2017 秋季班高一数学精炼题集参考答案

第 1 讲

1.(1) $\{-2,-1,0,1,2\}$

(2) $\{(2,3),(-2,3),(-1,0),(1,0),(0,-1)\}$

2. (1)_ $\{x\mid x^2-5x+6=0\}$

(2) $\{(x,y)\mid \begin{cases}2x+3y=13,\\3x+2y=12.\end{cases}\}$

3、

【答案】①③

【解析】①G=｛非负整数｝，⊕为整数的加法.

∵任意两个非负整数的和仍为非负整数，且存在 $e=0$，使得对一切 $a\in G$，都有 $a\oplus 0=0\oplus a=a$，

∴集合 G 关于运算⊕为"融洽集".

②G=｛偶数｝，⊕为整数的乘法.

∵任意两个偶数的乘种仍是偶数，但不存在偶数 $e\in G$ 使得对一切 $a\in G$，都有 $a\oplus e=e\oplus a=a$ 成立，

∴集合 G 关于运算⊕不为"融洽集".

③G=｛平面向量｝，⊕为平面向量的加法.

∵任意两个向量之和仍为向量，且存在 $\boldsymbol{e}=0$，使得对一切 $\boldsymbol{a}\in G$，都有 $\boldsymbol{a}\oplus 0=0\oplus \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 成立，

∴集合 G 关于运算⊕为"融洽集"，

综上所述，其中 G 关于运算⊕为"融洽集"的有①③.

4、 $\{a_2,a_3\}$

5、 B

6、(6)(7)(8)

7、.a=0 或 $a\geqslant \frac{9}{8}$

8、 $x=1,\ y=-1$ 或 $x=-1,\ y=1$.

9、 $a\le -2$

10、C

11、（1）5；（2） $\{a_1,a_2,a_3,a_7,a_8\}$

12、D.

13、解：因为 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，

（1）由 $A\bigcap B=\{2\}$ 知，$2\in B$，从而得 $2^2+4(a+1)+(a^2-5)=0$，即

$a^2+4a+3=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=-3$

当 $a=-1$ 时，$B=\{x|x^2-4=0\}=\lfloor 2,-2\rfloor$，满足条件；

当 $a=-3$ 时，$B=\{x|x^2-4x+4=0\}=\{2\}$，满足条件；所以 $a=-1$ 或 $a=-3$

（2）对于集合 B，由 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)=8(a+3)$

因为 $A\bigcup B=A$，所以 $B\subseteq A$

①当 $\Delta<0$，即 $a<-3$ 时，$B=\phi$，满足条件；

②当 $\Delta=0$，即 $a=-3$ 时，$B=\{2\}$，满足条件；

③当 $\Delta>0$，即 $a>-3$ 时，$B=A=\{1,2\}$ 才能满足条件，

由根与系数的关系得 $\begin{cases}1+2=-2(a+1)\\1\times 2=a^2-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2}\\a^2=7\end{cases}$，矛盾

故实数 a 的取值范围是 $a\le -3$

14、$a\ge\dfrac{1}{2}$ 或 $a\le -3$

15、 －2

16、解：①当$-4<p<0$时,$x^2+(p+2)x+1=0$的$\Delta<0, A=\phi$,故$A\cap R^+=\phi$满足条件;

②当△≥0 时，∵方程无零根，故方程两根必均为负根，∵两根之积为 1（大于 0）∴

$-(p+2)<0,\Rightarrow 0>p>-2,$又$\Delta\ge 0,\Rightarrow p\le -4$或$p\ge 0,\therefore p\ge 0,$综上有 p>-4.

17、解：$(A\bigcup B)\bigcap C$=$(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$。$A\bigcap C$ 与 $B\bigcap C$ 分别为方程组

（Ⅰ）$\begin{cases}ax+y=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$ （Ⅱ）$\begin{cases}x+ay=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$

的解集。由（Ⅰ）解得（x,y）=（0，1）=（$\dfrac{2a}{1+a^2}$，$\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$）；由（Ⅱ）解得

（x,y）=（1，0），（$\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$，$\dfrac{2a}{1+a^2}$）

（1） 使 $(A\bigcup B)\bigcap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能：

① $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1\end{cases}$　　② $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0\end{cases}$

由①解得 a=0；由②解得 a=1。

故 a=0 或 1 时，$(A\bigcup B)\bigcap C$ 恰有两个元素。

（2） 使 $(A\bigcup B)\bigcap C$ 恰有三个元素的情况是：$\dfrac{2a}{1+a^2}=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$，故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\bigcup B)\bigcap C$ 恰有三个元素。

18、{(2，4)}

19、解：（1）集合 I 可划分为三个不相交的子集；$A\backslash B$，$B\backslash A$，$A\bigcap B, I$ 中的每个元素恰属于其中一个子集，10 个元素共有 3^{10} 种可能，每一种可能确定一个满足条件的集合对，所以集合对有 3^{10} 个。

（2）I 的子集分三类：空集，非空真子集，集合 I 本身，确定一个子集分十步，第一步，1 或者属于该子集或者不属于，有两种；第二步，2 也有两种，…，第 10 步，0 也有两种，由乘法原理，子集共有 $2^{10}=1024$ 个，非空真子集有 1022 个。

.

20、提示：直接算比较麻烦，M 有 $2^{2008}-1$ 个满足条件的子集，既然求每个集合最大值与最小值的和，就构造两个集合的对应，对应法则是使得两个集合最大值与最小值对应.

解：定义 $\min(M)$ 为集合 M 中最小元素，$\max(M)$ 为集合 M 中最大元素，将集合 M 的 2^{2008} 个子集分成 2^{2007} 组，其中去掉 $\varnothing$，全集为一组，假设 M_1 与 N_1 为一组，配对原则为：任取 $x\in M_1$，都有 $(2009-x)\in N_1$. 则 $\max(M_1)+\min(N_1)=2009$，$\min(M_1)+\max(N_1)=2009$，所以 $(\max(M_1)+\min(N_1)+\min(M_1)+\max(N_1))/2=2009$，全集的 $a_x=2009$，所以全部 a_x 的平均值为：2009.

回家作业

1、D

2、$m=0$ 或 $m=1$ 或 $m=\dfrac{1}{2}$

3、 D

4、略

5、$x=3$，$y=-\frac{1}{2}$.

6、 $-3<a<-1$

7、 $a<\mathbf{1}$

8、$A\cap B\cap C_U C$.

9、$M\bigcap ð_U N$

10、解：赞成 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$，赞成 B 的人数为 30+3=33，如上图，记 50 名学生组成的集合为 U，赞成事件 A 的学生全体为集合 A；赞成事件 B 的学生全体为集合 B.

设对事件 A、B 都赞成的学生人数为 x,则对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$,赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.

依题意 $(30-x)+(33-x)+x+(\frac{x}{3}+1)=50$,解得 $x=21$.

所以对 A、B 都赞成的同学有 21 人，都不赞成的有 8 人

11、 解： 记 $I=\{1,2,3,\cdots,100\}, A=\{x|1\le x\le 100,且x能被2整除（记为2|x）\}$，$B=\{x|1\le x\le 100,3|x\}, C=\{x|1\le x\le 100,5|x\}$，由容斥原理，

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{5}\right]-\left[\frac{100}{6}\right]-\left[\frac{100}{10}\right]-\left[\frac{100}{15}\right]+\left[\frac{100}{30}\right]=74$，所以不能被 2，3，5 整除的数有 $|I|-|A\cup B\cup C|=26$ 个。

第 2 讲

1.（1）假命题
（2）假命题
（3）假命题
（4）假命题
（5）真命题

2. 逆命题：两个和为偶数的数是偶数 是假命题
否命题：不都是偶数的两个数的和不是偶数； 是假命题
逆否命题：. 和不是偶数的两个数不都是偶数 是真命题

3、填写下列命题的否定形式
①$3+4>6$：__$3+4\le 6$__； ②2 是质数；_____2 不是质数________；
③他是数学家或物理学家：_________;他既不是数学家也不是物理学家
④若 $ab=0$, 则 a,b 中至少有一个为零:_____ 若 $ab\ne 0$, 则 a,b 中没有一个为零

4．证明：(反证法) 设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$(其中 $x\in R, x\ne\frac{1}{a}$) 图像上存在两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 使 $AB//x$ 轴 $(x_1\ne x_2)$

则 $y_1=y_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1-1}{ax_1-1}=\dfrac{x_2-1}{ax_2-1} \Leftrightarrow (x_1-1)(ax_2-1)=(x_2-1)(ax_1-1)$

$\Leftrightarrow ax_2x_1-x_1-ax_2+1=ax_1x_2-ax_1-x_2+1 \Leftrightarrow (a-1)(x_1-x_2)=0 \Leftrightarrow a=1$ 或 $x_1=x_2$ 矛值

所以经过函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$(其中 $x\in R, x\neq \dfrac{1}{a}$)图像上任意两个不同点的直线不平行于 x 轴;

5. 填空(在“充分非必要”、“必要非充分”、“充分且必要”、“既非充分又非必要” 中选一种作答)

⑴对于实数 $x,y,p:xy>1,x+y>2$ 是 $q:x>1,y>1$ 的___必要非充__________条件;

⑵对于实数 $x,y,p:x+y\neq 8$ 是 $q:x\neq 2$ 或 $y\neq 6$ 的__充分非必要____________条件;

⑶设 $x,y\in R$,则 $x^2+y^2<2$ 的必要非充分条件是:$|x|<\sqrt{2},|y|<\sqrt{2}$;

6、解:⑴ $2x+m<0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow x\in A=\left(-\infty,-\dfrac{m}{2}\right)$

$x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>3 \Leftrightarrow B=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

“$2x+m<0$” 是“$x^2-2x-3>0$”的充分条件 $\Leftrightarrow A\subseteq B$

$\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2}\leq -1 \Leftrightarrow m\geq 2$

存在实数 m,使得 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的充分条件

⑵反证:设“$2x+m<0$” 是“$x^2-2x-3>0$”的必要条件 $\Leftrightarrow B\subseteq A$

$\Leftrightarrow B=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)\subseteq A=\left(-\infty,-\dfrac{m}{2}\right)$

如 $x=4+\dfrac{|m|}{2}\in B$,但 $x=4+\dfrac{|m|}{2}\notin A$ 矛盾

不存在实数 m,使得 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的必要条件

7、(D)

8、(B)

9、(D)

10、(B)

11、(C)

12、解:线段 $MN:x+y=3$

$\begin{cases} y=-x^2+mx-1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+4=0$ 在 $[0,3]$ 上有两个不相等的实数

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<\dfrac{m+1}{2}<3 \\ \Delta=(m+1)^2-16>0 \\ 3^2-3(m+1)+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m\leq \dfrac{10}{3}$$

13、m≥0

14、用反证法证明:不存在整数 m,n 使得 $m^2=n^2+2014$

解:(反证法) 设存在整数 $m,n,m,n\in Z$ 使得 $m^2=n^2+2014$

则 $m^2-n^2=2014 \Leftrightarrow (m+n)(m-n)=2014=2\times1007$

⑴ m,n 都是奇数或都是偶数 $\Rightarrow m+n$ 和 $m-n$ 都是偶数 $\Rightarrow (m+n)(m-n)$ 为 4 的整数倍

但 $2014=2\times1007$ 是 2 的整数倍不是 4 的整数倍 $\Rightarrow m^2-n^2\neq2014$

⑵ m,n 为一个奇数、一个偶数 $\Rightarrow m+n$ 和 $m-n$ 都是奇数 $\Rightarrow (m+n)(m-n)$ 为奇数

$\Rightarrow m^2-n^2\neq2014$

$\therefore$ 不存在整数 m,n 使得 $m^2=n^2+2014$

随堂练习：

1、（1）对任意实数 x 都有 $x^2=1$：______至少有一个实数 x 使 $x^2\neq1$；

（2）线段 AB 与 CD 平行且相等：____________;线段 AB 与 CD 要么不平行要么不相等

2、（1）对于实数 $x,y,p:(x-1)^2+(y-2)^2=0$ 是 $q:(x-1)(y-2)=0$ 的 充分非必要 条件;

（2）设 $x,y\in R$, 则 $x^2+y^2<1$ 是 $|x|+|y|<1$ 的_必要非充分____________条件；

（3）“$a+b$ 是偶数”的__充分非必要___________条件是：“a 和 b 都是偶数”

3、C

4、D

5、a＜0

6、3

7、充分不必要条件

8、$-\frac{1}{2}\leq \mathrm{m}\leq 0$

第 3 讲

1、（1）$\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$；

（2）⑴⑵⑷

（3）$f(n)<\phi(n)<g(n)$

（4）若 $0<\dfrac{b}{a}<\dfrac{d}{c}$，则 $\dfrac{a}{a+b}>\dfrac{c}{c+d}$；

（5）若 $a,b\in R, a>|b|$，那么 $a^n>b^n\left(n\in N^*, n\geq2\right)$

（6）-4

2、解：$1\leq a\leq b+c<a+1\Rightarrow 1+a\leq 2a, b\leq c\Rightarrow 2b\leq b+c<1+a\leq 2a\Rightarrow b<a$

