的元素排成一排, 共 $A_6^6 = 720$ 种, 选 C.

(12) 答案: C

(13) 看成一排, 某 2 个元素在前半段四个位置中选排 2 个, 有 A_4^2 种, 某 1 个元素排在后半段的四个位置中选一个有 A_4^1 种, 其余 5 个元素任排 5 个位置上有 A_5^5 种, 故共有 $A_4^1 A_4^2 A_5^5 = 5760$ 种排法.

(14) 【解析】 : B 在 A 的右边与 B 在 A 的左边排法数相同,

所以题设的排法只是 5 个元素全排列数的一半, 即 $\frac{1}{2} A_5^5 = 60$ 种

(15) 【解析】 : 法一: A_9^3 法二: $\frac{1}{A_6^6} A_9^9$

(16) 【解析】 : 先把 1 填入方格中, 符合条件的有 3 种方法, 第二步把被填入方格的对应数字填

入其它三个方格, 又有三种方法; 第三步填余下的两个数字, 只有一种填法, 共有 $3 \times 3 \times 1 = 9$ 种填法, 选 B.

(17) 答案: B

(18)

【解析】 : (1) $C_6^1 C_5^2 C_3^3$ (2) $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3$ (3) $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$ (4) $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ (5)

$$\frac{C_5^2 C_3^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{A_4^4} A_5^5$$

(19) 【解析】：先取四个球中二个为一组，另二组各一个球的方法有 C_4^2 种，再排：在四个盒中每次排 3 个有 A_4^3 种，故共有 $C_4^2 A_4^3 = 144$ 种。

九. 相同元素的分配问题隔板法：

(20) 【解析】：向 1, 2, 3 号三个盒子中分别放入 0, 1, 2 个球后还余下 17 个球，然后再把这 17

个球分成 3 份，每份至少一球，运用隔板法，共有 $C_{16}^2 = 120$ 种。

(21)

【解析】：10 个名额分到 7 个班级，就是把 10 个名额看成 10 个相同的小球分成 7 堆，每堆至少一个，可以在 10 个小球的 9 个空位中插入 6 块木板，每一种插法对应着一种分配方案，故共有不同的分配方案为 $C_9^6 = 84$ 种。

十. 排数问题（注意数字“0”）

(22)

【解析】：按题意，个位数字只可能是 0, 1, 2, 3, 4 共 5 种情况，分别有 A_5^5 个，

$$A_4^1 A_3^1 A_3^3, A_3^1 A_3^1 A_3^3, A_2^1 A_3^1 A_3^3, A_3^1 A_3^3 \text{ 个，合并总计 } 300 \text{ 个，选 } B.$$

十一. 染色问题：涂色问题的常用方法有：(1) 可根据共用了多少种颜色分类讨论；

(2) 根据相对区域是否同色分类讨论；

(3) 将空间问题平面化，转化成平面区域涂色问题。

(23) 将一个四棱锥 $S-ABCD$ 的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法的总数是_____。

【解析一】满足题设条件的染色至少要用三种颜色。

(1) 若恰用三种颜色，可先从五种颜色中任选一种染顶点 S ，再从余下的四种颜色中任选两种涂 A 、 B 、 C 、 D 四点，此时只能 A 与 C 、 B 与 D 分别同色，故有 $C_5^1 A_4^2 = 60$ 种方法。

(2) 若恰用四种颜色染色，可以先从五种颜色中任选一种颜色染顶点 S ，再从余下的四种颜色中任选两种染 A 与 B ，由于 A 、 B 颜色可以交换，故有 A_4^2 种染法；再从余下的两种颜色中任选一种染 D 或 C ，而 D 与 C ，而 D 与 C 中另一个只需染与其相对顶点同色即可，故有 $C_5^1 A_4^2 C_2^1 C_2^1 = 240$ 种方法。

(3) 若恰用五种颜色染色，有 $A_5^5 = 120$ 种染色法

综上所述，满足题意的染色方法数为 $60+240+120=420$ 种。【答案】420.

