

2018 春季基础教案-高一数学

编写说明	2
第 1 讲:任意角及其度量	3
第 2 讲:同角三角比的关系和诱导公式	5
第 3 讲:两角和与差的余弦,正弦	8
第 4 讲:两角和与差的正切	11
第 5 讲:二倍角的正弦、余弦和正切	14
第 6 讲:半角的正弦、余弦、正切	17
第 7 讲:三角比的阶段测试	20
第 8 讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(一).....	22
第 9 讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(二).....	24
第 10 讲:期中阶段练习	26
第 11 讲:正弦函数、余弦函数的图像与性质	29
第 12 讲:函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与性质	32
第 13 讲:反三角函数与最简三角方程	35
第 14 讲:数列的概念	39
第 15 讲:等差数列	43
第 16 讲:等比数列	47
第 17 讲:等差和等比数列复习	50

编写说明

- 1.本册《基础教案》主要用于各位学员在春季学期学习《三角比》、《三角函数》、《数列》等章节时，根据不同授课老师的教学安排，在学完新课之后，供课后练习之用，其中大部分习题来源于中西书局《名师点金》；
- 2.每一节的最后两题为拓展练习，各位学员可以灵活选用；
- 3.因编写时间仓促，错误或不足之处在所难免，欢迎各位学员予以指正，把你发现的问题发送至电子邮箱 godsun@aliyun.com，我们会及时回复.

第 1 讲:任意角及其度量

[知识概要]

1.若 α 是一个任意角, 在 α 的终边上任取一点 $P(x, y)$, 设 $OP = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$,

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}, \csc \alpha = \frac{r}{y}, \sec \alpha = \frac{r}{x}, \cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

[课后练习]

I 填空题

1. $-30^\circ =$ _____ 弧度; $\frac{\pi}{4} =$ _____ $^\circ$; 2 弧度 = _____ $^\circ$.

2. 角 -361° 和 1821° 分别在第 _____ 和 _____ 象限.

3. 已知扇形的半径为 10cm, 圆心角为 120° , 则扇形的弧长为 _____ cm, 面积为 _____ cm^2 .

4. 弦长等于半径的扇形, 其圆心角等于 _____.

5. 用弧度制表示终边落在 y 轴正半轴上的角的集合为 _____.

6. 用集合表示第二象限角为 _____.

7. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2, 1)$, 则角 α 的正弦值是 _____.

8. 计算 $\sin \pi =$ _____.

9. 角 α 的终边经过点 $P(3, -4)$, 则 $\sin \alpha + 2\cos \alpha =$ _____.

10. 若角 α 的终边在直线 $y = \frac{3}{4}x$ 上, 则 $\sin \alpha =$ _____.

11. 若 $\sin \alpha = \frac{2-3x}{3}$, 且 α 在第三象限, 那么 x 的取值范围为 _____.

12. 已知角 α 的终边上有一点 P, 它到原点的距离为 $\sqrt{10}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, $0 < \alpha < \pi$, 则点 P 的坐标是 _____.

II 选择题

13. 已知 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$, 则角 α 所在的象限是()

A. 第一或第二; B. 第二或第三; C. 第三或第四; D. 第一或第三.

14. 函数 $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{\cos x}{|\cos x|} + \frac{|\tan x|}{\tan x}$ 的值域是()

A. $\{1, -1\}$; B. $\{1, -1, 3\}$; C. $\{-1, 3\}$; D. $\{1, 3\}$.

15. 若 $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, 则角 α 的终边所在的位置是()

A. 整个坐标平面; B. x 轴的上半平面; C. x 轴的下半平面; D. 不在坐标轴上.

III 解答题

16. 化简 $\sin(\alpha + 360^\circ) + \cos(720^\circ + \alpha) \cdot \tan(\alpha + 360^\circ)$.

17. 根据下列条件, 确定 α 角属于哪个象限

(1) $\sin \alpha < 0, \tan \alpha < 0$; (2) $\sin \alpha \cdot \cot \alpha < 0$; (3) $\csc \alpha \cdot \sec \alpha > 0$; (4) $\frac{\cot \theta}{\csc \theta} > 0$.

18. 化简 $\frac{\sin(4\pi + \alpha) \cdot \tan(6\pi + \alpha) \cdot \cos(\alpha - 2\pi)}{\cos(2\pi + \alpha) \cdot \tan(2\pi + \alpha) \cdot \tan(\alpha - 2\pi)}$.

19. 利用单位圆求满足下列条件的角 θ 的取值范围

(1) $\cos \theta \leq -\frac{1}{2}$; (2) $\sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 求证: 当 α 为锐角时, $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$.

第2讲：同角三角比的关系和诱导公式

[知识概要]

1.同角三角比的关系

(1)倒数关系： $\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$ ， $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$ ， $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ ；

(2)商数关系： $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ， $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ；

(3)平方关系： $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ， $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$ ， $\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$.

2.诱导公式

(1) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ， $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ， $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ ， $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ ；

(2) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ ， $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ， $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ， $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$ ；

(3) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ； $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ； $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ ， $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.

[课后练习]

I 填空题

1.计算 $\sin(-\frac{19\pi}{6}) =$ _____.

2.计算 $\tan 600^\circ =$ _____.

3.化简 $\sqrt{1 - 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$ _____.

4.计算 $\tan 300^\circ + \cot 405^\circ =$ _____.

5.化简 $(1 + \tan \alpha)^2 + (1 - \tan \alpha)^2 =$ _____.

6.化简 $1 + \sec^4 \alpha - \tan^4 \alpha =$ _____.

7.若 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 3$ ，则 $\tan \alpha =$ _____.

8.已知 $\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} = -1$ ，则 $\frac{\sin \alpha - 3\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$ _____.

9.已知 $\sin \theta = \frac{m-3}{m+5}$ ， $\cos \theta = \frac{4-2m}{m+5}$ ， $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，则 $\tan \theta =$ _____.

10.已知 $\sin(540^\circ + \alpha) = -\frac{4}{5}$ ，则 $\cos(\alpha - 270^\circ) =$ _____.

11. 已知 $f(\cos x) = \cos 3x$, 则 $f(\sin 30^\circ) =$ _____.

12. 若 α 是三角形的一个内角, 且 $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{1}{2}$, 则 $\alpha =$ _____.

II 选择题

13. 若 α 是第四象限角, $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$, 则 $\sin \alpha =$ ()

A. $\frac{1}{5}$; B. $-\frac{1}{5}$; C. $\frac{5}{13}$; D. $-\frac{5}{13}$.

14. 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 化简 $\sqrt{1 - \sin 2\alpha} + \sqrt{1 + \sin 2\alpha} =$ ()

A. 第二、四象限角; B. 第二象限角; C. 第三象限角; D. 第四象限角.

15. 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 化简 $\sqrt{1 - \sin 2\alpha} + \sqrt{1 + \sin 2\alpha} =$ ()

A. $2\sin \alpha$; B. $-2\sin \alpha$; C. $2\cos \alpha$; D. $2\sin \alpha$ 或 $2\cos \alpha$.

III 解答题

16. 已知函数 $f(x) = a\sin(\pi x + \theta) + b\cos(\pi x + \beta) + 4$, 且 $f(2005) = 3$, 求 $f(2012)$ 的值.

17. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$, 求 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, $\sin \alpha - \cos \alpha$, $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ 的值.

18. 已知 α 是三角形的内角, 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 求 $\tan \alpha$.

19. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ 的值.

20. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $0 < \theta < \pi$, 求 $\sin \theta - \cos \theta$, $\tan \theta$, $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ 的值.