3、解：$a>0,b>0,a>\dfrac{1}{x}>-b\Leftrightarrow a>\dfrac{1}{x}>0$ 或 $0>\dfrac{1}{x}>-b$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{a}$ 或 $x<-\frac{1}{b}$ $\therefore a>0,b>0,a>\frac{1}{x}>-b \Leftrightarrow x>\frac{1}{a}$ 或 $x<-\frac{1}{b}$（$a>0,b>0$）

4、解：$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{(b+m)a}{(a+m)a}-\frac{b(a+m)}{a(a+m)}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}>0$ $\qquad \therefore \frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$

5、解：$a^4-b^4-4a^3(a-b)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-4a^3(a-b)$

$=(a-b)\left[(a+b)(a^2+b^2)-4a^3\right]=(a-b)\left[ab^2+a^2b+b^3-3a^3\right]$

$=(a-b)\left[ab^2-a^3+a^2b-a^3+b^3-a^3\right]=(a-b)\left[a(b^2-a^2)+a^2(b-a)+(b^3-a^3)\right]$

$=-(a-b)^2\left[a(b+a)+a^2+(b^2-ab+a^2)\right]=-(a-b)^2(3a^2+b^2)\le 0$

$\therefore a^4-b^4\le 4a^3(a-b)$ 当且仅当 $a=b$ 时取“=” 号

6、B

7、解：$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right|=\frac{\left|x_1^2-x_2^2\right|}{\left|\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right|}=\frac{|x_1-x_2||x_1+x_2|}{\left|\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right|}$

$\therefore \frac{\left|f(x_1)-f(x_2)\right|}{|x_1-x_2|}==\frac{|x_1+x_2|}{\left|\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right|}\le\frac{|x_1|+|x_2|}{\left|\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right|}<1$

由此得 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<|x_1-x_2|$

8、解：$a+b\in(44,94),a-b\in(-40,10),\frac{a}{b}\in\left(\frac{1}{3},\frac{17}{12}\right)$

9、解：$\begin{cases} f(1)=a+b \\ f(-1)=a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{f(1)+f(-1)}{2} \\ b=\frac{f(1)-f(-1)}{2} \end{cases}$

$f(-2)=4a-2b=2(f(1)+f(-1))-(f(1)-f(-1))=f(1)+3f(-1)$

$\because 1\le f(-1)\le 2, 2\le f(1)\le 4 \therefore 5\le f(1)+3f(-1)\le 10 \Rightarrow f(-2)\in[5,10]$

10、⑴证明：$a\approx\sqrt{2},b=1+\frac{1}{1+a}$

$\Rightarrow b-\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+a}-\sqrt{2}=\frac{(1-\sqrt{2})(1+a)+1}{1+a}=\frac{(1-\sqrt{2})a+2-\sqrt{2}}{1+a}$

$=\frac{(1-\sqrt{2})(a-\sqrt{2})}{1+a}\Rightarrow(a-\sqrt{2})(b-\sqrt{2})=\frac{(1-\sqrt{2})(a-\sqrt{2})^2}{1+a}<0$

$\therefore \sqrt{2}$ 介于 a,b 之

⑵ $b-\sqrt{2}=\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(a-\sqrt{2}\right)}{1+a}\Rightarrow\dfrac{\left|b-\sqrt{2}\right|}{\left|a-\sqrt{2}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1+a}<1\Rightarrow\left|b-\sqrt{2}\right|<\left|a-\sqrt{2}\right|$

所以 b 更接近于 $\sqrt{2}$

⑶由 $\left(2\right)$ 知可取 $c=1+\dfrac{1}{1+b}$

回家作业

1、4

2、D

3、C

4、（1）＞

（2）＜

5、充分非必要条件

6、-4＜x-y＜1

7、$-\frac{3}{2}<\frac{x}{y}<-\frac{1}{4}$

8、$-270^{\circ}<2\alpha-\beta<90^{\circ}$

9、（3）

10、-5＜3a-ba＜4

11、略

第 4 讲

1.答案：D

2．答案．D

3．答案．C

4.**(1)解：** $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0\Rightarrow\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}<0\Rightarrow(x-3)(x-2)(x-3)(x+1)<0$

$\Rightarrow x\in\left(-1,1\right)\cup\left(2,3\right)$

所以原不等式的解集为：$\left(-1,1\right)\cup\left(2,3\right)$

2)解：
$$\frac{2x+1}{x-3}>\frac{2x+1}{3x-2}\Rightarrow\frac{(2x+1)^2}{(x-3)(3x-2)}>0\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(3x-2)>0\\ 2x+1\neq 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(3,+\infty)$$

所以原不等式的解集为：$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(3,+\infty)$

5、（1，4）

6、a=3,b=-10

7、a⩾2

8、（1）（$-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$）

（2）（-3，0）

9、（$-\infty$，$\frac{1}{2}$]∪[2，$+\infty$）

10、a=-3,b=-4

11、解：$M\subseteq$［1，4］有 n 种情况：其一是 $M=\varnothing$，此时$\Delta<0$；其二是 $M\neq\varnothing$，此时$\Delta>0$，分三种情况计算 a 的取值范围.

设 $f(x)=x^2-2ax+a+2$，有$\Delta=(-2a)^2-(4a+2)=4(a^2-a-2)$

(1)当$\Delta<0$ 时，$-1<a<2$，$M=\varnothing\subsetneq$［1，4］

(2)当$\Delta=0$ 时，$a=-1$ 或 2.当 $a=-1$ 时 $M=\{-1\}$哪［1，4］；当 $a=2$ 时，$m=\{2\}\subsetneq$［1，4］.

(3)当$\Delta>0$ 时，$a<-1$ 或 $a>2$.设方程 $f(x)=0$ 的两根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，那么 $M=$［x_1，x_2］，

$M\subseteq$［1，4］$\Leftrightarrow 1\le x_1<x_2\le 4\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)>0,且f(4)>0\\ 1\le a\le 4,且\Delta>0\end{cases}$

即$\begin{cases}-a+3>0\\ 18-7a>0\\ a>0\\ a<-1或a>2\end{cases}$，解得：$2<a<\frac{18}{7}$，

∴$M\subseteq$［1，4］时，a 的取值范围是$(-1，\frac{18}{7})$.

12、解：不等式 $ax^2-(2a+1)x+2<0$，即$(ax-1)(x-2)<0$.

(1)当 $a>0$ 时，不等式可以化为$\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)<0$.

①若 $0<a<\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{a}>2$，此时不等式的解集为$\left(2，\frac{1}{a}\right)$；

②若 $a=\frac{1}{2}$，则不等式为$(x-2)^2<0$，不等式的解集为$\varnothing$；

③若 $a>\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{a}<2$，此时不等式的解集为$\left(\frac{1}{a}，2\right)$.

(2)当 $a=0$ 时，不等式即$-x+2<0$.此时不等式的解集为(2，$+\infty$).

(3)当 $a<0$ 时，不等式可以化为$\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)>0$.由于$\frac{1}{a}<2$，故不等式的解集为$\left(-\infty，\frac{1}{a}\right)\cup$(2，+∞).

综上所述：当 $a<0$ 时，不等式的解集为$\left(-\infty，\frac{1}{a}\right)\cup(2，+\infty)$；当 $a=0$ 时，不等式的解集为(2，+∞)；当 $0<a<\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\left(2，\frac{1}{a}\right)$；当 $a=\frac{1}{2}$时，不等式的解集为∅；当 $a>\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\left(\frac{1}{a}，2\right)$.

13、

$a\leq-\frac{3}{2}$时,$x\in\emptyset$

$-\frac{3}{2}<a\leq 2$ 时,$x\in\left(-\frac{3}{2},a\right)$

$a>2$ 时,$x\in(-\frac{3}{2},2)$

14、(-3，-1)∪(2，4)

随堂练习：

1、 a=4,b=3

2、 (-3，0]

3、 $(-\infty，-1]\cup\left[\frac{2}{3}，\frac{3}{4}\right)\cup(3，+\infty)$

4、 (2.3)

5、 $[1，2)$

6、 $(-\infty，-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{5}，+\infty)$

7、 -3⩽a＜2

8、 [3，+∞)

9、 m⩾1

10、-2⩽a＜1

第 5 讲

1.答案：D

2．答案．D

3．答案．C

4.**(1)**解：$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0 \Rightarrow \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}<0 \Rightarrow (x-3)(x-2)(x-3)(x+1)<0$

$\Rightarrow x \in (-1,1) \cup (2,3)$

所以原不等式的解集为：$(-1,1) \cup (2,3)$

2)解：$\dfrac{2x+1}{x-3} > \dfrac{2x+1}{3x-2} \Rightarrow \dfrac{(2x+1)^2}{(x-3)(3x-2)} > 0 \Rightarrow \begin{cases}(x-3)(3x-2)>0 \\ 2x+1 \neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow x \in \left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right) \cup (3,+\infty)$

所以原不等式的解集为：$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right) \cup (3,+\infty)$

5. $\left[-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2},4\right]$

6. 原不等式的解集为$\{x|-3<x<2\}$。

7. $\{x \mid x>3\} \cap \{x \mid x>\dfrac{1}{2}\} = \{x \mid x>3\}$

8 .解：$\dfrac{x-a}{x-a^2}<0 \Rightarrow (x-a)(x-a^2)<0$

$\because a^2-a=a(a-1)$

当$a>1$或$a<0$时，$a^2>a$，则不等式的解集为(a,a^2)

当$0<a<1$时，$a^2<a$，则不等式的解集为(a^2,a)

当$a=0$或$a=1$时，不等式的解集为$\varnothing$

9 、解：对于任意实数x恒有$x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$

所以原不等式等价于$(3-m)x^2+(2-m)x+(2-m)>0$

即$(3-m)x^2+(2-m)x+(2-m)>0$ 的解集为$x \in R$

$$\begin{cases} 3-m>0 \\ \Delta=(2-m)^2-4(3-m)(2-m)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<3 \\ 3m^2-16m+20>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m<3 \\ m<2\text{或}m>\dfrac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow m<2$$

当$m=3$时不等式为$-x-1>0$不满足解集为 **R**

所以$m<2$

因为$m\in N^*$，则$m=1$

１０、$a=-3$

１１.解：$M\subseteq$［1，4］有 n 种情况：其一是 $M=\varnothing$ ，此时$\varDelta$＜0；其二是 $M\neq\varnothing$ ，此时$\varDelta$＞0，分三种情况计算 a 的取值范围.

设$f(x)=x^2-2ax+a+2$，有$\varDelta=(-2a)^2-(4a+2)=4(a^2-a-2)$

(1)当$\varDelta$＜0 时，$-1<a<2$，$M=\varnothing\subsetneq$［1，4］

(2)当$\varDelta$=0 时，$a=-1$ 或 2.当 $a=-1$ 时 $M=\{-1\}$哪［1，4］；当 $a=2$ 时，$m=\{2\}\subsetneq$［1，4］.

(3)当$\varDelta$＞0 时，$a<-1$ 或 $a>2$.设方程 $f(x)=0$ 的两根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，那么 $M=$［x_1，x_2］，

$M\subseteq$［1，4］$\Leftrightarrow 1\le x_1<x_2\le 4\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)>0,\text{且}f(4)>0\\1\le a\le 4,\text{且}\Delta>0\end{cases}$

即$\begin{cases}-a+3>0\\18-7a>0\\a>0\\a<-1\text{或}a>2\end{cases}$，解得：$2<a<\dfrac{18}{7}$，

∴$M\subseteq$［1，4］时，a 的取值范围是$\left(-1,\ \dfrac{18}{7}\right)$.

１２．**解**：不等式 $ax^2-(2a+1)x+2<0$，即$(ax-1)(x-2)<0$.

(1)当 $a>0$ 时，不等式可以化为$\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2)<0$.

①若 $0<a<\dfrac{1}{2}$，则$\dfrac{1}{a}>2$，此时不等式的解集为$\left(2,\ \dfrac{1}{a}\right)$；

②若 $a=\dfrac{1}{2}$，则不等式为$(x-2)^2<0$，不等式的解集为$\varnothing$；

③若 $a>\dfrac{1}{2}$，则$\dfrac{1}{a}<2$，此时不等式的解集为$\left(\dfrac{1}{a},\ 2\right)$.

(2)当 $a=0$ 时，不等式即$-x+2<0$.此时不等式的解集为$(2，+\infty)$.

(3)当 $a<0$ 时，不等式可以化为$\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2)>0$.由于$\dfrac{1}{a}<2$，故不等式的解集为$\left(-\infty,\ \dfrac{1}{a}\right)\cup(2，+\infty)$.