十二. 几何中的排列组合问题:

(24)

【解析】: 圆上的整点有: $(\pm 6, \pm 8), (\pm 8, \pm 6), (\pm 10, 0), (0, \pm 10)$ 12 个

$C_{12}^2 = 66$ 其中关于原点对称的有 4 条 不满则条件 切线有 $C_{12}^1 = 12$,

其中平行于坐标轴的有 14 条 不满则条件 $66 - 4 + 12 - 14 = 60$

答案: 60

练习:

1、 $(4^x - 2^{-x})^6 (x \in R)$ 的展开式中的常数项是

(A) -20 (B) -15 (C) 15 (D) 20

【答案】C

【解析】: $T_{r+1} = (-1)^r C_6^r (4^x)^{6-r} (2^{-x})^r = (-1)^r C_6^r 2^{x(12-3r)}$ 令 $x(12-3r) = 0 \Rightarrow r = 4$, 于是

展开式中的常数项是 $(-1)^4 C_6^4 = 15$ 故选 C

2、已知 $(x \cos \theta + 1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数与 $(x + \frac{5}{4})^4$ 的展开式中 x^3 的系数相等, 则

$\cos \theta =$ _____.

【答案】 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 解: $(x + \frac{5}{4})^4$ 的通项为 $C_4^r \cdot x^{4-r} \cdot (\frac{5}{4})^r$, $\because 4-r=3, \therefore r=1$,

$\therefore (x + \frac{5}{4})^4$ 的展开式中 x^3 的系数是 $C_4^1 \cdot \frac{5}{4} = 5$,

$(x \cos \theta + 1)^5$ 的通项为 $C_5^R \cdot (x \cos \theta)^{5-R}$, $\because 5-R=2, \therefore R=3$,

$\therefore (x \cos \theta + 1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数是 $C_5^3 \cdot \cos^3 \theta = 5$, $\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$,

$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3、已知 $(1+kx^2)^6$ (k 是正整数) 的展开式中, x^8 的系数小于 120, 则 $k =$ _____.

【解析】 $(1+kx^2)^6$ 按二项式定理展开的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (kx^2)^r = C_6^r k^r x^{2r}$, 我们知道 x^8 的

系数为 $C_6^4 k^4 = 15k^4$, 即 $15k^4 < 120$, 也即 $k^4 < 8$, 而 k 是正整数, 故 k 只能取 1.

4、若 $C_n^1 + 3C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \cdots + 3^{n-2} C_n^{n-1} + 3^{n-1} = 85$, 则 n 的值为_____.

答案 4

5、已知 $(1+2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ，则 $a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 =$ -8 .

6、对任意的实数 x ，有 $x^3 = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3$ ，则 a_2 的值是 (B)

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 21

例 1、从编号为 1,2,⋯,10 的 10 个大小相同的球中任取 4 个，则所取 4 个球的最大号码是 6 的概率为

- (A) $\frac{1}{84}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

解： $P = \frac{C_5^3}{C_{10}^4} = \frac{1}{21}$ ，故选 B。

点评：本小题主要考查组合的基本知识及等可能事件的概率。

例 2、在某地的奥运火炬传递活动中，有编号为 1, 2, 3, ⋯, 18 的 18 名火炬手.若从中任选 3 人，则选出的火炬手的编号能组成 3 为公差的等差数列的概率为

- (A) $\frac{1}{51}$ (B) $\frac{1}{68}$ (C) $\frac{1}{306}$ (D) $\frac{1}{408}$

解：基本事件总数为 $C_{18}^3 = 17 \times 16 \times 3$ 。

选出火炬手编号为 $a_n = a_1 + 3(n-1)$ ， $a_1 = 1$ 时，由 1, 4, 7, 10, 13, 16 可得 4 种选法；

$a_1 = 2$ 时，由 2, 5, 8, 11, 14, 17 可得 4 种选法； $a_1 = 3$ 时，由 3, 6, 9, 12, 15, 18 可得 4 种选法。

$$P = \frac{4+4+4}{17 \times 16 \times 3} = \frac{1}{68}.$$

点评：本题考查古典概型及排列组合问题。

例 3、从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛。

- (I) 求所选 3 人都是男生的概率；
(II) 求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率；
(III) 求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率。

本小题考查等可能事件的概率计算及分析和解决实际问题的能力.满分 12 分。

(I)解： 所选 3 人都是男生的概率为 $\frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$ 。

(II)解： 所选 3 人中恰有 1 名女生的概率为 $\frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$ 。

(III)解： 所选 3 人中至少有 1 名女生的概率为 $\frac{C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{5}$ 。