第3讲:两角和与差的余弦,正弦

[知识概要]

1.两角和与差的余弦、正弦

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

2.诱导公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha,$$

[课后练习]

I 填空题

1. $\cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

2. 计算 $\cos 105^\circ =$ _____.

3. 化简 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) =$ _____.

4. 化简 $\cos(20^\circ + x) \cdot \cos(25^\circ - x) - \cos(70^\circ - x) \cdot \sin(25^\circ - x) =$ _____.

5. 计算 $\cos 80^\circ \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \cos 40^\circ =$ _____.

6. 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

7. 计算 $\sin 15^\circ =$ _____.

8. 计算 $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ =$ _____.

9. 计算 $\cos 42^\circ \sin 78^\circ + \cos 48^\circ \sin 12^\circ =$ _____.

10. 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, α, β 都是第一象限角, 则 $\sin \beta =$ _____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{5}{13}$, 则 $\sin C =$ _____.

12. 已知 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

II 选择题

13. 化简 $\sin(x+y)\sin x + \cos(x+y)\cos x$ 等于()

A. $\cos(2x+y)$; B. $\cos y$; C. $\sin(2x+y)$; D. $\sin y$.

14. $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A \cos B > \sin A \sin B$, 则 $\triangle ABC$ 一定是()

A. 锐角三角形; B. 钝角三角形; C. 直角三角形; D. 不确定.

15. 设 α, β 为钝角, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 则 $\alpha + \beta =$ ()

A. $\frac{7}{4}\pi$; B. $\frac{5}{4}\pi$; C. $\frac{7}{4}\pi$ 或 $\frac{5}{4}\pi$; D. 无法确定.

III 解答题

16. 求证: $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$.

17. 若 $\sin(\alpha - \pi) = 2\cos(\alpha - 2\pi)$, 求 $\frac{\sin(7\pi - \alpha) + 5\cos(2\pi - \alpha)}{3\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) - \sin(-\alpha)}$ 的值.

18. 已知 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{3}{4}$, 判断 $\alpha - \beta$ 是第几象限角.

19. 已知 $\frac{\pi}{2} < \beta < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, 且 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{12}{13}$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, 求 $\sin 2\alpha, \sin 2\beta$ 的值.

20. 已知 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$, $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

第4讲:两角和与差的正切

[知识梳理]

1. 两角和与差的正切公式 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

2. 辅助角公式 $a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta)$, 其中

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\pi \leq \beta < \pi$$

[课后练习]

I 填空题

1. 计算 $\tan 15^\circ =$ _____.

2. 已知 $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan x =$ _____.

3. 已知 $\tan(\alpha - \beta) = -2$, $\tan \beta = 3$, 则 $\tan \beta$ 的值为 _____.

4. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$, $\tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

5. 求值: $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ =$ _____.

6. 关于 x 的一元二次方程的两实根为 $\tan \alpha, \tan \beta$, 则 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值为 _____.

7. 把 $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$ 可表示成 $A \sin(\alpha + \beta)$, $A > 0, \beta \in [0, 2\pi)$ 的形式 _____.

8. 已知 $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 0$, 则 $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha$ 的值为 _____.

9. 把 $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$ 可表示成 $A \cos(\alpha + \beta)$, $A > 0, \beta \in [0, 2\pi)$ 的形式 _____.

10. 求值 $\tan 18^\circ + \tan 42^\circ + \sqrt{3} \tan 18^\circ \tan 42^\circ =$ _____.

11. 已知 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2$, 则 $\sin \theta \cdot \cos \theta =$ _____.

12. 求值 $\frac{\sin 7^\circ + \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \sin 8^\circ} =$ _____.

II 选择题

13. 如果角 θ 满足 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$, 那么 $\tan \theta + \cot \theta =$ ()

A. -1; B. -2; C. 1; D. 2.

14. 若 $\sin \theta, \cos \theta$ 是关于 x 的方程 $4x^2 + 2mx + m = 0$ 的两实根, 则 m 的值为()

A. $1 + \sqrt{5}$; B. $1 - \sqrt{5}$; C. $1 \pm \sqrt{5}$; D. $-1 - \sqrt{5}$.

15. 若 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) =$ ()

A. $-\frac{3}{5}$; B. $\frac{3}{5}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $-\frac{4}{5}$.

III 解答题

16. 已知 $\sin \theta = \frac{1-a}{1+a}, \cos \theta = \frac{3a-1}{1+a}$, 若 θ 是第二象限角, 求实数 a 的值.

17. 已知 $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{1}{3}$, 求 $\cos(\frac{\pi}{12} - \alpha) + \sin(\alpha - \frac{\pi}{12})$ 的值.

18. 已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}, \tan \beta = -\frac{1}{7}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 求 $\tan(2\alpha - \beta)$ 及 $2\alpha - \beta$ 的值.

19. 已知关于 x 的方程 $4x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ 的两个根恰好是一个直角三角形的两个锐角的余弦, 求实数 m 的值.

20. 是否存在锐角 α, β , 使得 $\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}$ 和 $\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \beta = 2 - \sqrt{3}$ 同时成立, 若存在, 求出 α, β 的值, 若不存在, 说明理由.

第 5 讲:二倍角的正弦、余弦和正切

[知识概要]

1.二倍角的正弦、余弦和正切公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha, \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

2.二倍角公式的变形使用

$$(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin \alpha \cos \alpha, \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

[课后练习]

I 填空题

1.求值 $\sin 75^\circ \cos 75^\circ =$ _____.

2.求值 $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ =$ _____.

3.求值 $\tan \frac{\pi}{12} + \cot \frac{\pi}{12} =$ _____.

4.求值 $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} =$ _____.

5.已知 $\tan A = 2, \tan B = \frac{1}{3}$, 则 $\tan 2(A+B) =$ _____.

6.若 $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = \frac{5}{9}$, 则 $\sin 2\theta =$ _____.

7. $\sin \alpha : \sin \frac{\alpha}{2} = 8:5$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

8.求值 $\frac{\tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ} =$ _____.

9.化简 $\frac{\cos^2 x}{\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}} =$ _____.

10.化简 $\sqrt{1 - \sin 2} =$ _____.

11.若 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin 2\theta = a$, 则 $\sin \theta - \cos \theta =$ _____.

12.已知 $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + 1$, 则 $\cos 2\alpha - \cos 2\beta =$ _____.

II 选择题

13. 与 $\tan \alpha$ 相等的是()

A. $\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$; B. $\frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}$; C. $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$; D. $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

14. 表达式 $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ 可化简为()

A. $\tan x$; B. $\cot x$; C. $\sin x$; D. $\cos x$.

15. 已知 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 则 $\sqrt{1+\cos \alpha} + \sqrt{1-\cos \alpha} =$ ()

A. $2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$; B. $2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$; C. $-2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$; D. $-2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$.

III 解答题

16. 若 $\tan \theta = \sqrt{2}$, 求 $\frac{2\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin \theta - 1}{\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}$ 的值.

17. 若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 (1) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 的值; (2) $\cos 4\theta$ 的值.

18. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{5}{13}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, 求 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)}$ 的值.

19. 化简 $\sin^2 A + \sin^2(A - \frac{\pi}{3}) + \sin^2(A + \frac{\pi}{3})$.

20. 已知 $2 - \sqrt{3}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - (\tan \theta + \cot \theta)x + 1 = 0$ 的一个根, 求 $\sin 2\theta, \cos 4\theta$ 的值.

第 6 讲:半角的正弦、余弦、正切

[知识概要]

1.半角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

2.万能公式

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

[课后练习]

I 填空题

1.若 $\cos \alpha = -\frac{1}{5}, \alpha \in (\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$ _____.