综上所述：当 $a<0$ 时，不等式的解集为$\left(-\infty,\ \dfrac{1}{a}\right)\cup(2，+\infty)$；当 $a=0$ 时，不等式的解集为$(2，+\infty)$；当 $0<a<\dfrac{1}{2}$时，不等式的解集为$\left(2,\ \dfrac{1}{a}\right)$；当 $a=\dfrac{1}{2}$时，不等式的解集为$\varnothing$；当 $a>\dfrac{1}{2}$时，不等式的解集为$\left(\dfrac{1}{a},\ 2\right)$.

１３.（B）

14. $a\in[0,1]$

第 6 讲

1.C

2. C

3. A

4.－2

5. C

6. C

7 . (1)B (2)16

8 . D

９. D.

１０. D.

１１. －4.

１２. 证明 (1)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a+b}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$,

∵$a+b=1$，$a>0$，$b>0$，

∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2+2=4$,

∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$(当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时等号成立).

(2)方法一 ∵$a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

∴$1+\frac{1}{a}=1+\frac{a+b}{a}=2+\frac{b}{a}$,

同理，$1+\frac{1}{b}=2+\frac{a}{b}$, ∴$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)=5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 5+4=9$.

∴$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 9$(当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时等号成立).

方法二 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$.

由(1)知，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$，故$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 9$.

１３. 解：(1)证明：$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)(x+y)=a^2+b^2+a^2\frac{y}{x}+b^2\frac{x}{y}\geqslant a^2+b^2+2\sqrt{a^2\frac{y}{x}\cdot b^2\frac{x}{y}}=(a+b)^2$,

故$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geqslant\frac{(a+b)^2}{x+y}$，当且仅当 $a^2\frac{y}{x}=b^2\frac{x}{y}$，即$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$时上式取等号.

(2)由(1)得 $f(x)=\frac{2^2}{2x}+\frac{3^2}{1-2x}\geqslant\frac{(2+3)^2}{2x+(1-2x)}=25$，

当且仅当 $\frac{2}{2x}=\frac{3}{1-2x}$，即 $x=\frac{1}{5}$ 时上式取最小值，即 $f(x)_{\min}=25$.

１４．解：设画面高为 x 厘米，则宽为 $\frac{4840}{x}$ 厘米。依题意得

$$S=(x+16)\left(\frac{4840}{x}+10\right)\qquad=5000+\left(10x+\frac{4840\cdot 16}{x}\right)$$

$\geq 5000+2\sqrt{10x\cdot\frac{4840\cdot 16}{x}}=6760$。

当且仅当 $x=88$，时，S 最小。答:高为 88 厘米，宽为 55 厘米。

15 $[9,+\infty)$;

16. $2^x+4^y=2^x+2^{2y}\geq 2\sqrt{2^x\bullet 2^{2y}}=2\sqrt{2}$；　　.

第 7 讲

1. 证明:∵$a^x>0$, $a^y>0$

$\therefore \frac{a^x+a^y}{2}\geq\sqrt{a^xa^y}=a^{\frac{x+y}{2}}$　　①

由已知 $y=-x^2$ 代入①式右边得:

$a^x+a^y\geqslant 2a^{\frac{-x^2+x}{2}}$

∵$0<a<1$,由对数函数的性质可知:

$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a(2a^{\frac{-x^2+x}{2}})$

$=\log_a 2+\frac{-x^2+x}{2}$

$=\log_a 2-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}$　　②

∵①②两式中等号成立的条件是:

$\begin{cases}a^x=a^y\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$ 这与已知 $x^2+y=0$ 矛盾.

∴①②两式中等号不同时成立.

故 $\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}$ 成立.

2. 证明:假设三式均大于 $\frac{1}{4}$,即

$$\begin{cases}(1-a)b>\dfrac{1}{4}\\(1-b)c>\dfrac{1}{4}\\(1-c)a>\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

∵0<a<1, ∴1−a>0

$$\therefore \frac{1-a+b}{2}\geq\sqrt{(1-a)b}>\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

即 1−a+b>1

∴b−a>0　　①

同理可证:c−b>0　　②

a−c>0　　③

由①+②+③得:0>0, 矛盾.

所以假设不成立, 故原命题成立.

3.比较做差 $x^3+y^3-x^2y-xy^2=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x^2-y^2)(x-y)\geq 0$

4. 求证: $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2$

证: $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

$$\therefore \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$$

5. 证明:(1)当 n=1 时, 左边=$\dfrac{a+b}{2}$, 右边=$\dfrac{a+b}{2}$

∴不等式成立.

(2)假设当 n=k 时, 不等式成立, 即 $\dfrac{a^k+b^k}{2}\geq(\dfrac{a+b}{2})^k$. 则当 n=k+1 时,

$$\frac{(a+b)^{k+1}}{2}=(\frac{a+b}{2})^k\cdot\frac{a+b}{2}\leq\frac{a^k+b^k}{2}\cdot\frac{a+b}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k)$$

∵$(a^{k+1}+b^{k+1})-(a^kb+ab^k)=(a-b)(a^k-b^k)$

又 a>0, b>0

∴$(a-b)(a^k-b^k)\geqslant 0$

∴$a^kb+ab^k\leqslant a^{k+1}+b^{k+1}$

$$\therefore \frac{(a+b)^{k+1}}{2}\leq\frac{1}{4}(a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k)\leq\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}.$$

∴$n=k+1$ 时, 不等式也成立.

由(1)(2)得, 对于 $n\in N^*$有 $\frac{a^n+b^n}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^n$.

6. 证：∵$n>2$ ∴ $\log_n(n-1)>0,\quad \log_n(n+1)>0$

$$∴\log_n(n-1)\log_n(n+1)<\left[\frac{\log_n(n-1)+\log_n(n+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{\log_n(n^2-1)}{2}\right]^2$$

$$<\left[\frac{\log_n n^2}{2}\right]^2=1$$

∴$n>2$ 时, $\log_n(n-1)\log_n(n+1)<1$

7. 证明：∵ $xy>0$

∴ $\frac{y}{x},\frac{x}{y}$ 都大于零

∴ $xy+\frac{1}{xy}\geqslant 2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{xy}}=2$, 当且仅当 $xy=1$ 时取"="号.

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2$, 当且仅当 $\frac{y}{x}=1$ 时取"="号.

由不等式的性质定理的推论，得

$xy+\frac{1}{xy}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 4$

8. 证：记 $m=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$ ∵$a, b, c, d\in R^+$

$$∴m>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+a}+\frac{c}{c+d+a+b}+\frac{d}{d+a+b+c}=1$$

$m<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+c}=2$ ∴$1<m<2$ 即原式成立。

第 8 讲

一、知识梳理：

1、函数的概念：在一个变化过程中有两个变量 x、y, 如果对于 x 在某个实数集 D 内的

任意一个值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的值与它对应,那么 y 就叫做 x 的函数 ,记做 $y=f(x)$,$x\in$D，x 叫做自变量,x 的取值范围，D 叫做函数的定义域，和 x 值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

2、对函数概念的理解：

(1)函数的三要素：⑴ 对应法则、⑵ 定义域、⑶ 值域。

(2)函数的表示方法：⑴解析法、⑵列表法、⑶图像法。

3、求函数的定义域时一般应考虑： 1、问题的实际背景；2、解析式要有意义.

一般地，如果 f（x）是整式,那么函数的定义域是 R;

如果 f（x）是分式,那么函数的定义域是使分母非零的实数的集合;

如果 f（x）是偶次根式,那么函数的定义域是使根号内的式子非负的实数的集合

如果 f（x）是由几个部分的数学式子构成,那么函数的定义域是使每个部分都有意义的实数集合的交集.

4、建立函数关系的基本步骤：

1、分析题意设出两个变量；

2、列出等量关系；

3、等式变形得出函数解析式；

4、根据问题的实际意义给出函数的定义域；

5、两个函数的和、积的定义

（1）两个函数和的定义：一般地，已知两个函数 $y=f\left(x\right)\left(x\in D_1\right), y=g\left(x\right)\left(x\in D_2\right)$，设 $D=D_1\bigcap D_2$，并且 D 不是空集，那么当 $x\in D$ 时，$y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ 都有意义。于是把函数 $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)\ x\in D$ 叫做函数 $y=f\left(x\right)与y=g\left(x\right)$ 的和。

类比两个函数的和的定义，我们也可以求两个函数的积。

（2）两个函数积的定义：

两个函数积的定义：已知两个函数 $y=f\left(x\right)\left(x\in D_1\right), y=g\left(x\right)\left(x\in D_2\right)$，设 $D=D_1\bigcap D_2$，并且 D 不是空集，那么当 $x\in D$ 时，$y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ 都有意义。于是把函数 $y=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\ x\in D$ 叫做函数 $y=f\left(x\right)与y=g\left(x\right)$ 的积。

6、(1)确定函数的值域：遵循定义域优先的原则.

(2) 求值域的方法有：观察法、配方法、换元法、不等式法、反解法、判别式法、单调函数法、数形结合法、综合法等。

三、典型例题

（一）求函数的定义域

1．函数 $y=\sqrt{-x^2-3x+10}$ 的定义域是______________。$\left[-5,2\right]$，

2．函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{1-x^2}$ 的定义域为________________。$\left(-\infty,-1\right)\bigcup\left(-1,\dfrac{2}{3}\right]$

3．已知 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -1\\ x^2, & -1<x<2\\ 2x, & x\ge 2\end{cases}$，则 $f(-3)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)+f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 的值是____________。$\dfrac{25}{4}$

4．函数 $y=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+a}}$ 的定义域为 M，若 $3\notin M$，则实数 a 的取值范围是_$\left(-\infty,-3\right]$。

5．若函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2^{x^2+2ax-a}-1}$ 定义域为 R，则实数 a 的取值范围是__$\left[-1,0\right]$

6、设 $x\in\left(-1,1\right)$，则 函数 $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为__$\left(-2,-1\right)\bigcup\left(1,2\right)$

7、已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{4}{|x|+2}-1$ 的定义域为 $\left[a,b\right],a,b$ 为整数，值域为 $\left[0,1\right]$，则满足条件的整数对 $\left(a,b\right)$ 共有_________5____对

（二）求函数值

1、若函数 $f\left(2x+1\right)=x^2-2x,$ 则 $f\left(3\right)=$_______ -1

2、已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+2 & x<1\\ x^2+ax & x\geq 1\end{cases}$，若 $f\left[f\left(0\right)\right]=4a,$ 则实数 $a=$_______ 2

3、函数 $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+x+2}$ 的最小值是____ 0 ______,最大值是___________ $\dfrac{3}{2}$

4、函数 $f\left(x\right)=ax^2+2ax+1\left(a>0\right)$ 在区间 $\left[-3,2\right]$ 上的最大值为 4 ,则 $a=\dfrac{3}{8}$

5、已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M, 最小值为 m，则 $\dfrac{m}{M}$ 的值为___ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6、函数 $f\left(x\right)=x^2+\sqrt{x^2-1}$ 的最小值是__________ 1

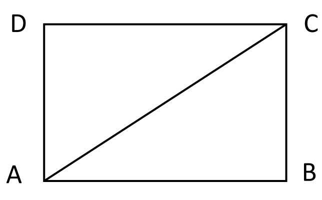
（三）求函数的关系式

1、设函数 $f(x)=3x,g(x)=\sqrt{2-x}$，则（1）$f(1)+g(1)=$_________；4
（2）
$f(x)+g(x)=$___________ $3+\sqrt{2-x}\left(x\leq 2\right)$

2、设函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2},g(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$，求 $f(x)\bullet g(x)=\sqrt{x-1},x\in\left(1,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

3、已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$, 求 $f(x)=2x+7$。

4. 已知：长方形 ABCD 中，AB=4，BC=3，动点 P 从点 A 出发，沿长方形的边运动，经过点 B，点 C，点 D，最后回到 A 点。设点 P 到对角线 AC 的距离为 y，点 P 所经过的路程为 x，求 y 关于 x 的函数关系式，并画出其图像。



$$y=\begin{cases}\dfrac{3}{5}x,\text{当}x\in[0,4];\\ \dfrac{4}{5}(7-x),\text{当}x\in(4,7];\\ \dfrac{3}{5}(x-7),\text{当}x\in(7,11];\\ \dfrac{4}{5}(14-x),\text{当}x\in(11,14].\end{cases}$$，图略。

应纳税收入额（元）	税率（%）

3．我国2006年1月1日起，个人所得税法规定：
（1）个人每月的工资薪水收入中，1600元为免税收入，其余部分为应纳税收入；
（2）税率按应纳税收入额规定如下：

[0, 500]	5
(500, 2 000]	10
(2 000, 5 000]	15
(5 000, 20 000]	20
(20 000, 40 000]	25
(40 000, 60 000]	30
(60 000, 80 000]	35
(80 000, 100 000]	40
>100 000	45