考点 2 考查互斥事件至少有一个发生与相互独立事件同时发生概率计算

不可能同时发生的两个事件 A、B 叫做互斥事件，它们至少有一个发生的事件为 A+B，

用概率的加法公式 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 计算。

事件 A (或 B) 是否发生对事件 B (或 A) 发生的概率没有影响, 则 A、B 叫做相互独立事件, 它们同时发生的事件为 $A \cdot B$ 。用概率的乘法公式 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ 计算。高考常结合考试竞赛、上网工作等问题对这两个事件的识别及其概率的综合计算能力进行考查。

例 4

设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响。已知在某一小时内, 甲、乙都需要照顾的概率为 0.05, 甲、丙都需要照顾的概率为 0.1, 乙、丙都需要照顾的概率为 0.125,

(I) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是多少;

(II) 计算这个小时内至少有一台需要照顾的概率。

解: (I) 记甲、乙、丙三台机器在一小时需要照顾分别为事件 A、B、C, ……1 分

则 A、B、C 相互独立, 由题意得:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.05$$

$$P(AC) = P(A)P(C) = 0.1$$

$$P(BC) = P(B)P(C) = 0.125 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } P(A) = 0.2; P(B) = 0.25; P(C) = 0.5$$

所以, 甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是 0.2、0.25、0.5……6 分

(II) $\because A、B、C$ 相互独立, $\therefore \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 相互独立, ……7 分

$\therefore$ 甲、乙、丙每台机器在这个小时内都不需要照顾的概率为

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.8 \times 0.75 \times 0.5 = 0.3 \dots\dots\dots 10$$

$\therefore$ 这个小时内至少有一台需要照顾的概率为 $p = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 1 - 0.3 = 0.7 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

考点 3 考查对立事件概率计算

必有一个发生的两个互斥事件 A、B 叫做互为对立事件。即 $B = \bar{A}$ 或 $A = \bar{B}$ 。用概率

的减法公式 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 计算其概率。

高考常结合射击、电路、交通等问题对对立事件的判断识别及其概率计算进行考查。

例 5. 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{5}$ 。

(I) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求恰好命中一次的概率;

(II) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率。

解: (I) 依题意, 记“甲投一次命中”为事件 A, “乙投一次命中”为事件 B, 则

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{5}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = \frac{3}{5}.$$

$\therefore$ “甲、乙两人各投球一次, 恰好命中一次”的事件为 $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

$$\therefore P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{2}.$$

答：甲、乙两人在罚球线各投球一次，恰好命中一次的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

(II) ∵ 事件“甲、乙两人在罚球线各投球二次均不命中”的概率为

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{100}$$

∴ 甲、乙两人在罚球线各投球两次至少有一次命中的概率

$$P = 1 - \bar{P} = 1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}.$$

答：甲、乙两人在罚球线各投球二次，至少有一次命中的概率为 $\frac{91}{100}$ 。

题型 1 抽样方法

【例 1】 在 1000 个有机会中奖的号码（编号为 000—999）中，在公证部门监督下按照随机抽取的方法确定后两位数为的号码为中奖号码，该抽样运用的抽样方法是（ ）

A. 简单随机抽样 B. 系统抽样 C. 分层抽样 D. 以上均不对

分析：实际“间隔距离相等”的抽取，属于系统抽样。

解析：题中运用了系统抽样的方法采确定中奖号码，中奖号码依次为：088，188，288，388，488，588，688，788，888，988。答案 B。

点评：关于系统抽样要注意如下几个问题：（1）系统抽样是将总体分成均衡几个部分，然按照预先定出的规则从每一部分抽取一个个体，得到所需要的样本的一种抽样方法。（2）系统抽样的步骤：①将总体中的个体随机编号；②将编号分段；③在第一段中用简单随机抽样确定起始的个体编号；④按事先研究的规则抽取样本。（3）适用范围：个体数较多的总体。

例 2（2008 年高考广东卷理 3） 某校共有学生 2000 名，各年级男、女生人数如表。已知在全校学生中随机抽取 1 名，抽到二年级女生的概率是 0.19。现用分层抽样的方法在全校抽取 64 名学生，则应在三年级抽取的学生人数为（ ）