2.若 $\sin \theta = \frac{12}{13}, \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\cos \frac{\theta}{2} =$ _____.

3.若 $2 \sin \alpha = 1 + \cos \alpha$, 则 $\cot \frac{\alpha}{2} =$ _____.

4.化简 $\frac{\cos \theta}{\tan \frac{\theta}{2} - \cot \frac{\theta}{2}} =$ _____.

5.化简 $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \cdot \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} =$ _____.

6.已知等腰三角形顶角的正弦值为 $\frac{5}{13}$, 则底角的余弦值为_____.

7.求值 $\tan \frac{\pi}{8} - \cot \frac{\pi}{8} =$ _____.

8.已知 $\tan \alpha = \frac{5}{12}, \alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2} =$ _____.

9.已知 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 则 $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} =$ _____.

10.若 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}, ab \neq 0$, 则 $b \cos \theta - a \sin \theta =$ _____.

11.若 $\tan A = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{1}{2} \sin 2A + \cos^2 A =$ _____.

12.已知 $\tan 100^\circ = t$, 则 $\cos 20^\circ =$ _____.

II 选择题

13. 若 $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\cos \alpha - \sin \alpha = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $\frac{3}{4}$; C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

14. 若 $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$, 则 $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = (\quad)$

- A. $\frac{3}{5}$; B. $-\frac{3}{5}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $-\frac{4}{5}$.

15. 若 $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 则 $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = (\quad)$

- A. $\cos \frac{\alpha}{2}$; B. $-\sin \frac{\alpha}{2}$; C. $-\cos \frac{\alpha}{2}$; D. $\sin \frac{\alpha}{2}$.

III 解答题

16. 已知角 α 的顶点与直角坐标系的原点重合, 始边在 x 轴的非负半轴上, 终边经过点 $P(-1, 2)$, 求 $\sin(2\alpha + \frac{2\pi}{3})$ 的值.

17. 已知 $6\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2\cos^2 \theta = 0$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 求 $\cos 2\theta$ 的值.

18. 已知 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\tan 2\alpha$ 的值.

19. 已知锐角 α, β , 满足 $\sin \alpha - \sin \beta = -\frac{1}{3}$, $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ 的值.

20. 已知锐角 α, β , 满足 $\sin \beta = \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$ 且 $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$, 求 $\tan \beta$ 的最大值, 并求此时 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值.

第7讲:三角比的阶段测试

[课后练习]

I 填空题

- 1.若 θ 是第二象限角,则 $\frac{\theta}{2}$ 是第_____象限角.
- 2.若 α 是第三象限角,终边上一点 $P(t, -\sqrt{5})$,满足 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}t$,则 $\tan \alpha =$ _____.
- 3.化简 $\cos(33^\circ - x)\cos(27^\circ + x) - \sin(33^\circ - x)\sin(27^\circ + x) =$ _____.
- 4.已知 $\sin A = \frac{4}{5}$, A 是第二象限角,则 $\tan 2A =$ _____.
- 5.已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$, $\cot \alpha < 0$,则 $\cos \alpha =$ _____.
- 6.若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$,则 $\sin \alpha \cos \alpha =$ _____.
- 7.若 $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$,则 $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha =$ _____.
- 8.圆心角为2弧度的扇形弦长为2,则扇形的弧长是_____.
- 9.在 $\triangle ABC$ 中,若 $2\cos A \sin B = \sin C$,则三角形的形状是_____.
- 10.在 $\triangle ABC$ 中, $b=1, A=\frac{\pi}{3}, S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$,则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$ _____.
- 11.在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=4, AC=7, BC$ 边上的中线 $AD=\frac{7}{2}$,则 $\cos B =$ _____.
- 12.若 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两根,且 $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,则 $\alpha + \beta =$ _____.

II 选择题

- 13.若 $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$,则 $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) =$ ()
A. $-\frac{3}{5}$; B. $\frac{3}{5}$; C. $-\frac{4}{5}$; D. $\frac{4}{5}$.
- 14.在 $\triangle ABC$ 中,若 $\tan A \tan B < 1$,则三角形的形状是()
A. 直角三角形; B. 钝角三角形; C. 锐角三角形; D. 直角三角形或锐角三角形.

15. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, 则 $\sin \beta =$ ()
- A. 0; B. 0 或 $\frac{24}{25}$; C. $\frac{24}{25}$; D. 0 或 $-\frac{24}{25}$.

III 解答题

16. 若 $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$, α, β 是锐角, 求 $\alpha + 2\beta$.

17. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 求 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$ 的值.

18. 若钝角三角形的三边是连续的正整数, 求最小角的余弦值.

19. 已知在 $\triangle ABC$ 中,

(1) $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{5}{13}$, 求 $\sin C$; (2) $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$, 求 $\cos C$.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$, 求三角形的形状.

第 8 讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(一)

[知识梳理]

1. 三角形面积公式: $S = \frac{1}{2}ab \sin C$

2. 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. 余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

[课后练习]

I 填空题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, $b = 16$, $S = 220\sqrt{3}$, 则 $c =$ _____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = \frac{\pi}{4}$, $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, 则 $B =$ _____.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2c \sin A$, 则 $C =$ _____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{5\pi}{12}$, $c = \sqrt{2}$, 则 $a =$ _____.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{15}{8}$, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.

6. 三角形三边之比为 3:4:5, 则此三角形为_____三角形.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是_____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 4 \sin \frac{\pi}{12}$, $b = 2 \sin \frac{5\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.

9. 平行四边形 ABCD 中, $AB = 20$, $B = \frac{2\pi}{3}$, $AD = 30$, 则 $S_{\square ABCD} =$ _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 = b^2 + bc + c^2$, 则 $A =$ _____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $B = \frac{\pi}{4}$, 则 $A =$ _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A > \sin B$ 是 $A > B$ 的_____条件.

II 选择题

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$, 则该三角形为()
- A. 直角三角形; B. 等腰三角形; C. 等边三角形; D. 等腰直角三角形.
14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A \cos B > \sin A \sin B$, 则该三角形为()
- A. 直角三角形; B. 锐角三角形; C. 钝角三角形; D. 等腰直角三角形.
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = \sqrt{6}, b = 4, A = \frac{\pi}{3}$, 则满足条件的 $\triangle ABC$ ()
- A. 有一个解; B. 有两个解; C. 无解; D. 无法确定.

III 解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $ab = 60, \sin A = \cos B, S_{\triangle ABC} = 15$, 求 A, B, C .

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2, b = 1$, 求角 B 的取值范围.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{3}{5}, \sin B = \frac{5}{13}$, 求 $\sin C$.

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = \frac{\pi}{6}, b + c = 8$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = \frac{\pi}{3}$, 外接圆半径 $R = 4$, 求此三角形面积的最大值.