问：（1）小明、小强和小红的爸爸每月工资分别为1500元、2500元和3500元，问他们每月应交纳多少个人所得税。
（2）写出纳税额 y 与个人收入 x（x 不超过3600元）的函数关系。

（1）0 元、65 元和 165 元；
（2）

$$y=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1600\\ (x-1600)\cdot 5\%, & 1600<x\le 2100\\ 25+(x-2100)\cdot 10\%, & 2100<x\le 3600\end{cases}$$

课堂练习

1．若函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{4-x^2}$，则函数 $f(x)+g(x)$=____________。

2．若函数 $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+10}}$，则函数 $f(x)g(x)$=____________。

3.（1）作出函数 $y=2x+\dfrac{1}{x}$ 的大致图像；

（2）作出函数 $y=2x-\dfrac{1}{x}$ 的大致图像。

4．备收人们关注的大型影片《哈里波特》即将在华天影院放映。该影院共有 1000 个座位，票价不分等次，根据该影院的经验：当每张票价不超过 10 元时，票可全部售出；当每张票价高于 10 元时，每提高 1 元，将有 30 张票不能售出。为了获得更好的收益，须给影院定一个合适的票价，符号的基本条件是：(1）为方便找零和算帐，票价定为 1 元的整数倍；(2）票价不得高于 25 元；(3）影院放映一场电影的成本费用支出为 5750 元，票房收入必须高于成本支出，用 x（元）表示每张票价，用 y（元）表示给影院放映一场电影的净收入（除去成本费用后的收入）。把 y 表示为 x 的函数，并求其定义域。

$$y=\begin{cases}1000x-5750, & 6\le x\le 10, x\in N^*\\ -30x^2+1300x-5750, & 10<x\le 25, x\in N^*\end{cases}$$

课后作业

一、填空题

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}x-3,(x\ge 10)\\ f(f(x+5)),(x<10)\end{cases}$，则 $f(5)$ 的值为___________。8

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+5x-1, & x\le 3\\ |x-1|, & x>3\end{cases}$，则 $f(x)\le 1$ 的解集为_$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,3]$___。

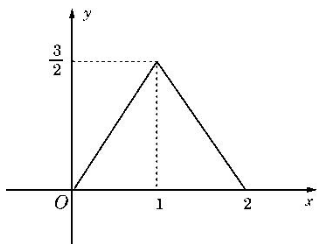
3．某中学的高一学生进行野外生存训练，从甲地步行到乙地。已知甲乙两地相距 32 千米，在前 3 小时内学生们每小时走 4 千米，随后以每小时 5 千米的速度一直走到乙地。则他们离

开甲地的距离为s（千米）与所用时间t（时）的函数关系式为__ $s=\begin{cases}4t, & 0\le t\le 3\\ 5t-3, & 3<t\le 7\end{cases}$ ____。

4．某地区住宅电话费收费标准为：接通后 3 分钟内（含 3 分钟）收费 0.20 元，以后每分钟（不足一分钟按一分钟计）收费 0.10 元，如果一次通话t分钟，则通话费y（元）关于通话时间t（分钟）的函数关系式是____________。$y=\begin{cases}0.2, & 0<t\le 3\\ 0.1t-0.1, & t>3\end{cases}$

5．对于$a,b\in R$，若$\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & a\ge b\\ b, & a<b\end{cases}$，将函数$f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\},\quad x\in R$

写成分段函数为$f(x)$=____________。$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\le\dfrac{1}{2}\\ x+1, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$



二、选择题

6．图中的图象所表示的函数的解析式为（ **B** ）

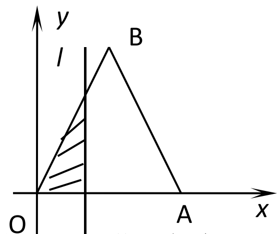
(A) $y=\dfrac{3}{2}|x-1|$ (0≤x≤2) (B) $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}|x-1|$ (0≤x≤2)

(C) $y=\dfrac{3}{2}-|x-1|$ (0≤x≤2) (D) $y=1-|x-1|$ (0≤x≤2)

三、解答题

7．如图，△OAB 是边长为 2 的正三角形，这个三角形在直线$l:x=t(0\le t\le 2)$的左方被截得图形的面积为S，求函数$S=f(t)$的解析式及定义域.

7. $S=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2, & 0\le t\le 1\\ \sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-t)^2, & 1<t\le 2\end{cases}$

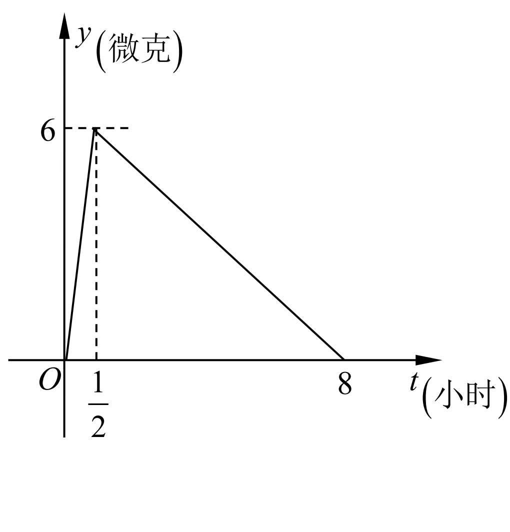


8．某医药研究所开发一种新药，如果成人按规定的剂量服用，据监测，服药后每毫升血液中的含药量y与时间t之间近似满足如图所示的直线段：

(1) 写出服药后y与t之间的函数关系式；

(2) 据测定：每毫升血液中含药量不少于4微克时治疗疾病有效，假若某病人一天中第一次服药时间为$7:00$，求一天中第三次服药的最佳时间。

8.（1） $y=\begin{cases}12t, & 0\le t\le\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{4}{5}t+\dfrac{32}{5}, & \dfrac{1}{2}<t\le 8\end{cases}$，**（2）** 14 点



第 9 讲

二、知识梳理：

㈠　**函数奇偶性**

1、函数奇偶性的定义：一般地，对于函数 $f\left(x\right)$

（1）如果对于定义域 D 内的任意 x，都有 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，那么函数 $f\left(x\right)$ 叫做偶函数。

（2）如果对于定义域 D 内的任意 x，都有 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，那么函数 $f\left(x\right)$ 叫做奇函数。

2、函数奇偶性的图像性质特征：

（1）若函数 $y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 是偶函数，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像是关于 y 轴对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 的图像是关于 y 轴对称，则函数 $y=f\left(x\right)$ 是偶函数

（2）若函数 $y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 是奇函数，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于原点对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 的图像是关于原点对称，则函数 $y=f\left(x\right)$ 是奇函数

3、判断函数 y=f(x) 的奇偶性方法：

（1）奇偶性的定义；　　　　　　　　（2）函数图像的对称性；

4、判断函数奇偶性的基本步骤.

（1）先判断定义域　　　　　　　　　（2）$f\left(-x\right)和f\left(x\right))$的关系；

三、典型例题

(一）奇偶函数定义

1、若 $f\left(x\right)$ 为奇函数，则 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=$__________ 0

2、若 $f\left(x\right)$ 为偶函数，则 $f\left(\sqrt{2}+1\right)-f\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\right)=$__________ ;0

3、已知 $f\left(x\right)=ax^2+bx+3a+b$ 为偶函数，且定义域为 $\left[a-1,2a\right]$，则 $a=\dfrac{1}{3},b=0$

4、若 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}+a$ 是奇函数，则实数 $a=-\dfrac{1}{2}$__________.

5、若 $f\left(x\right)$ 是 R 上的奇函数，则函数 $y=f\left(2x-1\right)+1$ 的图像必过定点__________ $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

6、已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+ax$ $(a\in R)$，且 $f(2)=6$，则 $a=$______. $a=1$

7、设 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的函数，当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=x^2-2x,$

当 $f\left(x\right)$ 为奇函数时，$f\left(x\right)$ 的解析式是 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2-2x & x<0\\ x^2-2x & x\geq 0\end{cases}$

当 $f\left(x\right)$ 为偶函数时，$f\left(x\right)$ 的解析式是 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2x & x<0\\ x^2-2x & x\geq 0\end{cases}$，

（二）如何判断函数的奇偶性

8、判断下列函数的奇偶性

（1）$f\left(x\right)=\left(x-1\right)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;　非奇非偶函数　　　　（2）$f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\left|x+2\right|-2}$;奇函数

（3）$f\left(x\right)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$； 奇函数 （4）$f\left(x\right)=\begin{cases}-x\left(1-x\right) & x<0\\ x\left(1+x\right) & x>0\end{cases}$；偶函数

（5）$f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$；奇函数

（三）函数的奇偶性的应用

9、已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)$ 的值为______-26

10、 下面四个结论中，正确命题的个数是（ ） A

①偶函数的图象一定与 y 轴相交 ②奇函数的图象一定通过原点

③偶函数的图象关于 y 轴对称 ④既是奇函数，又是偶函数的函数一定是 $f(x)=0(x\in R)$

A．1 B．2 C．3 D．4

11、若 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，$x>0$ 时，$f(x)$ 为增函数．若 $x_1<0,x_2>0$，且 $|x_1|<|x_2|$，则（ ） B

A．$f(-x_1)>f(-x_2)$ B．$f(-x_1)<f(-x_2)$

C．$-f(x_1)>f(-x_2)$ D． $-f(x_1)<f(-x_2)$

12、直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点，则 a 的取值范围是 （ ） C

A． $(1,+\infty)$ B． $(0,1)$ C． $(1,\frac{5}{4})$ D． $(-\infty,\frac{5}{4})$

13、设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，$g(x)$ 是 R 上的偶函数，若函数 $f(x)+g(x)$ 的值域为 $[1,3)$，则 $f(x)-g(x)$ 的值域为_______________. $\left(-3,-1\right]$

14、设 a 为非零实数，偶函数 $f(x)=x^2+a|x-m|+1\,(x\in R)$ 在区间 $(2,3)$ 上存在唯一零点，则实数 a 的取值范围是______________. $\left(-\frac{10}{3},-\frac{5}{2}\right)$

15、设 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，并且在 $(-\infty,0]$ 上为增函数，

若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$ 成立，则实数 a 的取值范围是____. $\left(0,3\right)$

16、已知 $f(x)$ 是偶函数， $g(x)$ 是奇函数，且 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}\ (x\neq\pm1)$，则 $g(x)=$ ____________。$g\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2-1}\left(x\neq\pm1\right)$

随堂练习

1、奇函数 $f(x)$ 定义域是 $(t,2t+3)$, 则 $t=$ ________ , -1

2、已知 $f(x)$ 为 R 上奇函数，$x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$, 则 $f(x)$ 的解析式为

$$f(x)=\begin{cases} x\left(1+\sqrt[3]{x}\right) & x>0 \\ x\left(1-\sqrt[3]{x}\right) & x<0 \end{cases}$$

3、已知 $f(x)$ 为偶函数，$x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x+\dfrac{4}{x}$, 当 $x\in[-3,-1]$ 时，记 $f(x)$ 的最大值为 m , 最小值为 n , 则 $m-n=$ ________ , 1

4、已知 $f(x),g(x)$ 为 R 上奇函数, 已知 $f(x)>0$ 的解集为为 (a^2,b), $g(x)>0$ 的解集为为 $\left(\dfrac{a^2}{2},\dfrac{b}{2}\right)$ (其中 $b>2a^2$) , 则 $f(x)g(x)>0$ 解集, $\left(-\dfrac{b^2}{2},-a^2\right)\cup\left(a^2,\dfrac{b^2}{2}\right)$

5、已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数且 $f(1)=1$, 若 $g(x)=f(x)+2$, 则 $g(-1)=$ ________ -1

6、已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(x)$ 恒成立，且 $f(-1)=7$, 则 $f(7)=$ ________ 7

7、已知函数 $f(x)$ 对一切 $x,y\in R$, 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

（1）求证：$f(x)$ 为奇函数

（2）若 $f(-3)=a$, 用 a 表示 $f(12)$

（1）证明：略　　　　　　（2）$f(12)=-4a$

8、已知函数 $y=f(x)=\dfrac{bx+c}{ax^2+1}$ $(a,c\in R,a>0,b$为自然数$)$ 是奇函数，$f(x)$ 有最大值 $\dfrac{1}{2}$，且 $f(1)>\dfrac{2}{5}$. （1）试求函数 $f(x)$ 的解析式；（2）是否存在直线 l 和 $y=f(x)$ 的图像相交于 P,Q 两点, 并且使得 P,Q 两点的中点为 $(1,0)$ 点，若存在求出直线 l 的方程；若不存在, 说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

（2）设 $P(x,y)$ 则 $Q(2-x,-y)$ 则 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 且 $-y=\dfrac{2-x}{(2-x)^2+1}$

$$\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}+\frac{2-x}{(2-x)^2+1}=0\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}=\frac{x-2}{(2-x)^2+1}\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$P\left(1+\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right),Q\left(1-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

$$l:y-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{4}\left(x-1-\sqrt{2}\right)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

第 10 讲

三、知识梳理：

1．单调增函数的定义：

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I\subseteq A$．

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1， x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调递增函数，I 称为 $y=f(x)$ 的单调递增区间.；

2．单调减函数的定义：

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I\subseteq A$．

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1， x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调递减函数，I 称为 $y=f(x)$ 的单调递减区间.