A. 24 B. 18 C. 16 D. 12

	一年级	二年级	三 年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

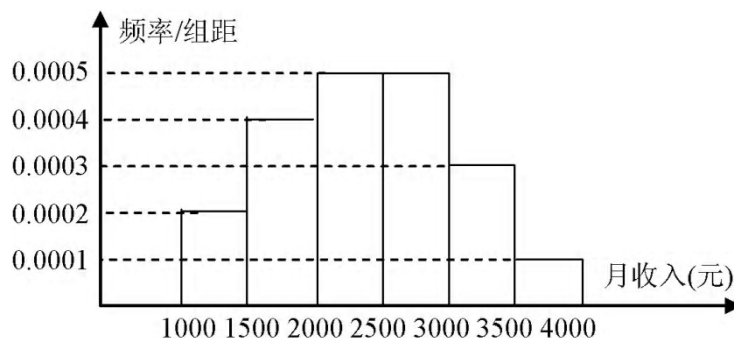
分析：根据给出的概率先求出 x 的值，这样就可以知道三年级的学生人数，问题就解决了。

解析：C 二年级女生占全校学生总数的 19%，即 $x = 2000 \times 0.19 = 380$ ，这样一年级和二年级学生的总数是 $373 + 377 + 380 + 370 = 1500$ ，三年级学生有 500 人，用分层抽样抽取的三年级学生应是 $\frac{64}{2000} \times 500 = 16$ 。答案 c。

点评：本题考查概率统计最基础的知识，还涉及到一点分析问题的能力和运算能力，题目以抽样的等可能性为出发点考查随机抽样和分层抽样的知识。

例 3.（2009 江苏泰州期末第 2 题） 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如下图）。为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100

人作进一步调查，则在 $[2500, 3500)$ (元) 月收入段应抽出_____人.



分析：实际上是每 100 人抽取一人，只要把区间内的人数找出来即可.

解析：根据图可以看出月收入在 $[2500, 3500)$ 的人数的频率是

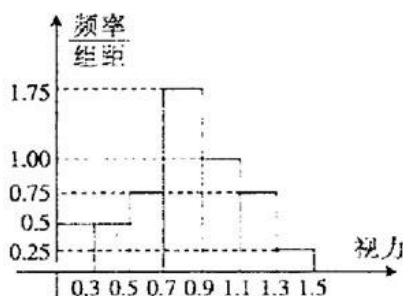
$(0.0005 + 0.0003) \times 500 = 0.4$ ，故月收入在 $[2500, 3500)$ 人数是 $10000 \times 0.4 = 4000$ ，

故抽取 25 人.

点评：本题把统计图表和抽样方法结合起来，主要目的是考查识图和计算能力.

题型 2 统计图表问题

例 4 (安徽省皖南八校 2009 届高三第二次联考理科数学第 2 题) 从某校高三年级随机抽取一个班，对该班 50 名学生的高校招生体检表中视力情况进行统计，其结果的频率分布直方图如右图：若某高校 A 专业对视力的要求在 0.9 以上，则该班学生中能报 A 专业的人数为



- A. 10 B. 20 C. 8 D. 16

分析：根据图找出视力在 0.9 以上的人数的频率即可.

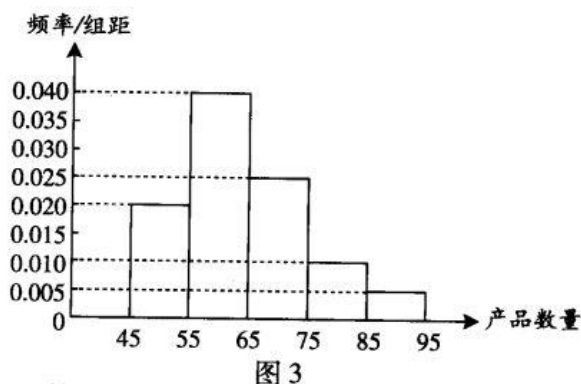
解析：B. 视力在 0.9 以上的频率为 $(1 + 0.75 + 0.25) \times 0.2 = 0.4$ ，人数为 $0.4 \times 50 = 20$.

点评：在解决频率分布直方图问题时容易出现的错误是认为直方图中小矩形的高就是各段的频率，实际上小矩形的高是频率除以组距.

例 5 (2008 高考广东文 11) 为了调查某厂工人生产某种产品的能力，随机抽查了 20 位工人某天生产该产品的数量. 产品数量的分组区间为 $[45, 55)$ ，

$[55, 65)$, $[65, 75)$, $[75, 85)$,

$[85, 95)$ 由此得到频率分布直方图如图, 则这 20 名工人中一天生产该产品数量在 $[55, 75)$ 的人数是_____.