第9讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(二)

[课后练习]

I 填空题

- 1.在 $\triangle ABC$ 中,若 $c=6, b=10, A=\frac{\pi}{3}$,则 $a=$ _____.
- 2.在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2A=\sin 2B$, 则三角形的形状是_____.
- 3.边长为3、5、7的三角形的最大角大小是_____.
- 4.边长为4、5、6的三角形的形状是_____.
- 5.在 $\triangle ABC$ 中,若 $a\cos B=b\cos A$, 则三角形的形状是_____.
- 6.在 $\triangle ABC$ 中,若 $(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)=3\sin A\sin B$, 且 $c\cos B=b\cos C$, 则三角形的形状是_____.
- 7.在 $\triangle ABC$ 中, $a=1, B=\frac{\pi}{3}, S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$, 则 $b=$ _____, $C=$ _____.
- 8.在 $\triangle ABC$ 中, $a=14, A=\frac{\pi}{3}, \frac{b}{c}=\frac{8}{5}$, 则 $S_{\triangle ABC}=$ _____.
- 9.在 $\triangle ABC$ 中, $a:b:c=7:5:3, S_{\triangle ABC}=15\sqrt{3}$, 则最长边为_____.
- 10.为了测定河的宽度,在河岸同侧取定基线BC,其长为 t ,对岸取定点A,测得 $\angle ABC=\alpha, \angle ACB=\beta$, 则河宽为_____.
- 11.已知两座灯塔A和B与海洋观测站C的距离均为 a km, 灯塔A在观测站C的北偏东 20° , 灯塔B在观测站C的南偏东 40° , 则灯塔A与B之间的距离是_____.
- 12.山上有一塔,塔高50尺,自山下地面某点测得塔顶仰角为 75° , 测得塔底仰角为 45° , 则山高为_____尺.

II 选择题

- 13.在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+b^2>c^2$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是()
A. 直角三角形; B. 钝角三角形; C. 锐角三角形; D. 不能确定.
- 14.在 $\triangle ABC$ 中, 三边长为 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, 且 $a^2+b^2=c^2$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是()
A. 直角三角形; B. 钝角三角形; C. 锐角三角形; D. 正三角形.

15.在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = ac$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是()

A. 直角三角形; B. 钝角三角形; C. 锐角但非等腰三角形; D. 正三角形.

III 解答题

16.已知 $\triangle ABC$ 是单位圆的内接三角形, $S_{\triangle ABC} = 1$, 求以 $\sin A, \sin B, \sin C$ 为三边组成的三角形的面积.

17.在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, AC = 7, BC$ 边的中线 $AD = \frac{7}{2}$, 求 BC 长和 $\triangle ABC$ 的面积.

18.在 $\triangle ABC$ 中, 三边长是三个连续正整数, 且最大角为钝角, 求三边长.

19.在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$, 判断此三角形的形状.

20.已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S = a^2 - (b-c)^2, b+c=8$, 求 S 的最大值.

第 10 讲:期中阶段练习

[课后练习]

I 填空题

1. 若 $\tan \alpha < 0, \cos \alpha > 0$, 则 α 为第_____象限角.

2. 化简 $\cos(31^\circ - \theta)\cos(61^\circ - \theta) + \sin(31^\circ - \theta)\sin(61^\circ - \theta) =$ _____.

3. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$ _____.

4. 把 $2\cos \alpha + 2\sqrt{3}\sin \alpha$ 化为 $A\sin(\alpha + \varphi), A > 0$ 的形式_____.

5. $100^\circ =$ _____rad.

6. 已知 $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x \in [-\pi, 0)$, 则 $\sin x =$ _____.

7. 化简 $\cos(\alpha + \frac{5\pi}{12})\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{12} - \alpha)\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) =$ _____.

8. 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的终边与单位圆交于点 A,

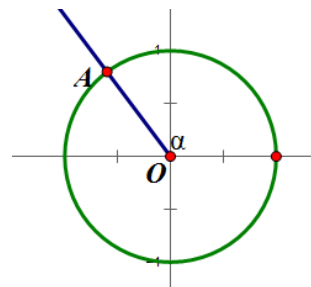
点 A 的纵坐标为 $\frac{4}{5}$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

9. 化简 $\sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] =$ _____.

10. 若 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}, \tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

11. 已知 $0 < \alpha < \pi, \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

12. 已知 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0, \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.



II 选择题

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A \cos B > \sin A \sin B$, 则 $\triangle ABC$ 为()

A. 锐角三角形; B. 直角三角形; C. 钝角三角形; D. 无法判定.

14. 设 MP 和 OM 分别是角 $\frac{17\pi}{18}$ 的正弦线和余弦线, 则给出以下不等式, 正确的是()

A. $MP < OM < 0$; B. $OM > 0 > MP$; C. $OM < MP < 0$; D. $MP > 0 > OM$.

15. 已知 $\sin \alpha > \sin \beta$ ，那么下列命题正确的是()

A. 若 α, β 是第一象限角，则 $\cos \alpha > \cos \beta$ ； B. 若 α, β 是第二象限角，则 $\tan \alpha > \tan \beta$ ；

C. 若 α, β 是第三象限角，则 $\cos \alpha > \cos \beta$ ； D. 若 α, β 是第四象限角，则 $\tan \alpha > \tan \beta$.

III 解答题

16. 已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$,

(1) 求 $\tan \alpha$ 的值； (2) 求 $2\alpha - \beta$ 的值.

17. 已知一扇形的圆心角是 α ，所在的圆的半径为 r ，

(1) 若 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $r = 10\text{cm}$ ，求扇形的弧长；

(2) 若扇形的周长是一定值 c , $c > 0$ ，当扇形的圆心角为多少时，该扇形的面积最大.

18. 已知 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 2$ ，

(1) 求 $\frac{4\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\sin \alpha + 3\cos \alpha}$ 的值； (2) 求 $2\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha$ 的值.

19. 已知 α, β 都是锐角, 且 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两根, 求

$2\sin^2(\alpha + \beta) - 3\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$ 的值.

20.(1) 是否存在实数 m , 使 $\sin x = \frac{1}{1-m}, \cos x = \frac{m}{m-1}$, 且 x 是第二象限角, 若存在, 求出实数 m ,

若不存在, 说明理由;

(2) 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1+\cos x}$ 的值.

第 11 讲:正弦函数、余弦函数的图像与性质

[知识概要]

1. 正弦函数: 定义域是实数集 $\mathbb{R}$, 按照对应法则: 对任意一个实数 x , 都有唯一确定的值 $\sin x, \cos x$ 与它对应, 这个函数就叫做正、余弦函数.

2. 五点法: 对于作函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi)$ 的图像, 先确定 $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$ 五个点, 再用光滑曲线将它们联结起来即可.

3. 正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$, 当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, y_{\max} = 1$, 当 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, y_{\min} = -1$;

余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$, 当 $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, y_{\max} = 1$, 当 $x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}, y_{\min} = -1$.

4. 正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 是奇函数, 最小正周期是 2π , 单调递增区间为

$[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$, 单调递减区间为 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$;

余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$ 是偶函数, 最小正周期是 2π , 单调递增区间为 $[2k\pi - \pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$,

单调递减区间为 $[2k\pi, 2k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z}$.

[课后练习]

I 填空题

1. 用五点法作函数 $y = -\sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像, 应先描出的 5 个点的坐标为_____.

2. 函数 $f(x) = \sin x \cos x$ 最小值是_____.

3. 函数 $f(x) = \sin x - \cos x$ 的最大值是_____.

4. 函数 $y = \frac{1}{\cos x}$ 的定义域是_____.

5. 函数 $y = \sqrt{\sin x}$ 的定义域是_____.

6. 当函数 $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 取得最大值时 x 的集合是_____.

7. 函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}), x \in \mathbb{R}$ 的最小正周期是_____.

8. 函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}), \omega > 0$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$, 则 $\omega =$ _____.

9. 函数 $y = x \sin x$ 的奇偶性是_____.

10. 设函数 $f(x) = x^3 \cos x + 1$, 若 $f(a) = 11$, 则 $f(-a) =$ _____.

11. 函数 $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的单调递增区间是_____.

12. 函数 $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, $x \in [0, 2\pi]$ 的单调递增区间是_____.