3．函数单调性证明的步骤：

（1）设区间 I 内任意 $x_1,x_2,$且$x_1<x_2$；

（2） 比较 $f(x_1)$与$f(x_2)$的大小 ；

（3） $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow$ 增函数 ；　　$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow$ 减函数 ；

(4)写结论：函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增（减）。.

三、典型例题

1、函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的单调减区间是_____________。$(-\infty,-3]$

2、函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$（$a>0$）的单调增区间为__________；$(-\infty,-\sqrt{a}],[\sqrt{a},+\infty)$

单调减区间为__________。$[-\sqrt{a},0),(0,\sqrt{a}]$

3、若 $f(x)=kx^2-4x+8$ 在 $[5,20]$ 上单调递减，则实数 k 的取值范围是_$\left(-\infty,\dfrac{1}{10}\right]$

4、若 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，又 $f(-2)=0$，则 $x\cdot f(x)<0$ 的解集为_________. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

5、函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是_________.$(-\infty,-3]$

6、若 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____________$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

7、若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a、b 应满足_________________. $a>0,b\le 0$

8、若 $f(x),g(x)$ 都是 R 上的增函数，则下列命题中正确的是____________(2)

(1) $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 都是增函数;

(2) $f(x)+g(x)$ 为增函数及 $f(x)g(x)$ 增减性无法确定;

(3) $f(x)+g(x)$ 增减性无法确定及 $f(x)g(x)$ 为增函数;

(4) $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 增减性均无法确定

9、若函数 $f(x)=\begin{cases}(2a-1)x+7a-2 & (x<1)\\ a^{x} & (x\geq 1)\end{cases}$ 在 R 上单调递减，则实数 a 的取值范围是______. $\left(0,\dfrac{3}{8}\right]$

10、“$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的__条件。充分非必要条件

11、定义在 R 上的偶函数 $f\left(x\right)$ 偶函数满足：对任意的 $x_1,x_2\in\left[0,+\infty\right)\left(x_1\neq x_2\right)$，

有 $\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}<0.$ 则 (A)

(A) $f(3)<f(-2)<f(1)$　　(B) $f(1)<f(-2)<f(3)$

(C) $f(-2)<f(1)<f(3)$　　(D) $f(3)<f(1)<f(-2)$

12、若 $f\left(x\right)$ 都是 R 上的增函数，对于实数 $a,b,$ 若 $a+b>0,$ 则(A)

(A) $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$　　(B) $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$

(C) $f(a)-f(b)>f(-a)-f(-b)$　　(D) $f(a)-f(b)<f(-a)-f(-b)$

13、定义域为 R 的函数 $f(x)=ax^2+b|x|+c\ (a\neq 0)$ 有四个单调区间，则实数 a,b,c 满

（ C ）

$A.\ b^2-4ac>0$ 且 $a>0$　　$B.\ b^2-4ac>0$　　$C.\ -\dfrac{b}{2a}>0$　　$D.\ -\dfrac{b}{2a}<0$

14、12、已知函数 $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$；

（1）求出函数 $f(x)$ 的对称中心；　（2）证明：函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为减函数；

（3）是否存在负数 x_0，使得 $f(x_0)=3^{x_0}$ 成立，若存在求出 x_0；若不存在，请说明理由。

（1）$\left(-1,-1\right)$　　（2）证（略）　　（3）反证法

15、（1）定义两种运算：$a\oplus b=\sqrt{a^2-b^2}, a*b=\sqrt{(a-b)^2}$，试判断 $f(x)=\dfrac{2\oplus x}{(x*2)-2}$ 的奇偶性；

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 的单调递增区间.

（1）奇函数　　（2）单调递增区间 $\left[-1,0\right),\left(0,1\right]$

16、（2011 上海理）已知函数 $f\left(x\right)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x,$ 其中常数 a,b 满足 $ab\neq 0$。

（1）若 $ab>0,$ 判断函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $ab<0;$ 求 $f\left(x+1\right)>f\left(x\right)$ 时，x 的取值范围

解：（1）$ab>0\Leftrightarrow a>0,b>0$ 和 $a<0,b<0$

$a>0,b>0$ 时，$f\left(x\right)$ 增函数，$a<0,b<0$ 时 $f\left(x\right)$ 减函数

（2）　$a>0,b<0$ 时，$x\in\left(-\infty,\log_{\frac{2}{3}}\left(-\dfrac{2b}{a}\right)\right),$

$a<0,b>0$ 时 $x\in\left(\log_{\frac{2}{3}}\left(-\frac{2b}{a}\right),+\infty\right)$

17、(2012 上海理)已知函数 $f\left(x\right)=x^2+\frac{a}{x}\left(x\neq 0,\text{常数}a\in R\right)$。

(1)讨论函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[2,+\infty\right)$ 上为增函数，求 a 的取值范围。

(1) $a=0$ 时 $f\left(x\right)$ 为偶函数；$a\neq 0$ 时 $f\left(x\right)$ 为非奇非偶函数；

(2) $a\leq 16$

18. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数，对定义域内的任意 m,n 都有 $f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$，且当 $x>1$ 时 $f(x)>0,f(2)=1$，

(1)求证：$f(x)$ 是偶函数；　　(2) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

(3)解不等式 $f(2x^2-1)<2$

(1)略　　(2)略

(3) $x\in\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

回家作业

(一)选择题：

1、函数 $y=\left|2x-1\right|$ 的单调减区间是____________________。$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

2、若函数 $f(x)=(m-1)x^2+mx+3$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的递增区间是___ $\left(-\infty,0\right]$

3、定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $y=f(x)$ 是减函数，且是奇函数，若 $f(a^2-a-1)+f(4a-5)>0$，求实数 a 的取值范围____. $a\in\left[1,\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right)$

4、有下列几个命题：

①函数 $y=2x^2+x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是增函数；

②函数 $y=\frac{1}{x+1}$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上是减函数；

③函数 $y=\sqrt{5+4x-x^2}$ 的单调递减区间是 $[-2,+\infty)$；

④已知 $f(x)$ 在 R 上是增函数，若 $a+b>0$，则有 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$.

其中正确命题的序号是______________.④

(二)填空题：

5、下列命题中正确的命题是　(　　　) D

A. 若存在 $x_1,x_2\in\left[a,b\right]$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则函数 $y=f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上是增函数；

B. 若存在 $x_i\in[a,b]$ ($1\leq i\leq n,n\geq 2,i$、$n\in N^*$)，当 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$ 时，有

$f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)<\cdots<f(x_n)$，则说函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数；

C. 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，若对任意的 $x>0$，都有 $f(x)<f(0)$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一定是减函数；

D. 若对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$（$x_1\neq x_2$），有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数.

6、已知 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-a & (x<1)\\ \log_a x & (x\geq 1)\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，那么 a 的取值范围是（　　）D

A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,3)$　　C. $(1,3)$　　D. $[\frac{3}{2},3)$

7、函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调并且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上（　　）B

A. 至少一解　　B. 至多一解　　C. 恰有一解　　D. 无

8、设 a 为非零实数，则关于函数 $f(x)=x^2+a|x|+1$，$x\in R$ 的以下性质中，错误的是（　　）C

A. 函数 $f(x)$ 一定是个偶函数　　B. 函数 $f(x)$ 一定没有最大值

C. 区间 $[0,+\infty)$ 一定是 $f(x)$ 的单调递增区间　　D. 函数 $f(x)$ 不可能有三个零点

（三）解答题：

9、定义在 $[-2,2]$ 上的偶函数 $g(x)$，当 $x\geq 0$ 时，$g(x)$ 单调递减，若 $g(1-m)<g(m)$，求 m 的取值范围.

$m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

10、已知函数 $f(x)=x^2+(a+1)x+|a+2|\,(a\in R,\text{且}a\neq -2)$.

（1）写出一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)+h(x)$；

（2）对(1)中的 $g(x)$，命题 P：函数 $f(x)$ 在区间 $[(a+1)^2,+\infty)$ 上是增函数；命题 Q：函数 $g(x)$ 是减函数；如果命题 P、Q 有且仅有一个是真命题，求 a 的取值范围；

（3）在(2)的条件下，求 $f(2)$ 的取值范围.

（1）$g(x)=(a+1)x$，$h(x)=x^2+|a+2|$

（2）$a\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$

（3）在(2)的条件下，$f(2)$ 的取值范围（3）$f(2)\in(-\infty,\frac{7}{2})$

第 11 讲

一、知识梳理：

1、若函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 是偶函数，则函数 $y=f(x)$ 的图像是关于 y 轴对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$的图像是关于 y 轴对称，则函数$y=f\left(x\right)$ 是偶函数

2、若函数$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$是奇函数，则函数$y=f\left(x\right)$的图像关于原点对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$的图像是关于原点对称，则函数$y=f\left(x\right)$ 是奇函数

3、设函数$y=f\left(x\right),x\in D$，如果存在常数$a\neq 0,$使得对于任意$x\in D$都有

$f\left(a+x\right)=f\left(a-x\right)$恒成立, 则函数$f\left(x\right)$的图像关于直线$x=a$对称

4、函数$y=f\left(x\right),x\in D$的图像关于直线$x=a$对称的函数是：$y=f\left(2a-x\right)$

5、设函数$y=f\left(x\right),x\in D$，如果存在常数a,b使得对于任意$x\in D$都有

$f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2b$恒成立, 则函数$f\left(x\right)$的图像关于点$\left(a,b\right)$对称

6、函数$y=f\left(x\right),x\in D$的图像关于点$\left(a,b\right)$对称的函数是：$y=2b-f\left(2a-x\right)$

二、典型问题

(一) 函数图像的对称性

1、函数$f\left(x\right)=x^2+1$的图像与$g\left(x\right)$的图像关于直线$x=2$对称，则$g\left(x\right)=\left(x-4\right)^2+1$

2、函数$f\left(x\right)=2^x+1$的图像与$g\left(x\right)$的图像关于原点对称，则$g\left(x\right)=-2^{-x}-1$

3、若函数$y=x^2+\left(a+2\right)x+3,x\in\left[a,b\right]$的图像关于$x=1$对称，则$b=6$

4、设函数$y=f\left(x\right)$对任意实数x均有$f\left(2+x\right)=f\left(2-x\right)$,若方程$f\left(x\right)=0$有四个根，则这四个根之和为______________ 8

5、已知$f\left(x\right)$为定义在R上的奇函数, 且$f\left(x\right)$的图像关于直线$x=\dfrac{1}{2}$对称，则

$f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)+f\left(5\right)+f\left(6\right)=$__________ 0

6、已知$f\left(x\right),g\left(x\right)$为定义在$R$上的奇函数, 且$F\left(x\right)=af\left(x\right)+bg\left(x\right)+2$在区间$\left(0,+\infty\right)$上的最小值为5, 则在区间$\left(-\infty,0\right)$上函数$F\left(x\right)$的最大值是_______ -1

7、已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+4x & x\geq 0\\ 4x-x^2 & x<0\end{cases}$,若$f(2-a^2)>f(a)$, 则实数$a$的取值范围是（ C ）

A $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B $(-1,2)$　　C $(-2,1)$　　D $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

(二) 函数的零点

8、函数$f\left(x\right)=x^3-2x^2+3x-6$在区间$\left[-2,4\right]$上的零点所在的范围为（ D ）

（A）$\left[2.5,4\right]$　　（B）$\left[1,1.75\right]$　　（C）$\left[-2,1\right]$　　（D）$\left[1.75,2.5\right]$

9、求方程$x^2+3+\dfrac{1}{x}=0$的近似解（精确到0.01）

$$f\left(x\right)=x^2+3+\frac{1}{x}\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}>0,f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{15}{16}<0$$

$f\left(-0.3\right)=0.09+3-\dfrac{1}{0.3}=-0.2433<0$　　$f\left(-0.32\right)=0.09+3-\dfrac{1}{0.3}=-0.0226<0$

$f\left(-0.33\right)=0.07859>0\Rightarrow x=-0.33$

10. 已知二次函数$f\left(x\right)=x^2-2mx+2m+3$有两个零点.