分析: 找出频率即可.

解析: $20 \times [(0.040 + 0.0025) \times 10] = 13$.

点评: 本题考查频率分布直方图, 解题的关键是明确这个直方图上的纵坐标是频率/组距, 得出生产数量在 $[55, 75)$ 的人数的频率.

题型 3 平均数、标准差(方差)的计算问题

例 6 (2008 高考山东文 9) 从某项综合能力测试中抽取 100 人的成绩, 统计如表, 则这 100 人成绩的标准差为 ()

分数	5	4	3	2	1
人数	20	10	30	30	10

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ C. 3 D. $\frac{8}{5}$

分析: 根据标准差的计算公式直接计算即可.

解析: 平均数是 $\frac{5 \times 20 + 4 \times 10 + 3 \times 30 + 2 \times 30 + 1 \times 10}{100} = 3$,

标准差是

$$s = \sqrt{\frac{20 \times (5-3)^2 + 10 \times (4-3)^2 + 30 \times (3-3)^2 + 30 \times (2-3)^2 + 10 \times (1-3)^2}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{80 + 10 + 30 + 40}{100}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

答案 B.

点评: 本题考查数据组的平均数和标准差的知识, 考查数据处理能力和运算能力. 解题的关键是正确理解统计表的意义, 会用平均数和标准差的公式, 只要考生对此认识清楚, 解答并不困难.

例 7. (中山市高三级 2008—2009 学年度第一学期期末统一考试理科第 9 题) 若数据

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的平均数 $\bar{x}=5$ ，方差 $\sigma^2=2$ ，则数据

$3x_1+1, 3x_2+1, 3x_3+1, \dots, 3x_n+1$ 的平均数为_____，方差为_____.

分析：根据平均数与方差的性质解决.

解析：16,18

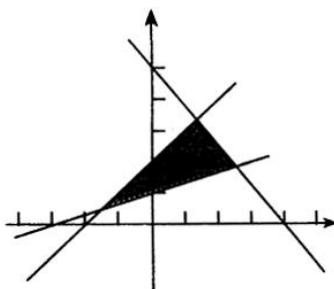
第三部分 线性规划

例1 画出不等式组 $\begin{cases} -x+y-2 \leq 0, \\ x+y-4 \leq 0, \\ x-3y+3 \leq 0. \end{cases}$ 表示的平面区域.

解：把 $x=0$ ， $y=0$ 代入 $-x+y-2$ 中得 $-0+0-2 < 0$.

$\therefore$ 不等式 $-x+y-2 \leq 0$ 表示直线 $-x+y-2=0$ 下方的区域（包括边界），

即位于原点的一侧，同理画出其他两部分，不等式组所表示的区域如图所示.



【说明：“图解法”是判别二元一次不等式所表示的区域行之有效的一种方法.】

巩固练习

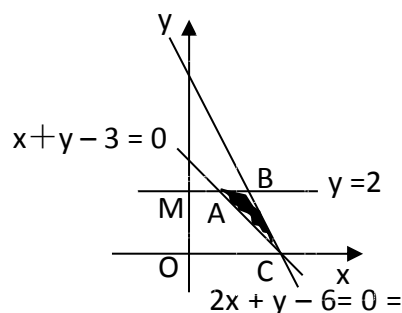
1、不等式组 $\begin{cases} 2x+y-6 \geq 0 \\ x+y-3 \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域

的面积（ ）

- A . 4 ;
B . 1;
C . 5 ;
D . 无穷大.

解：如图，作出可行域， $\triangle ABC$ 的面积即为所求，由梯形 $OMBC$ 的面积减去梯形

$OMAC$ 的面积即可，选 B.



2、平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域的面积是（ ）

A. $4\sqrt{2}$;

B. 4;

C. $2\sqrt{2}$;

D. 2.

【解析】如图 6，作出可行域，易知不等式组 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面

区域是一个三角形．容易求三角形的三个顶点坐标为 A (0, 2), B (2, 0), C(-2, 0) ．

于是三角形的面积为： $S = \frac{1}{2} |BC| \cdot |AO| = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$. 从而选 B.

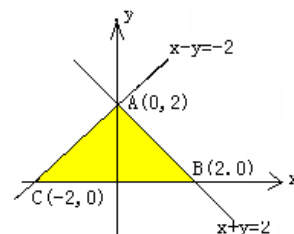


图6

3、在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x+y \geq 0, \\ x-y+4 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域的面积等于_____.