II 选择题

13. “ $a = 2$ ” 是函数 $y = 5 \sin(ax + \frac{\pi}{4})$, $a > 0$ 的最小正周期是 π 的() 条件

A. 充分非必要; B. 必要非充分; C. 充要; D. 既非充分也非必要.

14. $y = (\sin x - \cos x)^2 - 1$ 是()

A. 最小正周期为 π 的偶函数; B. 最小正周期为 π 的奇函数;

C. 最小正周期为 2π 的偶函数; D. 最小正周期为 2π 的奇函数。

15. 下列函数中, 周期为 π , 且在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上为减函数的是()

A. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$; B. $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$; C. $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; D. $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

III 解答题

16. 已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 的最大值和最小值.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 以 $AB = a$, $AC = b$, BC 为边向 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle BCD$, 问 $\angle BAC$ 为何值时, 四边形 $ABCD$ 面积最大? 并求其最大值.

18. 求函数 $f(x) = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$ 的单调递减区间.

19. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x, x \in \mathbb{R}$, 若 $f(x) \geq 1$, 求 x 的取值范围.

20. 设 $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x(a \sin x - \cos x) + \cos^2(\frac{\pi}{2} - x)$, 满足 $f(-\frac{\pi}{3}) = f(0)$, 求函数

(1) $f(x)$ 的最小正周期; (2) $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{24}]$ 上的最大值和最小值.

第 12 讲:函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与性质

[知识梳理]

1. 对于函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $A > 0, \omega > 0$,

振幅 A : A 越大, 振动幅度越大; A 越小, 振动幅度越小;

周期 T : $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ω 越大, T 越小; ω 越小, T 越大;

频率 f : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, ω 越大, 在一定区间内振动次数越多; ω 越小, 在一定区间内振动次数越少;

初相 φ : φ 决定了正弦曲线的左右位置;

定义域: $\mathbb{R}$;

值域: $[-A, A]$.

[课后练习]

I 填空题

1. 函数 $y = \sin x$, 图像上所有点横坐标_____, 纵坐标_____, 可得到 $y = 3\sin x$.

2. 函数 $y = \sin x$, 图像上所有点横坐标_____, 纵坐标_____, 可得到 $y = \sin 3x$.

3. 函数 $y = 3\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 的振幅是_____, 周期为_____, 初相为_____.

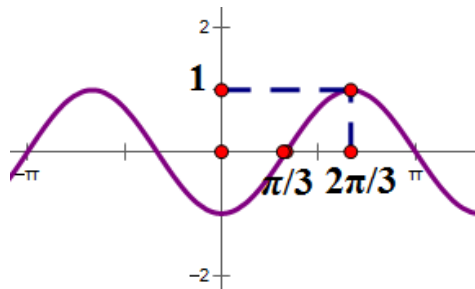
4. 方程 $\sin 2x = \sin x$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内解的个数有_____个.

5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的图像如图所示, 则 $\omega =$ _____.

6. 函数 $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$ 的最小值为_____, 最大值为_____.

7. 函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 是由 $y = \sin x$ 向_____平移_____个单位得到的.

8. 函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 图像向_____平移_____单位得到 $y = 2\sin 2x$.

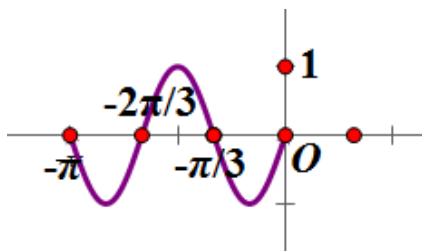


9. 若函数 $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____.

10. 函数 $y = 3 \sin 2x$ 与 y 轴距离最近的对称轴是_____.

11. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi), A > 0, \omega > 0$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上

的图像如图所示, 则 $\omega =$ _____.



12. 若函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi), \omega > 0$ 的振幅是 4, 周期是 2π ,

初相是 $-\frac{\pi}{6}$, 则函数的解析式为_____.

II 选择题

13. 将函数 $y = \sin x$ 的图像向左平移 $\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 个单位后, 得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$, 则 $\varphi =$ ()

A. $\frac{\pi}{6}$; B. $\frac{5\pi}{6}$; C. $\frac{7\pi}{6}$; D. $\frac{11\pi}{6}$.

14. 函数 $y = (\sin x + \cos x)^2 + 1$ 的最小正周期是()

A. $\frac{\pi}{2}$; B. π ; C. $\frac{3\pi}{2}$; D. 2π .

15. 为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图像, 只需把函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位; B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位;

C. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位; D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位.

III 解答题

16. 如果函数 $y = 3 \cos(2x + \varphi)$ 的图像关于点 $P(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称, 求 $|\varphi|$ 的最小值.

17. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 的图像与 x 轴的交点中, 相邻两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且图像上一个最低点为 $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$,

(1) 求 $f(x)$ 的解析式; (2) 当 $x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$, 求 $f(x)$ 的值域.

18. 设函数 $f(x) = \cos \omega x$, $\omega > 0$, 将 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图像与原图像重合, 求 ω 的最小值.

19. 设函数 $f(x) = (\sin \omega x + \cos \omega x)^2 + 2\cos^2 \omega x$, $\omega > 0$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$,

(1) 求 ω 的值;

(2) 若函数 $y = g(x)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到, 求 $y = g(x)$ 的单调递增区间.

20. 设函数 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 \frac{\pi x}{8} + 1$,

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $y = g(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称, 求当 $x \in [0, \frac{4}{3}]$ 时, $y = g(x)$ 的最大值.

第 13 讲:反三角函数与最简三角方程

[知识梳理]

1.反三角函数的性质

函数	$y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$	$y = \arccos x, x \in [-1, 1]$	$y = \arctan x, x \in \mathbb{R}$
值域	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
图像			
单调性	在 $[-1, 1]$ 上是增函数	在 $[-1, 1]$ 上是减函数	在 $\mathbb{R}$ 是增函数
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
最值	$y_{\max} = f(1) = \frac{\pi}{2},$ $y_{\min} = f(-1) = -\frac{\pi}{2}$	$y_{\max} = f(-1) = \pi,$ $y_{\min} = f(1) = 0$	无最值
常用公式	$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1, 1]$ $\arcsin \sin x = x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x.$	$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1, 1],$ $\arccos \cos x = x, x \in [0, \pi],$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$	$\tan(\arctan x) = x, x \in \mathbb{R}$ $\arctan \tan x = x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\arctan(-x) = -\arctan x.$

II 最简三角方程的解集

方程		方程的解集
$\sin x = a$	$ a > 1$	$\emptyset$
	$ a = 1$	$\{x \mid x = 2k\pi + \arcsin a, k \in \mathbb{Z}\}$
	$ a < 1$	$\{x \mid x = 2k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin a, k \in \mathbb{Z}\}$
$\cos x = a$	$ a > 1$	$\emptyset$
	$ a = 1$	$\{x \mid x = 2k\pi + \arccos a, k \in \mathbb{Z}\}$
	$ a < 1$	$\{x \mid x = 2k\pi \pm \arccos a, k \in \mathbb{Z}\}$
$\tan x = a$	$a \in \mathbb{R}$	$\{x \mid x = k\pi + \arctan a, k \in \mathbb{Z}\}$

[课后练习]

I 填空题

- 求值 $\arccos(-\frac{1}{2}) =$ _____.
- 求值 $\arctan \tan \frac{5\pi}{4} =$ _____.
- $\cos \alpha = -\frac{1}{3}, \alpha \in (\pi, 2\pi)$, 则 $\alpha =$ _____.
- 求值 $\arccos(\cos \frac{6\pi}{5}) =$ _____.
- 函数 $y = \sqrt{\arctan(x^2 - 1)}$ 的定义域为_____.
- 函数 $y = 1 - \cos x, x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上的反函数为_____.
- 方程 $\sin 2x = \sin x$ 在区间 $(-2\pi, 2\pi)$ 的解的个数为_____.
- 方程 $3^{\cos 4x+1} = 9^{\cos 2x}$ 的解集为_____.
- 方程 $\sin \frac{x}{2} + \cos x + 1 = 0$ 的解集为_____.
- 方程 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$ 的解集为_____.
- 方程 $\sin 3x \cos 5x = \sin 5x \cos 3x$ 在 $[0, 4\pi]$ 上所有解之和为_____.