（1）若有一个零点大于 2，另一个零点小于 2，求实数m的取值范围；

（2）若在区间$\left(-3,-2\right)$和$\left(-1,0\right)$内各有一个零点求实数m的取值范围；

（3）若在区间$\left(-2,0\right)$上只有一个零点，求实数m的取值范围；

(1) $f\left(2\right)=2^2-2m\times 2+2m+3<0\Rightarrow m>\frac{7}{2}$

(2) $$\begin{cases} f\left(-3\right)>0\Rightarrow 9+6m+2m+3>0\Rightarrow m>-\frac{3}{2} \\ f(-2)<0\Rightarrow 4+4m+2m+3<0\Rightarrow m<-\frac{7}{6} \\ f\left(-1\right)<0\Rightarrow 1+2m+2m+3<0\Rightarrow m<-1 \\ f\left(0\right)>0\Rightarrow 2m+3>0\Rightarrow m>-\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{3}{2},-\frac{7}{6}\right)$$

(3) $f\left(-2\right)f\left(0\right)<0$ 或 $\Delta=0$ $\Rightarrow\left(2m+3\right)\left(6m+7\right)<0$ 或 $\Delta=4m^2-4\left(2m+3\right)=0$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}<m<-\frac{7}{6}$

11.二次方程$x^2+kx+2k-1=0$在$\left(-2,-1\right)$和$\left(1,2\right)$内各有一个零点，求实数k的取值范围.

$$\begin{cases} f\left(-2\right)>0\Rightarrow 4-2k+2k-1>0\Rightarrow 3>0 \\ f(-1)<0\Rightarrow 1-k+2k-1<0\Rightarrow k<0 \\ f\left(1\right)<0\Rightarrow 1+k+2k-1<0\Rightarrow k<0 \\ f\left(2\right)>0\Rightarrow 4+2k+2k-1>0\Rightarrow k>-\frac{3}{4} \end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{3}{4},0\right)$$

12 关于x的方程$2mx^2-2x-3k-2=0$的两实根一个小于 1，另一个大于 1，求实数m的取值范围.

$mf\left(1\right)<0\Leftrightarrow m\left(2m-2-3k-2\right)<0\Leftrightarrow m\left(2m-3k-4\right)<0$

$k>-\frac{4}{3}$时，$m\in(0,\frac{3k+4}{2})$ $k<-\frac{4}{3}$时，$m\in(\frac{3k+4}{2},0)$ $k=-\frac{4}{3}$时，$m\in\phi$

13.方程$2mx^2-x-1=0$在$\left[-2,2\right]$内恰有一个根适合方程，求实数m的取值范围。

$x=0$时，$-1=0$无解

$$2mx^2-x-1=0\Rightarrow 2m=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=u+u^2,u\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\le 2m<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{4}\le 2m\le\frac{3}{8}\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\le m<\frac{3}{16}$$

14. 已知三次函数$f\left(x\right)=ax^3+bx^2-bx-a$，

（1）求证：$x=1$是函数零点；

（2）当a,b满足什么关系时，函数$f\left(x\right)$还有其他零点？

（3）如果x_0是函数$f\left(x\right)$的零点，求证：$\frac{1}{x_0}$也是函数$f\left(x\right)$的零点。

（1）证（略）

（2）$f\left(x\right)=ax^3+bx^2-bx-a=\left(x-1\right)\left(ax^2+\left(a+b\right)x+a\right)=0$

$\Leftrightarrow x=1,ax^2+\left(a+b\right)x+a=0\Rightarrow\Delta=\left(a+b\right)^2-4a^2\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(3a+b\right)\left(b-a\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(a+\dfrac{b}{3}\right)\leq 0$

$b\geq 0$时，$x\in\left[-\dfrac{b}{3},b\right],\qquad b<0$时，$x\in\left[b,-\dfrac{b}{3}\right],$

（3）略

15、对定义在R上的函数$f\left(x\right)$，若实数x_0满足$f\left(x_0\right)=x_0$，则x_0称为$f\left(x\right)$的一个不动点。若二次函数$f\left(x\right)=x^2+mx-m+2$在$\left[0,+\infty\right)$上有不动点，求实数$m$的取值范围。

$f\left(x\right)=x^2+mx-m+2=x\Leftrightarrow x^2+\left(m-1\right)x-m+2=0$在$\left[0,+\infty\right)$上有解

$x_1<0\leq x_2$时，$\mathrm{g}(0)\leq 0\Leftrightarrow -m+2\leq 0\Rightarrow m\geq 2$

$$x_1\geq 0,x_2\geq 0时,\begin{cases}g\left(0\right)\geq 0\Rightarrow m\leq 2\\ -\dfrac{m+1}{2}\geq 0\Rightarrow m\leq 1\\ \Delta\geq 0\Rightarrow\left(m-1\right)^2-4\left(2-m\right)\geq 0\Rightarrow m^2+2m-7\geq 0\end{cases}$$

$m^2+2m-7\geq 0\Leftrightarrow m\leq -2\sqrt{2}-1$或$m\geq 2\sqrt{2}-1$

综上所述　$m\leq -2\sqrt{2}-1$ 或 $m\geq 2$

班级__________　　姓名______________　　学号______

A组

课后作业

一、填空题

1．求方程$x^2+2+\dfrac{1}{x}=0$的近似解（精确到0.1）是_________ -0.5

2．函数$f\left(x\right)=3ax^2-2ax+1$在$\left(-1,1\right)$内有一个零点，则实数$a$的取值范围是$a\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

3．函数$f\left(x\right)=x^3-x^2-4x+4$在$\left(0,4\right)$内的零点个数是__________．　3

4．"一元二次方程$ax^2+2x+1=0$有一个正根和一负根"的充分不必要条件是___．$a<-2$

5．若函数$f\left(x\right)$的零点为$x=2$，则函数$y=f\left(2x-1\right)$的零点为__________．$x=\dfrac{3}{2}$

二、选择题

6．若函数$f\left(x\right)$是偶函数，定义域为$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$。若函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上是减少函数，$f\left(2\right)=0$，则函数$f\left(x\right)$的零点一定（　　）$B$

（A）唯一　（B）有两个　（C）至少两个　（D）无法判断

三、解答题

7．对于函数$f(x)=ax^2+(b+1)x+b-2(a\neq 0)$，若存在实数$x_0$，使$f(x_0)=x_0$成立，则称$x_0$为$f(x)$的不动点．

（1）当$a=2,b=-2$时，求$f(x)$的不动点；

（2）若对于任何实数b，函数$f(x)$恒有两相异的不动点，求实数a的取值范围。

(1) $x=-1,2$　　(2) $a\in\left(0,2\right)$

8．已知函数 $f\left(x\right)=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧，求实数 m 的取值范围。

(1) $m<0$ 时，$f\left(0\right)=1\Rightarrow$ 函数 $f\left(x\right)=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 轴的交点有一个在原点右侧

(2) $m=0$ 时，$f\left(x\right)=-3x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}>0$

(3) $m>0$ 时 $\begin{cases} m>0 \\ f\left(0\right)>0 \\ \Delta=\left(m-3\right)^2-4m>0\Leftrightarrow m\le 1,m\ge 9\Leftrightarrow 0<m\le 1 \\ -\frac{m-3}{2m}>0\Leftrightarrow 0<m<3 \end{cases}$

综上所述　　$m\le 1$

9．求实数 m 的取值范围，使方程 $x^2+2\left(m-1\right)x+2m+6=0$

（1）有两个实根，且一个比 2 大，一个比 2 小；

（2）都比 1 大；

（3）有两个实根 α,β，且 $0<\alpha<1<\beta<4$；

（4）至少有一个正根。

(1) $m<-\frac{1}{2}$　　(2) $-\frac{5}{4}<m\le -1$　　(3) $m\in\left(-\frac{7}{5},-\frac{5}{4}\right)$　　(4)　　$m\le -1$

B 组

10．已知二次函数 $f\left(x\right)=2x^2-x-a$，若记 $M=\left\{b\middle|f\left(b\right)>0,0\le b\le 1\right\}$，则当 $M\ne\varnothing$ 时，求实数 a 的取值范围。

$f\left(x\right)=2x^2-x-a\ge 0,x\in\left[0,1\right]$ 有解 $\Rightarrow 2x^2-x\ge a,x\in\left[0,1\right]2x^2-x=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

$\left(2x^2-x\right)_{\max}=1\Rightarrow a\le 1$

12．已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a>0\right),2a+3b+6c=0$，求证：方程 $f\left(x\right)=0$ 至少有一个根在 $\left(0,1\right)$ 内。

证　(略)

第 12 讲

[参考答案]

1.(1) $y_{\min}=-1,y_{\max}=2$；(2) $y_{\min}=0,y_{\max}=2$；(3) $y_{\min}=\frac{1}{2},y_{\max}=2$.

2.(1) $y_{\min}=-1$，无最大值；(2) $y_{\min}=-1,y_{\max}=17$；(3) $y_{\min}=1,y_{\max}=17$；

(4) $y_{\min}=1, y_{\max}=7$.

3.(1)①无最值；② $y_{\min}=\frac{5}{3}$，无最大值；③ $y_{\min}=-3, y_{\max}=\frac{5}{3}$.

4.(1) $y_{\min}=0, y_{\max}=2$；(2) $y_{\min}=-\frac{1}{2}$，无最大值；(3) $y_{\max}=1$,无最小值.

5.(1) $A=(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup(0,+\infty)$；(2) $A=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$；(3) $A=[10,+\infty)$；

(4) $A=[2,+\infty)$；(5) $A=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$；(6) $A=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

6.(1) $y_{\min}=\begin{cases}a^2+2a+2, a\le -1,\\ 1,-1<a<1,\\ a^2-2a+2, a\ge 1\end{cases}$, $y_{\max}=\begin{cases}a^2-2a+2, a<0,\\ a^2+2a+2, a\ge 0\end{cases}$.

(2) $y_{\min}=\begin{cases}a^2+1, a\le 0,\\ 1, 0<a<1,\\ a^2-2a+2, a\ge 1\end{cases}$, $y_{\max}=\begin{cases}a^2-2a+2, a<\frac{1}{2},\\ a^2+1, a\ge \frac{1}{2}\end{cases}$

7. $y_{\min}=\begin{cases}a+1, a\le 1,\\ 2\sqrt{a}, 1<a<25,\\ \frac{1}{5}a+5, a\ge 25\end{cases}$ $y_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{5}a+5, a<5,\\ a+1, 5\le a\le 25\end{cases}$

8.(1) $S\in[-9,\frac{22}{3}]$；(2) $\frac{1}{2}$.

第 13 讲

[参考答案]

1.②⑥⑦⑧

2.略

3.(1) $\alpha<\gamma<\beta$. (2) $k_1=2, k_2=\frac{1}{2}, k_3=-\frac{1}{2}, k_4=-2$. (3) $f(9)=\frac{1}{3}$. (4) $x\in(-\infty,0)\cup(0,1]$.

4.(1) $f(x)=x^{-3}$. (2) $f(x)=x^{-3}$. (3) $f(x)=x^2$. (4) $f(x)=x^{-4}$.

5.(1) $a\in(-\infty,-4)\cup(\frac{2}{3},3)\cup(3,+\infty)$. (2) $a\in(-\infty,-2)\cup(-\frac{2}{3},\frac{1}{2})$. (3) $x\in(-3,-1)\cup(1,3)$.

6.(1) $a\in[-1,0)$. (2) $k=0$ 或 1； $p=2$. (3)增函数； $a<3$； $a>2$.

(4) $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a,t\in[\sqrt{2},2]$； $g(\mathrm{a})=\begin{cases}\sqrt{2},a<-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ -a-\frac{1}{2a},-\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le-\frac{1}{2},\\ a+2,a>-\frac{1}{2}\end{cases}$

第 14 讲

[参考答案]

1.①②⑥

2.略

3.(1) $\pi^{1.732}<\pi^{\sqrt{3}}$. (2) $0.5^{\frac{a-1}{a}}>0.5^{\frac{a}{a+1}}$. (3) $0.3^{0.4}<0.4^{0.3}$. (4) $a^a>a$. (5) $\frac{2^{2014}+1}{2^{2015}+1}>\frac{2^{2015}+1}{2^{2016}+1}$.

4.(1) $a=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$. (2) $a\in(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$； $a\in(\frac{1}{2},2)$； $a\in(-1,\frac{1}{2})$.

5.(1)略；在 R 上单调增；$(-\infty,0]\uparrow,[0,+\infty)\downarrow$；$(-\infty,1]\downarrow,[1,+\infty)\uparrow$；$a\in(-1,+\infty),b\in(0,2)$.

(2) $a\in[-2,2]$. (3) $0<a<1,m\le-b$. (4) $0<a<\frac{1}{2}$. (5) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

6.(1) $D=(-\infty,2)\cup(2,+\infty),A=(0,1)\cup(1,+\infty)$ ； $D=(-\infty,1],A=(0,1]$ ；

$D=(-\infty,0],A=[0,+\infty)$；

$D=(-\infty,0],A=[0,1)$. (2) $(-\infty,3]\uparrow,[3,+\infty)\downarrow,A=(0,4]$；$[-2,-1]\uparrow,[-1,1]\downarrow,A=[-2,\frac{1}{4}]$.