【答案】9

已知实数 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} -2 \leq x+y \leq 2 \\ -2 \leq x-y \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$ ，则不等式所围成的区域面积为_____.

【答案】 $8-\pi$

例 2 已知实数 x 、 y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ 2x+y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 3x + 4y$ 的最大值是_____.

巩固练习

1、实数 x 、 y 满足 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ y \leq x \\ x \leq 1 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = 3x - y$ 的最小值为_____.

$\frac{4}{3}$

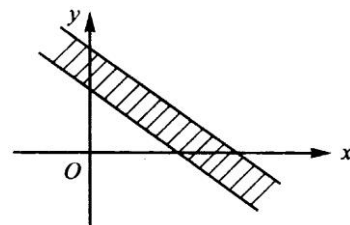
2、某所学校计划招聘男教师 x 名，女教师 y 名， x 和 y 须满足约束条件 $\begin{cases} 2x-y \geq 5, \\ x-y \leq 2, \\ x < 6. \end{cases}$ 则该校招

聘的教师最多是_____10_____名.

3、已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x - 3y + 5 \geq 0, \\ y \geq 1, \end{cases}$ 则 $z = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y-2}$ 的最大值等于_____.

例3 已知 $x + y - 5 \geq 0$, $x + y - 10 \leq 0$. 求 $x^2 + y^2$ 的最大、最小值.

解: 由 $\begin{cases} x + y - 5 \geq 0, \\ x + y - 10 \leq 0, \end{cases}$ 得可行域(如图所示)为 $z = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$,



而 $(0, 0)$ 到 $x + y - 5 = 0$, $x + y - 10 = 0$ 的距离分别为 $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{10}{\sqrt{2}}$.

所以 z 的最大、最小值分别是 50 和 $\frac{25}{2}$.

【题目中的目标函数是非线性的。解决的方法类似于线性规划问题。可做出图，利用图进行直观的分析】

例4 已知 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - y + 1 \leq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____.

【解析】如图2，只要画出满足约束条件的可行域，

而 $x^2 + y^2$ 表示可行域内一点到原点的距离的平方.

由图易知 $A(1, 2)$ 是满足条件的最优解. $x^2 + y^2$ 的最小值是为 5.

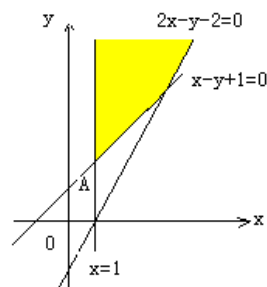


图2

【点评】本题属非线性规划最优解问题. 求解关键是在挖掘目标关系几何意义的前提下，作出可行域，寻求最优解.

例5 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \leq 0, \\ x \geq 1, \\ x + y - 7 \leq 0, \end{cases}$ 则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{9}{5}, 6\right]$;

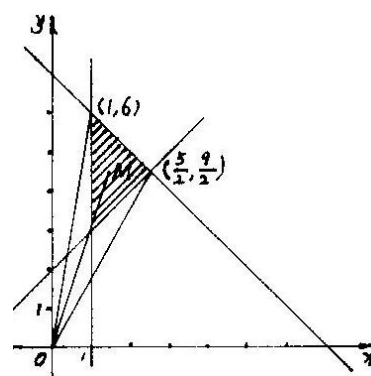
B. $\left(-\infty, \frac{9}{5}\right] \cup [6, +\infty)$;

C. $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$;

D. $[3, 6]$.

【解析】 $\frac{y}{x}$ 是可行域内的点 $M(x, y)$ 与原点 $O(0, 0)$ 连线的斜率，

当直线 OM 过点 $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ 时， $\frac{y}{x}$ 取得最小值 $\frac{9}{5}$;



当直线 OM 过点 $(1,6)$ 时, $\frac{y}{x}$ 取得最大值 6.

【答案】A.

参数方程部分答案

1. 设P是椭圆 $2x^2 + 3y^2 = 12$ 上的一个动点, 则 $x + 2y$ 的最大值是 __, 最小值是 __.