12. 方程 $\lg(\sqrt{3}\sin x) = \lg(-\cos x)$ 的解集为_____.

II 选择题

13. 方程 $\tan 3x = \tan x$ 的解集为()

A. $\{x \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$; B. $\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

C. $\{x \mid x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; D. $\{x \mid x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

14. 方程 $\sin 2x = \sin^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的解的个数为()

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

15. $\sin x = \sin a$ 是 $x = k\pi + (-1)^k a, k \in \mathbb{Z}$ 的()

A. 充分非必要条件; B. 必要非充分条件; C. 充要条件; D. 既非充分又非必要条件.

III 解答题

16. 求函数 $y = \arctan(\sqrt{2}\sin x - \cos x)$ 的值域.

17. (1) 若 $\cos x = -\frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$, 求 x ; (2) 若 $\tan x = -\frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$, 求 x .

18. 解方程 $3\sin^2 x + 8\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 5$.

19. 解方程 $\frac{\sin x - 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} = 1$.

20. 已知关于 x 的方程 $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = k$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \pi]$ 上有三个实数解, 求实数 k 的取值范围.

第 14 讲:数列的概念

[知识梳理]

1. 数列的定义: 按一定的次序排列的一列数叫数列。

2. 数列的分类:

(1) 按数列的项数分是有限数列还是无限数列;

(2) 按数列的任意相邻两项之间的大小关系分类:

有递增数列 ($a_{n+1} \geq a_n$); 递减数列 ($a_{n+1} \leq a_n$); 摆动数列; 常数数列 (各项都相等)

3. 数列的通项公式:

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示, 这个公式就叫做这个数

列的通项公式。数列的通项公式 $a_n = f(n)$ 揭示了数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 的函数关系。

4. 数列的递推公式:

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项 (或前几项), 且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} (或前几项) 间的关系可以用一个公式来表示, 则这个公式叫这个数列的递推公式。

递推公式是数列特有的表示法, 它包含两个部分: 一是递推关系, 二是初始条件。两者缺一不可。

5. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系:

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 即 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 那么 S_n 与 a_n 有如下关系:

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

[课后练习]

例 1、根据数列的前几项, 写出下列各数列的一个通项公式

(1) 0.8, 0.88, 0.888, ...; (2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{13}{16}, -\frac{29}{32}, \frac{61}{64}, \dots$;

(3) $\frac{3}{2}, 1, \frac{7}{10}, \frac{9}{17}, \dots$; (4) 0, 1, 0, 1, ...

例 2、已知下面数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式：

(1) $S_n = 2n^2 - 3n$; (2) $S_n = 3^n + b$.

例 3、根据下列各个数列 $\{a_n\}$ 的首项和递推关系，求其通项公式。

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} (n \geq 2); \quad a_1 = 1, a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} (n \geq 2); \quad a_1 = -\frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1 (n \in N^*).$$

例 4、若 $f(x) = \log_2 x - \log_x 2$ ($0 < x < 1$)，数列 $\{a_n\}$ 满足 $f(2^{a_n}) = 2n, (n \in N^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式；(2) 判断此数列的单调性。

例 5、已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{9n^2 - 9n + 2}{9n^2 - 1}$

(1) 求这个数列的第 10 项；

(2) $\frac{98}{101}$ 是不是该数列中的项，为什么？

(3) 求证：数列中的各项都在区间 (0, 1) 内；

(4) 在区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 内有无数列中的项？若有，有几项？若无，说明理由。

[巩固训练]

1. 写出下面各数列的一个通项:

(1) $-\frac{1}{2 \times 4}, \frac{4}{5 \times 7}, -\frac{9}{8 \times 10}, \frac{16}{11 \times 13}, \dots$;

(2) 数列的前 n 项的和 $S_n = 2n^2 + n + 1$;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 + ra_n$ (r 为不等于 0, 1 的常数)

2、数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 4$ 且 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n (n \in N^*)$, 则 $a_{2009} =$

3、已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n^2 + 4}{2n}$, 则它的最小项为

4、在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $a_{n+2} - a_n = 1 + (-1)^n (n \in N^*)$, 则该数列的前 100 项和 $S_{100} =$

5、依次写出数 $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$ 法则如下: 如果 $a_n - 2$ 为正整数且未写出过, 则写 $a_{n+1} = a_n - 2$, 否则就写 $a_{n+1} = a_n + 3$, 那么 $a_6 =$ ()

A、2 B、4 C、6 D、5

6、已知 S_k 表示数列 $\{a_k\}$ 的前 k 项和, 且 $S_k + S_{k+1} = a_{k+1} (k \in N^*)$, 那么此数列是 ()

A、递增数列 B、递减数列 C、常数列 D、摆动数列

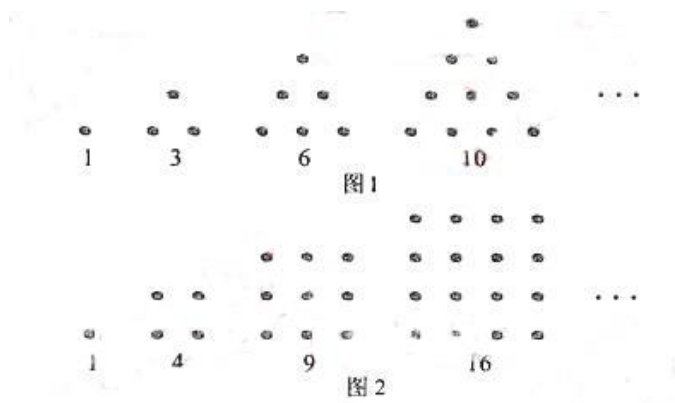
7、若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 3S_n (n \geq 1)$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

8、已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中, $2a_{n+1}^2 = 1 + a_n (n \in N^*)$ 。

(1) 试求 a_1 的值, 使得 $\{a_n\}$ 是一个常数列;

(2) 试求 a_1 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 为递增数列。

9.古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形状来研究数，例如：



他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10, $\dots$ ，由于这些数能够表示成三角形，将其称为三角形数;类似地，称图 2 中的 1, 4, 9, 16 $\dots$ 这样的数为正方形数。下列数中既是三角形数又是正方形数的是 ()

A.289

B.1024

C.1225

D.1378

第 15 讲:等差数列

[知识梳理]

1、等差数列的定义:

如果一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的差等于 , 那么这个数列就叫等差数列, 这个常数叫做 , 公差通常用字母 d 表示, 定义的表达式为_____或

2、等差中项: 如果 成等差数列, 那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项, $A =$ 。

3、等差数列的通项公式:

若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 则 $a_n =$ 。

4、等差数列的前 n 项的和公式: $S_n =$, $S_n =$ 。

5、等差数列的判定常用方法:

(1) 定义法: ;

(2) 中项法: ;

(3) 通项法: ;

(4) 前 n 项和公式法: 。

6、简单性质:(1)若 $m+n=p+q$, 则

(2) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 组成公差为 的等差数列.

(3) $a_n, a_{n+m}, a_{n+2m}, \dots$ 组成公差为 的等差数列.