(3) $D=R,A=(-1,1)$,奇函数, $0<a<1$ 时 $f(x)$ 在 R 上单调减, $a>1$ 时 $f(x)$ 在 R 上单调增；

$D=R,A=(-1,1)$,奇函数, $f(x)$ 在 R 上单调增.

第 15 讲

[参考答案]

1.(1) $f(x)=-x^2+4x-3,x\ge 1$. (2) $f(x)=x^2-4x+3,x\ge 1$.

(3) $g(x)=-x^2+12x-27$. (4) $g(x)=x^2-8x+15$.

2.(1) $f_1(x)+f_1(-x)=0$ ，关于(0,0)对称；略.

(2) $y=f(x)+g(x),y=f(x)-g(x)$ 是中心对称图形，$y=f(x)g(x),y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不一定是中心对称.

3.(1) $m=1$. (2) $g(x)=-x^2+ax+1,x<0$. (3) $a>-2\sqrt{2}$.

4. $a\in[3,4)$.

5.(1) $a=-1$. (2) $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称. (3) $b\in(0,1)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$.

第 16 讲 反函数

【知识梳理】

一．定义：设式子 $y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数，定义域为 A，值域为 C，从式子 $y=f(x)$ 中解出 x，得到式子 $x=\varphi(y)$，如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过式子 $x=\varphi(y)$， x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应，那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是 y 的函数(y 是自变量)，这样的函数，叫做 $y=f(x)$ 的反函数 ，记作 $x=f^{-1}(y)$，即 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$，一般习惯上对调 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$。

（1）．反函数存在的条件：从定义域到值域上的一一映射确定的函数才有反函数；

（2）．原函数的定义域、值域分别是反函数的值域、定义域，

$$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

几何语言：

点P（a,b）在$y=f(x)$图象上$\Leftrightarrow$点$P'(b,a)$在$y=f^{-1}(x)$图象

（3）． $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称.

二．求反函数的一般步骤

（1） 确定原函数的值域，也就是反函数的定义域

（2） 由 $y=f(x)$ 的解析式求出 $x=\varphi(y)$

（3） 将 x,y 对换，得反函数的一般表达式 $y=f^{-1}(x)$，标上反函数的定义域（反函数的定义域不能由反函数的解析式求得）

分段函数的反函数可以分别求出各段函数的反函数后再合成。

三．掌握下列一些结论

（1） 单调函数 $\Rightarrow$ 一一对应 $\Leftrightarrow$ 有反函数

（2） 若一个奇函数有反函数，则反函数也必为奇函数

（3） 证明 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，只需证 $y=f(x)$ 的反函数和 $y=f(x)$ 相同。

【基础训练】

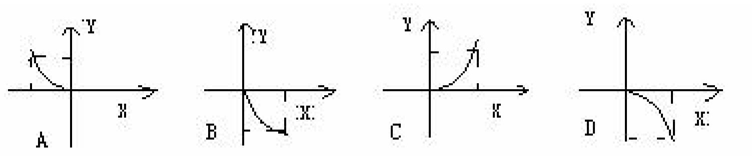
1 函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 反函数是 $f(x)^{-1}=\sqrt{x}-1\left(x\geq 0\right)$，求 $\boldsymbol{f(x)}$ 定义域

解：原出数定义域是反函数值域，$f(x)^{-1}=\sqrt{x}-1\left(x\geq 0\right)$ 的值域是 $\left[-1,\infty\right)$，**故**函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 定义域是 $\left[-1,\infty\right)$

2.已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=3^x-1$，设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，则 $g(-8)=$____________.

解：易求当 $x<0$ 时，$f(x)=1-3^{-x}$。解方程 $-8=1-3^{-x}$ 和 $-8=3^x-1$，前者x=-2,后者无解. 则 $g(-8)=$ -2.

3. $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$. 则 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是（）



图（1）

解：研究反函数图像,往往通过观察原函数的图像实现.先研究 f(x)解析式。$y=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$. 得 $(y-1)^2+x^2=1$. 它是一段圆弧，圆心（0，1），反函数

图像也是一段圆弧，圆心（1，0）.故选(B)

4. $f(x)=2^x+b$ 的反函数是 $f(x)^{-1}$，$f(x)^{-1}$ 的图像过 Q(5,2).求 b.

解:f(x)的图像必过(2,5),代入,得 b=1.

【提高训练】

5.设 k>1，f(x)=k(x-1)(x∈**R**)．在平面直角坐标系 xOy 中，函数 y=f(x)的图像与 x 轴交于 A 点，它的反函数 y=f⁻¹(x)的图像与 y 轴交于 B 点，并且这两个函数的图像交于 P 点．已知四边形 OAPB 的面积是 3，则 k 等于(　　)

(A)3　　(B)$\frac{3}{2}$　　(C)$\frac{4}{3}$　　(D)$\frac{6}{5}$

解：f(x)=k(x-1)图像过点 A（1，0），则 B（0，1），四边形 OAPB 的面积可以分成三角形 OPA 和 OPB，且等于三角形 OPA 面积二倍.求出点 P (3,3).从而求出 k=$\frac{3}{2}$.故选(B).

注：原函数图像上的点(a,b),在反函数图像上对应点是(b,a).这是一个经常用到的重要结论.

6.求 f(x)=$\frac{2x}{1+x}(x>-1)$ 图像与反函数图像交点坐标.

解:先求反函数 f(x)$^{-1}$=$\frac{x}{2-x}(x<0)$,解方程$\frac{x}{2-x}=\frac{2x}{1+x}$,得 x=0 或 1. 从而交点坐标是(0,0)(1,1).

7. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$（）

（1）是奇函数，在（0，+∞）上是减函数

（2）是偶函数，在（0，+∞）上是减函数

（3）是奇函数，在（0，+∞）上是增函数

（4）是偶函数，在（0，+∞）上是增函数

解：偶函数无反函数，排除 B、D；原函数在（0，+∞）上是增函数，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也增函数.故选（C）.

注:互为反函数的单调性相同, 偶函数无反函数.

总而言之,反函数内容几乎每年都考,试题的难度又不大,试题涉及到反函数的方方面面，但最常考的是求反函数定义域、值域、函数图像等，除求反函数题外，大多数题不用求反函数，只需将问题转化与原函数有关的问题去解决。

【拓展研究】

8.（1）已知 $f(x)=4^x-2^{x+1}$，求 $f^{-1}(0)$的值.

（2）设函数 $y=f(x)$满足 $f(x-1)=x^2-2x+3$ ($x\leqslant 0$)，求 $f^{-1}(x+1)$.

解析：（1）设 $f^{-1}(0)=a$，即反函数过(0，a)，∴原函数过(a，0).

代入得 ：$0=4^a-2^{a+1}$ ，$2^a(2^a-2)=0$，得 $a=1$，∴$f^{-1}(0)=1$.

（2）先求 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-2}(x\geq 3),\therefore f^{-1}(x+1)=-\sqrt{x-1}(x\geq 2)$.

9．判断下列函数是否有反函数，如有反函数，则求出它的反函数.

（1）$f(x)=x^2-4x+2(x\in R)$；

（2）$f(x)=x^2-4x+2(x\leq 2)$.

（3）$y=\begin{cases}x+1,(x>0)\\x-1,(x<0)\end{cases}$

解析：⑴令 $y=f(x)=0,$得到对应的两根：$x_1=0,x_2=4$

这说明函数确定的映射不是一一映射，因而它没有反函数.

⑵由 $f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$，得 $(x-2)^2=y+2$

$\because x\leq 2$，$\therefore$ $x-2=-\sqrt{y+2},x=2-\sqrt{y+2}$，

互换 x,y 得 $y=2-\sqrt{x+2},$

又由 $f(x)=x^2-4x+2(x\leq 2)$ 的值域可得反函数定义域为$[-2,+\infty),$

∴反函数为 $f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+1},x\in[-2,+\infty)$.

⑶由 $y=x+1(x>0)$ 得其反函数为 $y=x-1(x>1)$；

又由 $y=x-1(x<0)$ 得其反函数为 $y=x+1(x<-1)$.

综上可得，所求的反函数为 $y=\begin{cases}x-1(x>1)\\x+1(x<-1)\end{cases}$.

注：求函数 $y=f(x)$ 的反函数的一般步骤是：

⑴反解，由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，写出 y 的取值范围；

⑵互换 x,y，得 $y=f^{-1}(x)$；

⑶写出完整结论(一定要有反函数的定义域).

⑷求分段函数的反函数，应分段逐一求解；分段函数的反函数也是分段函数.

10．已知 $f(x)=\dfrac{ax+3}{x-1}$

（1）求 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域;

（2）若(2，7)是 $y=f^{-1}(x)$的图象上一点，求 $y=f(x)$的值域.

.解析：

（1）反函数的定义域、值域分别是原函数的值域、定义域． ∴反函数的值域为 $\{y|y\in R, y\neq 1\}$

（2）∵(2，7)是 $y=f^{-1}(x)$的图象上一点，

∴(7，2)是 $y=f(x)$上一点.

$\therefore 7=\dfrac{2a+3}{2-1}\therefore a=2 \quad \therefore f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+5}{x-1}=2+\dfrac{5}{x-1}\neq 2,$

∴$f(x)$的值域为$\{y|y\neq 2\}$.

11．已知函数 $f(x+1)=x^2+2x(x>0)$，

（1）求 $f^{-1}(x)$ 及其 $f^{-1}(x+1)$；

（2）求 $y=f(x+1)$ 的反函数.

解析：⑴∵ $f(x+1)=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1(x>0)$，

$\therefore f(x)=x^2-1(x>1)$，其值域为 $\{y\mid y>0\}$，

又由 $y+1=x^2(x>1)$ 得 $x=\sqrt{y+1}$，

$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}(x>0)$， $\therefore f^{-1}(x+1)=\sqrt{x+2}(x>-1)$.

⑵由 $y=f(x)=x^2+2x(x>0)$，解得 $x=\sqrt{y+1}-1(y>-1)$

$\therefore y=f(x+1)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x+1}-1\ (x>-1)$.

说明：$y=f^{-1}(x+1)$ 并不是 $y=f(x+1)$ 的反函数，而是 $y+1=f(x)$ 的反函数.

题中有 $y=f^{-1}(x+1)$ 的形式，我们先求出 $y=f^{-1}(x)$，才能求出 $y=f^{-1}(x+1)$.

12．已知 $f\left(x\right)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$ (x≥1),

（1）求 $f\left(x\right)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$，并求出反函数的定义域;

（2）判断并证明 $f^{-1}(x)$ 的单调性.

解析：(1) 设$y=(\dfrac{x-1}{x+1})^2\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}},\because x\geq 1,\ \therefore \dfrac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}\geq 1\Rightarrow 0\leq y<1$，

即 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[0,1)$；

⑵设 $0 \le x_1 < x_2 < 1, \therefore 0 \le \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} < 1, \therefore f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2) = \dfrac{2(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})}{(1-\sqrt{x_1})(1-\sqrt{x_2})} < 0$，

$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$，即 $f^{-1}(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增.

13．给定实数a，$a\neq 0$，且$a\neq 1$，设函数 $y = \dfrac{x-1}{ax-1}\left(x \in R, 且x \neq \dfrac{1}{a}\right)$．试证明：这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形.

、**证法一:**

设点$P(x', y')$是这个函数的图象上任意一点,则$x' \neq \dfrac{1}{a}$,且

$y' = \dfrac{x'-1}{ax'-1}$.……①

易知点$P(x', y')$关于直线$y = x$的对称点P'的坐标为(y', x').

由①式得

即 $\begin{cases} y'(ax'-1) = x'-1 \\ x'(ay'-1) = y'-1, \end{cases}$ ……②

由此得a=1，与已知矛盾，$\therefore ay'-1 \neq 0.$

又由②式得 $x' = \dfrac{y'-1}{ay'-1}$

这说明点P′（y'，x'）在已知函数的图象上，因此，这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形.

证法二:先求所给函数的反函数:由

$y = \dfrac{x-1}{ax-1}(x \in R, x \neq \dfrac{1}{a})$,

得 $y(ax-1)=x-1$，

即 $(ay-1)x=y-1$.

假如$ay-1=0$,则$y = \dfrac{1}{a}$,代入所给函数的解析式,得 $\dfrac{1}{a} = \dfrac{x-1}{ax-1}$

即 $ax-a=ax-1$，

由此得a=1，与已知矛盾，所以$ay-1\neq 0$.