分析一: 注意到变量 (x, y) 的几何意义, 故研究二元函数 $x+2y$ 的最值时, 可转化为几何问题. 若设 $x+2y=t$, 则方程 $x+2y=t$ 表示一组直线 (t 取不同的值, 方程表示不同的直线), 显然 (x, y) 既满足 $2x^2+3y^2=12$, 又满足 $x+2y=t$, 故点 (x, y) 是方程

组 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 12 \\ x + 2y = t \end{cases}$ 的公共解. 依题意, 可知直线 $x + 2y = t$ 与椭圆总有公共点. 从而转化为

研究消元后的一元二次方程的判别式 $\Delta \geq 0$.

解法一:

令 $x + 2y = t$, x, y 还满足 $2x^2 + 3y^2 = 12$, 故

方程组 $\begin{cases} x + 2y = t \\ 2x^2 + 3y^2 = 12 \end{cases}$ 有公共解, 消去 x

得 y 的一元二次方程: $11y^2 - 8t \cdot y + (2t^2 - 12) = 0$

由 $\Delta = 64t^2 - 4 \times 11 \times (2t^2 - 12) \geq 0$ 解得: $-\sqrt{22} \leq t \leq \sqrt{22}$

$\therefore x + 2y$ 的最大值为 $\sqrt{22}$, 最小值为 $-\sqrt{22}$

分析二:

由于研究二元函数 $x+2y$ 相对困难, 因此有必要消元, 但由 x, y 满足的方程 $2x^2+3y^2=12$ 表出 x 或 y , 会出现无理式, 这对进一步求函数最值依然不够简洁, 能否有其他途径把二元函数 $x+2y$ 转化为一元函数呢?

方法是利用椭圆的参数方程 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ 代入 $x + 2y$ 中, 即可转化为以

θ 为变量的一元函数。

解法二:

由椭圆的方程 $2x^2 + 3y^2 = 12$, 可设 $x = \sqrt{6} \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$

代入 $x + 2y$, 得: $x + 2y = \sqrt{6} \cos \theta + 2 \cdot 2 \sin \theta = \sqrt{22} \sin(\theta + \varphi)$

其中 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 由于 $-1 \leq \sin(\theta + \varphi) \leq 1$, 所以 $-\sqrt{22} \leq x + 2y \leq \sqrt{22}$

$\therefore x + 2y$ 的最小值为 $-\sqrt{22}$, 最大值为 $\sqrt{22}$

[注]以上两种解法都是通过引入新的变量来转化问题,解法一是通过引入 t , 而把 $x+2y$ 几何化为直线的纵截距的最值问题; 解法二则是利用椭圆的参数方程, 设出点 P 的坐标 $(\sqrt{6}\cos\theta, 2\sin\theta)$, 代入 $x+2y$ 中, 转化为一元函数 $f(\theta)$ 求其最值, 这两种解法不妨都称为“参数法”。

2. 求椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点 P 与定点 $(1, 0)$ 之间距离的最小值

2. **解:** (先设出点 P 的坐标, 建立有关距离的函数关系)

设 $P(3\cos\theta, 2\sin\theta)$, 则 P 到定点 $(1, 0)$ 的距离为

$$d(\theta) = \sqrt{(3\cos\theta - 1)^2 + (2\sin\theta - 0)^2} = \sqrt{5\cos^2\theta - 6\cos\theta + 5} = \sqrt{5\left(\cos\theta - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}$$

$$\text{当 } \cos\theta = \frac{3}{5} \text{ 时, } d(\theta) \text{ 取最小值 } \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

3. 已知实数 x, y 满足 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, 求 $x^2 + y^2, 2x + y$ 的最值。

解: 设圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 5\cos\theta \\ y = 2 + 5\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$

(1) $x^2 + y^2 = (1 + 5\cos\theta)^2 + (2 + 5\sin\theta)^2 = 30 + 10\sqrt{5}\sin(\theta + \phi)$, 最大值与最小值分别是 $30 + 10\sqrt{5}, 30 - 10\sqrt{5}$

(2) $2x + y = 2(1 + 5\cos\theta) + 2 + 5\sin\theta = 4 + 15\sin(\theta + \phi)$, 最大值与最小值分别是 19 与 -11。

4. 已知: 直线 l 过点 $P(2, 0)$, 斜率为 $\frac{4}{3}$, 直线 l 和抛物线 $y^2 = 2x$ 相交于 A, B 两点, 设线段 AB 的中点为 M , 求 (1) P, M 两点间的距离。(2) M 点的坐标。(3) 线段 AB 的长 $|AB|$ 。