[课后练习]

例 1、(1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4 = 9, a_9 = -6, S_n = 63$, 求 n .

(2)若一个等差数列前三项和为 34, 后三项和为 146, 且所有项的和为 390, 求这个数列项数.

(3)已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 10 项的和为 $S_{10} = 100$, 前 100 项的和 $S_{100} = 10$, 求前 110 项的和 S_{110} .

例 2、在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}, b_n=\frac{2}{2a_n-1}$, 其中 $n \in N^*$ 。

求证: (1) 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求证: 在数列 $\{a_n\}$ 中对于任意的 $n \in N^*$, 都有 $a_{n+1} < a_n$ 。

例 3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=3$, 通项 a_n 与前 n 项和 S_n 之间满足 $2a_n = S_n S_{n-1} (n \geq 2)$

(1) 求证: $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列, 并求公差;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在正整数 k , 使得不等式 $a_k > a_{k+1}$ 对任意不小于 k 的正整数都成立? 若存在, 求出最小的 k , 若不存在, 请说明理由.

例 4、(1) 一个等差数列的前 12 项和为 354, 前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 32:27, 求公差 d ;

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $S_9=18$, $a_{n-4}=30 (n > 9)$, $S_n=240$, 求 n .

例 5、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 若 $a_1 = 20$ ，前 n 项和为 S_n ，且 $S_{10} = S_{15}$ ，求当 n 取何值时， S_n 最大？并求出它的最大值；

(2) 若 $a_1 < 0, S_9 = S_{12}$ ，则该数列前多少项的和最小？

[巩固训练]

1、一个凸 n 边形，各内角的度数成等差数列，公差为 10° ，最小内角为 100° ，则边数 $n =$ 。

2、项数为偶数的等差数列，其奇数项之和为 24，偶数项之和为 30，且末项比首项大 11，则此数列的项数是 项。

3、等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 < 0, d \neq 0$ ，且 $|a_4| = |a_{12}|$ ，若前 n 项和 S_n 取得最小值，则 $n =$

4、首项为 -24 的等差数列，从第 10 项起开始为正数，则公差的取值范围是 ()

A、 $d > \frac{8}{3}$ B、 $d < 3$ C、 $\frac{8}{3} \leq d < 3$ D、 $\frac{8}{3} < d \leq 3$

5、设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2 = -6, a_8 = 6$ ， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 ()

A. $S_4 < S_5$ B. $S_4 = S_5$ C. $S_6 > S_5$ D. $S_6 = S_5$

6、数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$ ($n \in N^*$)，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n}$ ，

(1) 判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列，并证明你的结论；(2) 求数列 $\{b_n\}$ 中的最大项和最小项。

7、已知两个等差数列 5, 8, 11, ... 和 3, 7, 11... 都有 100 项, 问它们有多少相同的项? 并求出所相同项的和。

[能力提升]

若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则该数列的前 n 项和 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 。试对其逆命题进行研究, 写出你的结论, 并证明。

第 16 讲:等比数列

[知识梳理]

1、等比数列的定义:

如果一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的比等于 , 那么这个数列就叫等比数列, 这个常数叫做 , 公比通常用字母 q 表示, 定义的表达式为
或

2、等比中项: 如果 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项, $G =$ 。

3、等比数列的通项公式:

若等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 则 $a_n =$ 。

4、等比数列的前 n 项的和公式: $S_n =$ 。

5、等比数列的判定常用方法:

(1) 定义法: ; (2) 中项法: ;

6、简单性质:(1)若 $m+n=p+q$, 则

(2) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 组成公比为 的等比数列.

(3) $a_n, a_{n+m}, a_{n+2m}, \dots$ 组成公比为 的等比数列.

[课后练习]

例 1、已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其中 $a_7 = 1$, 且 $a_4, a_5 + 1, a_6$ 成等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 证明: 对任意 $n \in N^*$, 都有 $S_n < 128$.

例 2、设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_3 + S_6 = 2S_9$, 求公比 q 的值.

例 3、已知数列 $\{a_n\}$, S_n 是它的前 n 项和, 且 $S_{n+1} = 4a_n + 2 (n \in N^*)$, $a_1 = 1$

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - 2a_n (n \in N^*)$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列。

例 4、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n = 2^n$, $b_n = 3n + 2$, 它们公共项由小到大排列的数列是 $\{c_n\}$,

① 写出 $\{c_n\}$ 的前 5 项; ② 证明 $\{c_n\}$ 是等比数列。

例 5、在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 完成下列各题:

(1) 若 $a_n > 0 (n \in N^*)$, 且 $a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$, 求 $a_3 + a_5$ 的值;

(2) 若 $a_9 + a_{10} = a$, $a_{19} + a_{20} = b (a, b \neq 0)$, 求 $a_{99} + a_{100}$ 的值;

例 6、设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和 $S_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$

(1) 求 q 的取值范围;

(2) 设 $b_n = a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 试比较 S_n 与 T_n 的大小。

[巩固训练]

- 1、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ，且 a_1, a_3, a_9 成等比数列，则 $\frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_2 + a_4 + a_{10}} =$.
- 2、数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 2, a_n = S_{n-1} (n \geq 2, n \in N^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$
- 3、等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$ ，已知 $a_2 = 1, a_{n+2} + a_{n+1} = 6a_n$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4 =$ _____
- 4、设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, b_n = \left| \frac{a_n + 2}{a_n - 1} \right|, n \in N^*$ ，则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n =$
- 5、设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}$ 成等差数列. 类比以上结论有：设等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n ，则 $T_4, \quad, \quad, \frac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列.
- 6、已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ ，且 $a_5 \cdot a_{2n-5} = 2^{2n} (n \geq 3)$ ，则当 $n \geq 1$ 时，
 $\log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{2n-1} =$ ()
 A. $n(2n-1)$ B. $(n+1)^2$ C. n^2 D. $(n-1)^2$
- 7、数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则下列结论中不正确的有 ()
 (A) $\{a_n^2\}$ 为等比数列 (B) $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等比数列
 (C) $\{\lg a_n\}$ 为等差数列 (D) $\{\lg |a_n|\}$ 为等差数列

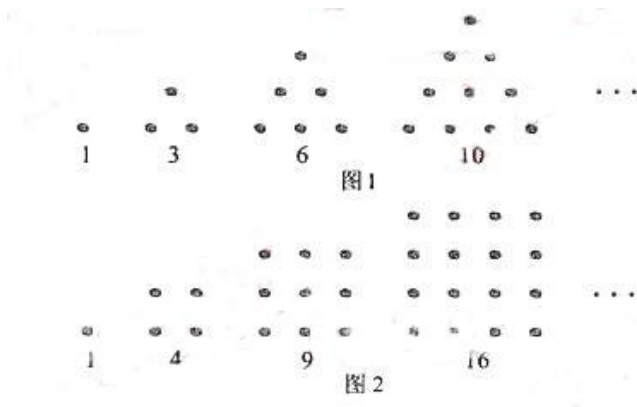
第 17 讲:等差和等比数列复习

[等差数列]

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 6$, $a_1 = 4$, 则公差 d 等于 ()

- A. 1 B. $\frac{5}{3}$ C. -2 D. 3

2. 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种性状来研究数, 例如:



他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10, $\dots$, 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地, 称图 2 中的 1, 4, 9, 16 $\dots$ 这样的数成为正方形数. 下列数中既是三角形数又是正方形数的是 ()

- A. 289 B. 1024 C. 1225 D. 1378

3. 已知非零实数 a, b, c 成等差数列, 则二次函数 $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ 的图象与 x 轴的交点个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 1 或 2 D. 0