因此得到

$x=\dfrac{y-1}{ay-1}$,其中$y\neq\dfrac{1}{a}$,

这表明函数$y=\dfrac{x-1}{ax-1}(x\in R,且x\neq\dfrac{1}{a})$的反函数是

$y=\dfrac{x-1}{ax-1},(x\in R,且x\neq\dfrac{1}{a})$.

由于函数y=f(x)的图象和它的反函数y=f－1(x)的图象关于直线y=x对称，所以函数

$y=\dfrac{x-1}{ax-1}(x\in R,且x\neq\dfrac{1}{a})$ 的图象关于直线y=x成轴对称图形.

第 17 讲 对数与对数函数

【知识梳理】

1.对数

（1）对数的定义：

如果 $a^b=N$（$a>0,a\neq1$），那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $\log_a N=b$.

（2）指数式与对数式的关系：$a^b=N\Leftrightarrow\log_a N=b$（$a>0$，$a\neq1$，$N>0$）. 两个式子表示的 a、b、N 三个数之间的关系是一样的，并且可以互化.

（3）对数运算性质:

①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

②$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

③$\log_a M^n=n\log_a M$.（$M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq1$）

④对数换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$（$a>0$，$a\neq1$，$b>0$，$b\neq1$，$N>0$）.

2.对数函数

（1）对数函数的定义

函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）叫做对数函数，其中 x 是自变量，函数的

定义域是（0，+∞）.注意：真数式子没根号那就只要求真数式大于零,如果有根号,要求真数大于零还要保证根号里的式子大于零，底数则要大于 0 且不为 1

（2）对数函数的图象

底数互为倒数的两个对数函数的图象关于 x 轴对称.

（3）对数函数的性质:

①定义域：（0，+∞）.②值域：**R**.

③过点（1，0），即当 x=1 时，y=0.

④当 a>1 时，在（0，+∞）上是增函数；当 0<a<1 时，在（0，+∞）上是减函数.

【基础训练】

1.函数 f（x）=$|\log_2 x|$的图象是

解析：$f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x\geq 1,\\ -\log_2 x, & 0<x<1.\end{cases}$

答案：A

2.若$f^{-1}(x)$为函数$f(x)=\lg(x+1)$的反函数，则$f^{-1}(x)$的值域为____________________.

解析：$f^{-1}(x)$的值域为$f(x)=\lg(x+1)$的定义域.由$f(x)=\lg(x+1)$的定义域为$(-1,+\infty)$，$\therefore f^{-1}(x)$的值域为$(-1,+\infty)$.

答案：$(-1,+\infty)$

3.已知$f(x)$的定义域为$[0,1]$，则函数$y=f[\log_{\frac{1}{2}}(3-x)]$的定义域是__________.

解析：由$0\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqslant 1\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant 3-x\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$.　　　答案：$[2,\frac{5}{2}]$

4.若$\log_x\sqrt[7]{y}=z$，则x、y、z之间满足

A.$y^7=x^z$　　　　B.$y=x^{7z}$

C.$y=7x^z$　　　　D.$y=z^x$

解析：由$\log_x\sqrt[7]{y}=z\Rightarrow x^z=\sqrt[7]{y}\Rightarrow x^{7z}=y$，即$y=x^{7z}$.　　答案：B

5.已知$1<m<n$，令$a=(\log_n m)^2$，$b=\log_n m^2$，$c=\log_n(\log_n m)$，则

A.$a<b<c$　　　　B.$a<c<b$

C.$b<a<c$　　　　D.$c<a<b$

解析：$\because 1<m<n$，$\therefore 0<\log_n m<1$.　　$\therefore\log_n(\log_n m)<0$.

答案：D

6.若函数$f(x)=\log_a x\,(0<a<1)$在区间$[a,2a]$上的最大值是最

小值的 3 倍，则 a 等于

A.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{2}$

解析：∵$0<a<1$，∴$f(x)=\log_a x$ 是减函数.∴$\log_a a=3\cdot\log_a 2a$.

∴$\log_a 2a=\frac{1}{3}$.∴$1+\log_a 2=\frac{1}{3}$.∴$\log_a 2=-\frac{2}{3}$.∴$a=\frac{\sqrt{2}}{4}$.　　答案：A

7.函数 $y=\log_2|ax-1|$（$a\neq 0$）的对称轴方程是 $x=-2$，那么 a 等于

A. $\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.2　　D.-2

解析：$y=\log_2|ax-1|=\log_2|a(x-\frac{1}{a})|$，对称轴为 $x=\frac{1}{a}$，由 $\frac{1}{a}=-2$ 得 $a=-\frac{1}{2}$.　　答案：B

注意：此题还可用特殊值法解决，如利用 $f(0)=f(-4)$，

可得 $0=\log_2|-4a-1|$.∴$|4a+1|=1$.∴$4a+1=1$ 或 $4a+1=-1$.

∵$a\neq 0$，∴$a=-\frac{1}{2}$.

8.函数 $f(x)=\log_2|x|$，$g(x)=-x^2+2$，则 $f(x)\cdot g(x)$ 的图象只可能是

解析：∵$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是偶函数，∴$f(x)\cdot g(x)$ 也是偶函数，由此可排除 A、D.又由 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\cdot g(x)\to-\infty$，可排除 B.

答案：C

9.设 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的反函数，若 $[1+f^{-1}(a)][1+$

f^{-1}（b）］=8，则 f（$a+b$）的值为

A.1　　B.2　　C.3　　D.$\log_2 3$

解析：∵f^{-1}（x）=2^x-1，∴［$1+f^{-1}$（a）］［$1+f^{-1}$（b）］=$2^a\cdot 2^b=2^{a+b}$.

由已知 $2^{a+b}=8$，∴$a+b=3$.　　答案：C

10.方程 $\lg x+\lg(x+3)=1$ 的解 x=__________________.

解析：由 $\lg x+\lg(x+3)=1$，得 $x(x+3)=10$，$x^2+3x-10=0$.

∴$x=-5$ 或 $x=2$.∵$x>0$，∴$x=2$.　　答案：2

【提高训练】

【例 1】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, x\geq 4,\\ f(x+1), x<4,\end{cases}$ 则 $f(2+\log_2 3)$ 的值为

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{6}$　　C.$\frac{1}{12}$　　D.$\frac{1}{24}$

剖析：∵$3<2+\log_2 3<4$，$3+\log_2 3>4$，

∴$f(2+\log_2 3)=f(3+\log_2 3)=(\frac{1}{2})^{3+\log_2 3}=\frac{1}{24}$.　　答案：D

【例 2】 求函数 $y=\log_2|x|$ 的定义域，并画出它的图象，指出它的单调区间.

解：∵$|x|>0$，∴函数的定义域是$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$.显然 $y=\log_2|x|$ 是偶函数，它的图象关于 y 轴对称.又知当 $x>0$ 时，$y=\log_2|x|\Leftrightarrow y=\log_2 x$.故可画出 $y=\log_2|x|$ 的图象如下图.由图象易见，其递减区间是（$-\infty$，0），递增区间是（0，$+\infty$）.

注意：研究函数的性质时，利用图象会更直观.

【例 3】 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}[3-(x-1)^2]$，求 $f(x)$ 的值域及单调区间.

解：∵真数 $3-(x-1)^2\leqslant 3$，

∴$\log_{\frac{1}{3}}[3-(x-1)^2]\geqslant\log_{\frac{1}{3}}3=-1$，即 $f(x)$ 的值域是 $[-1,+\infty)$.

又 $3-(x-1)^2>0$，得 $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$，∴$x\in(1-\sqrt{3},1]$ 时，$3-(x-1)^2$ 单调递增，从而 $f(x)$ 单调递减；$x\in[1,1+\sqrt{3})$ 时，$f(x)$ 单调递增.

*注意：*讨论复合函数的单调性要注意定义域.

【例 4】已知 $y=\log_a(3-ax)$ 在 $[0,2]$ 上是 x 的减函数，求 a 的取值范围.

解：∵$a>0$ 且 $a\neq 1$，∴$t=3-ax$ 为减函数.依题意 $a>1$，又 $t=3-ax$ 在 $[0,2]$ 上应有 $t>0$，∴$3-2a>0$.∴$a<\frac{3}{2}$.故 $1<a<\frac{3}{2}$.

【例 5】设函数 $f(x)=\lg(1-x)$，$g(x)=\lg(1+x)$，在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域内比较 $|f(x)|$ 与 $|g(x)|$ 的大小.

解：$f(x)$、$g(x)$ 的公共定义域为 $(-1,1)$.

$|f(x)|-|g(x)|=|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|$.

（1）当 $0<x<1$ 时，$|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|=-\lg(1-x^2)>0$；

（2）当 $x=0$ 时，$|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|=0$；

（3）当 $-1<x<0$ 时，$|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|=\lg(1-x^2)<0$.

综上所述，当 $0<x<1$ 时，$|f(x)|>|g(x)|$；

当 $x=0$ 时，$|f(x)|=|g(x)|$；当 $-1<x<0$ 时，$|f(x)|<|g(x)|$.

【例 6】 求函数 $y=2\lg(x-2)-\lg(x-3)$ 的最小值.

解：定义域为$x>3$，原函数为$y=\lg\frac{(x-2)^2}{x-3}$.

又∵$\frac{(x-2)^2}{x-3}=\frac{x^2-4x+4}{x-3}=\frac{(x-3)^2+2(x-3)+1}{x-3}=(x-3)+\frac{1}{x-3}+2\geqslant 4$，

∴当$x=4$时，$y_{\min}=\lg 4$.

【例7】在$f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=2^x$，$f_4(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$四个函数中，$x_1>x_2>1$时，能使$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]<f(\frac{x_1+x_2}{2})$成立的函数是

A.$f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$　　B.$f_2(x)=x^2$

C.$f_3(x)=2^x$　　D.$f_4(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$

解析：由图形可直观得到：只有$f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$为“上凸”的函数.

答案：A

【拓展创新】

1.若$f(x)=x^2-x+b$，且$f(\log_2 a)=b$，$\log_2[f(a)]=2$（$a\neq 1$）.

（1）求$f(\log_2 x)$的最小值及对应的x值；

（2）x取何值时，$f(\log_2 x)>f(1)$且$\log_2[f(x)]<f(1)$？

解：（1）∵$f(x)=x^2-x+b$，∴$f(\log_2 a)=\log_2^2 a-\log_2 a+b$.

由已知有$\log_2^2 a-\log_2 a+b=b$，∴$(\log_2 a-1)\log_2 a=0$.

∵$a\neq 1$，∴$\log_2 a=1$.∴$a=2$.又$\log_2[f(a)]=2$，∴$f(a)=4$.

∴$a^2-a+b=4$，$b=4-a^2+a=2$.故$f(x)=x^2-x+2$，

从而$f(\log_2 x)=\log_2^2 x-\log_2 x+2=(\log_2 x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$.

∴当$\log_2 x=\frac{1}{2}$即$x=\sqrt{2}$时，$f(\log_2 x)$有最小值$\frac{7}{4}$.

（2）由题意$\begin{cases}\log_2{}^2 x-\log_2 x+2>2\\ \log_2(x^2-x+2)<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\text{或}0<x<1\\ -1<x<2\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$.

2.已知函数 $f(x)=3^x+k$（k 为常数），$A(-2k, 2)$ 是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象上的点.

（1）求实数 k 的值及函数 $f^{-1}(x)$ 的解析式；

（2）将 $y=f^{-1}(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(3, 0)$ 平移，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若 $2f^{-1}(x+\sqrt{m}-3)-g(x)\geqslant 1$ 恒成立，试求实数 m 的取值范围.

解：（1）$\because A(-2k, 2)$ 是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象上的点，

$\therefore B(2, -2k)$ 是函数 $y=f(x)$ 上的点.$\therefore -2k=3^2+k$.$\therefore k=-3$.

$\therefore f(x)=3^x-3$.$\therefore y=f^{-1}(x)=\log_3(x+3)(x>-3)$.

（2）将 $y=f^{-1}(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(3, 0)$ 平移，得到函数 $y=g(x)=\log_3 x(x>0)$，要使 $2f^{-1}(x+\sqrt{m}-3)-g(x)\geqslant 1$ 恒成立，即使 $2\log_3(x+\sqrt{m})-\log_3 x\geqslant 1$ 恒成立，所以有 $x+\frac{m}{x}+2\sqrt{m}\geqslant 3$ 在 $x>0$ 时恒成立，只要 $\left(x+\frac{m}{x}+2\sqrt{m}\right)_{\min}\geqslant 3$.

又 $x+\frac{m}{x}\geqslant 2\sqrt{m}$（当且仅当 $x=\frac{m}{x}$，即 $x=\sqrt{m}$ 时等号成立），

$\therefore \left(x+\frac{m}{x}+2\sqrt{m}\right)_{\min}=4\sqrt{m}$，即 $4\sqrt{m}\geqslant 3$.$\therefore m\geqslant \frac{9}{16}$.