解: 由 $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ 得: $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}$, 所以直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{3}{5}t \\ y = \frac{4}{5}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$,

代入 $y^2 = 2x$ 化简得: $\frac{16}{25}t^2 - \frac{6}{5}t - 4 = 0, t_1 + t_2 = \frac{15}{8}, t_1 t_2 = -\frac{25}{4}$

$$(1) |PM| = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{15}{4}$$

$$(2) \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{17}{4} \\ y = \frac{4}{5} \times \frac{15}{4} = 3 \end{cases} \text{ 所以 } M\left(\frac{17}{4}, 3\right)$$

$$(3) |AB| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{5\sqrt{65}}{8}$$

5. 直线 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数) 被双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上截得的弦长为 _____。

分析与解:

方法之一可把直线的参数方程化为普通方程, 与双曲线方程联立, 消元, 再结合韦达

定理, 利用弦长公式 $|AB| = \sqrt{(1+k)^2(x_1 - x_2)^2}$ 可求得弦长; 若不把参数方程化为普通方

程, 又怎样求弦长呢? 注意到直线参数方程不是标准形式 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$, 故上述方程

中的 t 不具有显而易见的几何意义, 因此有必要先将其化为标准形式:

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

$$\text{代入 } x^2 - y^2 = 1, \text{ 得: } \left(2 + \frac{1}{2}t\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 = 1$$

$$\text{整理, 得: } t^2 - 4t - 6 = 0$$

设其二根为 t_1, t_2 , 则

$$t_1 + t_2 = 4, \quad t_1 \cdot t_2 = -6$$

$$\text{从而弦长为 } |AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{4^2 - 4(-6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

6 (1) 写出经过点 $M_0(1,5)$, 倾斜角是 $\pi/3$ 的直线 l 的参数方程;

(2) 利用这个参数方程, 求这条直线 l 与直线 $x - y - 2\sqrt{3} = 0$ 的交点到点 M_0 的距离。

(3) 求这条直线 l 和圆 $x^2 + y^2 = 16$ 的两个交点到点 M_0 的距离的和与积。

$$\text{解: (1)} \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

$$(2) 10 + 6\sqrt{3}$$

$$(3) \text{把} \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{为参数}) \text{代入 } x^2 + y^2 = 16 \text{ 化简得: } t^2 + (1 + 5\sqrt{3})t + 10 = 0$$

$$|t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2} = \sqrt{36 + 10\sqrt{3}}, \quad t_1t_2 = 10$$

7. 已知双曲线 G 的中心在原点, 它的渐近线方程是 $y = \pm \frac{1}{2}x$. 过点 $P(-4, 0)$ 作斜率为 $\frac{1}{4}$ 的直线 l , 使得 l 和 G 交于 A, B 两点, 和 y 轴交于点 C , 并且点 P 在线段 AB 上, 又满足 $|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$. 求双曲线 G 的方程;

解: 由双曲线 G 渐近线方程是 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 可设双曲线 G 的方程为: $x^2 - 4y^2 = m$.

$$\text{把直线 } l \text{ 的参数方程方程} \begin{cases} x = -4 + \frac{4}{\sqrt{17}}t \\ y = \frac{1}{\sqrt{17}}t \end{cases} (t \text{为参数}) \text{ 代入双曲线方程, 整理得}$$

$$\frac{12}{17}t^2 - \frac{32}{\sqrt{17}}t + 16 - m = 0, \text{ 设 } A, B \text{ 对应的参数为 } t_1, t_2, \Delta = \frac{32^2}{17} - 4 \times \frac{12}{17} \times (16 - m) > 0$$

$$\text{得 } m < \frac{46}{3}$$

$$\text{由韦达定理: } t_1t_2 = \frac{17}{12}(16 - m), \therefore |PA| \cdot |PB| = |t_1| \cdot |t_2| = \frac{17}{12}(m - 16)$$

$$\text{令 } -4 + \frac{4}{\sqrt{17}}t = 0, \text{ 得 } t = \sqrt{17}, \therefore |PC| = \sqrt{17}, \text{ 由 } |PA| \cdot |PB| = |PC|^2 \text{ 得}$$

$$\frac{17}{12}(m - 16) = 17, \quad m = 28$$

$$\text{所以, 双曲线的方程为 } \frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{7} = 1.$$