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 1$, 公差 $d = 2$, $S_{k+2} - S_k = 24$, 则 $k =$ ()

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0$, $S_{2m-1} = 38$, 则 $m =$ ()

- A. 38 B. 20 C. 10 D. 9

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 + a_3 + a_5 = 105$, $a_2 + a_4 + a_6 = 99$, S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 S_n 达到最大值的 n 是 ()

- A. 21 B. 20 C. 19 D. 18

7. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_3 + a_9 > 0$, $S_9 < 0$, 则 $S_1, S_2, \dots, S_N$ 中最小的是 ()

- A. S_4 B. S_5 C. S_6 D. S_9

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_7 = 37$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 =$
9. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, a_4 = 7$, 则 $S_9 =$
10. 等差数列 $\{a_n\}$ 前9项的和等于前4项的和. 若 $a_1 = 1, a_k + a_4 = 0$, 则 $k =$ _____
11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_9 = 72$, 则 $a_2 + a_4 + a_9 =$
12. $\triangle ABC$ 的一个内角为 120° , 并且三边长构成公差为4的等差数列, 则 $\triangle ABC$ 的面积为
13. 若一个等差数列前3项的和为34, 最后3项的和为146, 且所有项的和为390, 则这个数列的项数 $n =$
14. 《九章算术》“竹九节”问题: 现有一根9节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列, 上面4节的容积共为3升, 下面3节的容积共4升, 则第5节的容积为_____升。
15. 所有能被7整除且被11除余2的三位数之和为
16. 若首项不为0的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前9项和与前4项和之比 $S_9 : S_4 = 81 : 16$, 则 $a_9 : a_4$ 的值为
17. 一等差数列共有奇数项, 且奇数项之和为80, 偶数项之和为75, 此数列的中间项为_____, 项数为
18. 已知 $\lg a, \lg b, \lg c$ 与 $\lg a - \lg 2b, \lg 2b - \lg 3c, \lg 3c - \lg a$ 都是等差数列, 则 a, b, c 之比为
19. 如果两等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和的比为 $\frac{5n+1}{3n-1}$, 则 $a_{15} : b_{15} =$
20. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 S_n 有唯一的最大值 S_{99} , 且 $|a_{99}| < |a_{100}|$, 求使 $S_n > 0$ 的 n 的最大值为
21. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -60, a_{17} = -12$, 记 $b_n = |a_n|$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前30项和为

[等比数列]

1. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_2 a_3 = 5, a_7 a_8 a_9 = 10$, 则 $a_4 a_5 a_6 =$.
2. 若等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n = -512$, 前 n 项和 $S_n = -341$, 则公比 $q =$,
项数 $n =$.
3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 表示前 n 项和, 若 $a_3 = 2S_2 + 1, a_4 = 2S_3 + 1$, 则公比 $q =$.
4. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $8a_2 + a_5 = 0$, 则 $\frac{S_5}{S_2} =$.
5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, 若 $a_2 = 1, a_{n+1} + a_{n+2} = 6a_n$, 则前 4 项和 $S_4 =$ _____.
6. 设等比数列的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_6}{S_3} = 3$, 则 $\frac{S_9}{S_6} =$.
7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 前 4 项之和为 240, 第 2 项和第 4 项之和为 180, 则首项为 .
8. 设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+1} (n \in N)$, 则 $f(n) =$.
9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 公比 $q \neq 1$, 设 $P = \frac{a_3 + a_9}{2}, Q = \sqrt{a_5 a_7}$, 则 P, Q 的大小关系是 .
10. 设 $\{a_n\}$ 为公比 $q > 1$ 的等比数列, 若 a_{2008} 和 a_{2009} 是方程 $4x^2 - 8x + 3 = 0$ 的两根, 则 $a_{2010} + a_{2011} =$ _____.
11. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 a_6 = 9$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} =$.
12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比不等于 1, 给出 4 个数列: ① $\{2a_n\}$; ② $\{a_n + 2\}$; ③ $\{a_n^2\}$; ④ $\left\{\frac{2}{a_n}\right\}$,
其中仍为等比数列的有 . (写出序号)
13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 若 $S_{30} = 13S_{10}, S_{10} + S_{30} = 140$, 则 S_{20} 的值为 .
14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 则 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}$ 成等差数列。类比以上结论有:
设等比数列 $\{b_n\}$ 前 n 项积为 T_n , 则 $T_4,$, , $\frac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列.
15. (1) 在公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则其公比 q 为 .
(2) 若正项等比数列 $\{a_n\}$ 公比 $q \neq 1$, 且 a_3, a_5, a_6 成等差数列, 则 $\frac{a_3 + a_5}{a_4 + a_6} =$.

16. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $|q| > 1$, 令 $b_n = a_n + 1 (n = 1, 2, \dots)$, 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53, -23, 19, 37, 82\}$ 中, 则 $6q =$.

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -4$, 则 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| =$.

18. 已知函数 $f(x) = 2^x$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 若 $f(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) = 4$, 则 $\log_2 [f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot f(a_3) \cdot \dots \cdot f(a_{10})] =$.

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$, 首项为 a_1 , 公比为 q , 则 $\{a_n\}$ 为递增数列的充要条件是 ()

A. $q > 1$ B. $a_1 > 0$ 且 $q > 0$ C. $a_1 > 0$ 且 $q > 1$ D. $a_1 > 0, q > 1$ 或 $a_1 < 0, 0 < q < 1$

20. 某商品的单价今年第一、二季度均比上一季度降低 10%, 第三、四季度均比上一季度上升 10%, 则今年第四季度与去年第四季度的单价比较, 正确的是 ()

A. 不增不减; B. 均减 2%; C. 均增 2%; D. 均减 3%

21. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = \frac{1}{5}$, 且对任意正整数 m, n , 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 若 $S_n < a$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 4

22. $\{a_n\}$ 是由实数构成的等比数列, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 关于数列 $\{S_n\}$ 给出下列命题:

① 数列 $\{S_n\}$ 中任意一项均不为 0; ② 数列 $\{S_n\}$ 中必有一项为 0; ③ 数列 $\{S_n\}$ 中任意一项均不为 0, 或者有多项 0; ④ 数列 $\{S_n\}$ 中不可能出现 $S_n = S_{n+2}$; ⑤ 数列 $\{S_n\}$ 中不可能出现 $S_n = S_{n+3}$, 则其中正确的是 ()

A. ①④; B. ②③; C. ③⑤; D. ④⑤

23. 设 $\{a_n\}$ 是各项为正数的无穷数列, A_i 是边长为 a_i, a_{i+1} 的矩形面积 ($i \in \mathbb{N}^*$), 则 $\{A_n\}$ 为等比数列的充要条件为 ()

A. $\{a_n\}$ 是等比数列; B. $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$ 或 $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$ 是等比数列;

C. $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$ 和 $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$ 均是等比数列;

D. $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$ 和 $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$ 均是等比数列, 且公比相同

24. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 + a_n = 66, a_2 a_{n-1} = 128, S_n = 126$, 求 n 和公比 q 的值.

25. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n \cdot a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 试求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

26. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_1 + 3a_2 = 1, a_3^2 = 9a_2a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 设 $b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

27. 设数列 $\{a_n\}$, $a_1 = \frac{5}{6}$, 若以 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为系数的二次方程 $a_{n-1}x^2 - a_nx + 1 = 0$ ($n \geq 2, n \in N^*$)

都有根 α, β 满足 $3\alpha - \alpha\beta + 3\beta = 1$.

(1) 求证: $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列; (2) 求 a_n ; (3) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .