

[参考答案]

第1讲:任意角及其度量

1. $-\frac{\pi}{6}$, 45° , $\frac{360^\circ}{\pi}$; 2. 四, 一; 3. $\frac{20}{3}\pi, \frac{100}{3}\pi$; 4. $\frac{\pi}{3}$; 5. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;
6. $\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$; 7. $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 8. 0; 9. $\frac{2}{5}$; 10. $\pm\frac{3}{5}$; 11. $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}$; 12. $P(-3,1)$.

13. D; 14. C; 15. D.

16. $2\sin\alpha$

17. 第四; 第二或第三; 第一或第三; 第一或第四.

18. $\cos\alpha$.

19. (1) $[2k\pi + \frac{2}{3}\pi, 2k\pi + \frac{4}{3}\pi], k \in \mathbb{Z}$; (2) $(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\pi), k \in \mathbb{Z}$

20. 证明略.

第2讲: 同角三角比的关系和诱导公式

1. $\frac{1}{2}$; 2. $\sqrt{3}$; 3. $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$; 4. $1 - \sqrt{3}$; 5. $2\sec^2\alpha$; 6. $2\sec^2\alpha$;
7. -2; 8. $-\frac{5}{3}$; 9. $-\frac{5}{12}$; 10. $-\frac{4}{5}$; 11. -1; 12. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

13. D; 14. B; 15. D.

16. 5.

17. $\frac{7}{18}, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{22}{27}$.

18. $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$.

19. $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 16$.

20. $\frac{4}{3}, -\frac{9+4\sqrt{2}}{7}, \frac{22}{27}$.

第3讲:两角和与差的余弦,正弦

1. $\frac{1}{3}$; 2. $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 3. $\sqrt{2}\cos\alpha$; 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5. -1; 6. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; 7. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 8. 1; 9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

10. $\frac{24}{5}$; 11. $\frac{63}{65}$; 12. $-\frac{4}{5}$.

13. B; 14. B; 15. A.

16.略.

17.原式 $= \frac{\tan\alpha+5}{\tan\alpha-3} = -\frac{3}{5}$.

18.第四象限角.

19. $-\frac{56}{65}, -\frac{16}{65}$.

20. $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}$.

第4讲:两角和与差的正切

1. $2-\sqrt{3}$; 2. $-\frac{1}{3}$; 3. -1; 4. $\frac{3}{22}$; 5. $\sqrt{3}$; 6. $-\frac{3}{4}$; 7. $2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$; 8. $\frac{8}{5}$; 9. $2\cos(\alpha+\frac{11}{6}\pi)$;

10. $\sqrt{3}$; 11. $\frac{3}{10}$; 12. $2-\sqrt{3}$.

13. D; 14. B; 15. B.

16. $a = \frac{1}{9}$.

17. 原式 $= \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

18. $\tan(2\alpha-\beta)=1, 2\alpha-\beta = -\frac{3}{4}\pi$.

19. $m = \sqrt{3}$.

20. $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}$.

第5讲:二倍角的正弦、余弦和正切

1. $\frac{1}{4}$; 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3. 4; 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5. 7; 6. $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 7. $\frac{7}{25}$; 8. $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 9. $\frac{1}{4}\sin 2x$; 10. $\sin 1 - \cos 1$;

11. $\sqrt{1-a}$; 12. -2.

13. D; 14. B; 15. A.

16. $2\sqrt{2}-3$.

17. $\frac{25}{54}\sqrt{2}, -\frac{17}{81}$

18. $\frac{24}{13}$.

19. $\frac{3}{2}$.

20. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

第6讲:半角的正弦、余弦、正切

1. $-\frac{\sqrt{15}}{5}$; 2. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$; 3. 2; 4. $-\frac{1}{2}\sin \theta$; 5. $\tan \frac{\theta}{2}$; 6. $\frac{\sqrt{26}}{26}$ 或 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$; 7. -2; 8. -5; 9. 32;

10. $-b$; 11. $\frac{6}{5}$; 12. $\frac{t^2-1}{1+t^2}$.

13. C; 14. B; 15. C.

16. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

17. $\frac{5}{13}$.

18. $\sqrt{3}$.

19. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

20. $\tan \beta_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 此时 $\tan(\alpha + \beta) = \sqrt{2}$.

第7讲:三角比的阶段测试

1. 一、三; 2. $\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{24}{7}$; 5. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 6. $\frac{1}{2}$; 7. $\frac{11}{18}$; 8. $2\csc 1$; 9. 等腰三角形;

10. $\frac{2}{3}\sqrt{39}$; 11. $\frac{2}{3}$; 12. $-\frac{2\pi}{3}$.

13. C; 14. B; 15. C.

16. $\frac{\pi}{4}$.

17. $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

18. 三边长为 2,3,4, 最小角的余弦值为 $\frac{7}{8}$.

19. (1) $\frac{63}{65}$; (2) $-\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$.

20. 等腰三角形或直角三角形.

第8讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(一)

1. 55; 2. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$; 3. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$; 4. $c = \frac{2}{3}\sqrt{3}$; 5. $\frac{15}{8}$; 6. 直角; 7. 直角三角形; 8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9. $300\sqrt{3}$;

10. $\frac{2\pi}{3}$; 11. $\frac{\pi}{6}$; 12. 充要.

13. D; 14. C; 15. A.

16. $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

17. $(0, \frac{\pi}{6}]$.

18. $\frac{63}{65}$.

19. 4.

20. $12\sqrt{3}$.

第9讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(二)

1. $2\sqrt{19}$; 2. 等腰三角形或直角三角形; 3. $\frac{2\pi}{3}$; 4. 锐角三角形; 5. 等腰三角形; 6. 等边三角形;

7. $\sqrt{13}, \pi - \arccos \frac{\sqrt{13}}{13}$; 8. $40\sqrt{3}$; 9. 14; 10. $\frac{t \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; 11. $\sqrt{3}a$; 12. $25 - \frac{25}{3}\sqrt{3}$.

13. D; 14. C; 15. D.

16. $\frac{1}{4}$.

17. $9, 6\sqrt{5}$.

18. 2、3、4

19. 等腰三角形.

20. $S_{\max} = \frac{64}{17}$.

第10讲:期中阶段练习

1. 二; 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3. $-\frac{1}{3}$; 4. $4\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$; 5. $\frac{5\pi}{9}$; 6. $-\frac{1}{2}$; 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8. $-\frac{3}{5}$; 9. 0; 10. $\frac{3}{22}$;

11. $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$; 12. $-\frac{1}{2}$.

13. C; 14. D; 15. D.

16. (1) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$; (2) $2\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}$.

17. (1) $l = \frac{10\pi}{3} \text{ cm}$; (2) $S = \frac{c^2}{16}$.

18. (1) $-\frac{1}{7}$; (2) $\frac{7}{5}$.

19. 3

20. (1) 不存在; (2) $4 - 2\sqrt{2}$.

第 11 讲:正弦函数、余弦函数的图像与性质

1. $(0,0), (\frac{\pi}{2}, -1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, 1), (2\pi, 0)$; 2. $-\frac{1}{2}$; 3. $\sqrt{2}$; 4. $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$; 5. $[2k\pi, 2k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z}$; 6. $\{x | x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\}$; 7. π ; 8. 10; 9. 偶; 10. -9;
11. $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}], k \in \mathbb{Z}$; 12. $[0, \frac{\pi}{6}], [\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$.
13. A; 14. B; 15. A
16. 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = 2$; 当 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\min} = -1$.
17. $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 时, $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) + ab$.
18. $[4k\pi + \frac{\pi}{3}, 4k\pi + \frac{7\pi}{3}], k \in \mathbb{Z}$.
19. $x \in [2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z}$.
20. (1) $T = \pi$; (2) $y_{\min} = \sqrt{2}, y_{\max} = 2$.

第 12 讲:函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与性质

1. 不变, 变为原来的 3 倍; 2. 变为原来的 $\frac{1}{3}$, 不变; 3. $3, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$; 4. 3; 5. $\frac{3}{2}$; 6. $-3, \frac{3}{2}$; 7. 左, $\frac{\pi}{4}$; 8. 右, $\frac{\pi}{6}$; 9. 2; 10. $x = \frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{4}$; 11. 3; 12. $y = 4\sin(x - \frac{\pi}{6})$.
13. D; 14. B; 15. B.
16. $|\varphi|_{\min} = \frac{\pi}{6}$.
17. (1) $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$; (2) $[-1, 2]$.
18. $\omega_{\min} = 6$.
19. (1) $\omega = \frac{3}{2}$; (2) $[\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{12}], k \in \mathbb{Z}$.
20. (1) $T = 8$; (2) $g(x)_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

第 13 讲:反三角函数与最简三角方程

1. $\frac{2\pi}{3}$; 2. $\frac{\pi}{4}$; 3. $\pi + \arccos \frac{1}{3}$; 4. $\frac{4\pi}{5}$; 5. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; 6. $y = \arccos(1-x), x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$;

7. 7; 8. $\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; 9. $\{x \mid x = 2k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$;

10. $\{x \mid x = 2k\pi, x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$; 11. 18π ; 12. $\{x \mid x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$.

13. A; 14. D; 15. C.

16. $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

17. (1) $x = \arcsin \frac{1}{3}, x = \pi - \arcsin \frac{1}{3}$; (2) $x = \pi - \arctan \frac{1}{2}, x = 2\pi - \arctan \frac{1}{2}$.

18. $\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$.

19. $\{x \mid x = k\pi - \arctan 3, k \in \mathbb{Z}\}$.

20. $k \in [1, 2)$.

第 14 讲:数列的概念

一、知识梳理

一、数列及相关概念

1、数列及数列的项

按一定次序排列的一列数叫做数列，数列中的每一个数都叫做这个数列的项。

2、数列的通项公式

数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式。

二、数列与函数

数列可以看作是一个定义域为正整数集 N^* （或它的有限子集 $\{1,2,3,\dots, n\}$ ）的函数，当自变量 n 从1开始依次取值时对应的一系列函数值。数列的通项公式是相应函数的解析式，它的图像是一群孤立点。

三、数列的分类

1、根据数列的项数可分为 有穷数列 、 无穷数列 。

2、按照数列的每一项序号变化的情况可分为：

（1）递增数列；（2）递减数列；（3）摆动数列；（4）常数列。

四、递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第一项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} （或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式。

二、典型例题

例 1、根据数列的前几项，写出下列各数列的一个通项公式：

（1）0.8, 0.88, 0.888,...

（2） $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{13}{16}, -\frac{29}{32}, \frac{61}{64}, \dots$;

（3） $\frac{3}{2}, 1, \frac{7}{10}, \frac{9}{17}, \dots$;

（4）0,1,0,1,...

解：（1） $\frac{8}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

$$(2) (-1)^n \frac{2^n - 3}{2^n}$$

$$(3) \frac{2n+1}{n^2+1}$$

$$(4) a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ 1 & n \text{ 为偶数} \end{cases}; \quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{2};$$

$$a_n = \sin^2 \frac{(n+1)\pi}{2}; \quad a_n = \frac{1+\cos n\pi}{2} \text{ 等。}$$

例 2、已知下面数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式：

$$(1) S_n = 2n^2 - 3n;$$

$$(2) S_n = 3^n + b。$$

解：(1) $a_n = 4n - 5$

$$(2) \text{ 当 } b = -1 \text{ 时, } a_n = 2 \cdot 3^{n-1};$$

$$\text{当 } b \neq -1 \text{ 时, } a_n = \begin{cases} 3+b & n=1 \\ 2 \cdot 3^{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

例 3、根据下列各个数列 $\{a_n\}$ 的首项和递推关系，求其通项公式。

$$(1) a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} (n \geq 2);$$

$$(2) a_1 = 1, a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} (n \geq 2);$$

$$(3) a_1 = -\frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1 (n \in N^*);$$

解：(1) 由 $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$ 得 $a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$ ，所以

$$a_2 - a_1 = 3,$$

$$a_3 - a_2 = 3^2,$$

$$a_4 - a_3 = 3^3,$$

$\dots,$

$$a_n - a_{n-1} = 3^{n-1},$$

$$\text{累加得 } a_n - a_1 = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} = \frac{3^n - 3}{2},$$

$$\text{又因为 } a_1 = 1, \text{ 故 } a_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$(2) \text{ 由 } a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} \text{ 得 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n}, \text{ 所以}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n},$$

$$\text{累乘得 } \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}, \text{ 又因为 } a_1 = 1, \text{ 故 } a_n = \frac{1}{n}$$

$$(3) \text{ 设 } a_{n+1} + x = \frac{1}{2}(a_n + x) \text{ 得 } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}x,$$

$$\text{与 } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \text{ 对照可得 } -\frac{1}{2}x = 1, \text{ 所以 } x = -2,$$

$$\text{从而有 } a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2), \text{ 且 } a_1 - 2 = -\frac{5}{2},$$

$$\text{所以 } \{a_n - 2\} \text{ 是以 } -\frac{5}{2} \text{ 为首项, } \frac{1}{2} \text{ 为公比的等比数列。}$$

$$\text{所以 } a_n - 2 = -\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 所以 } a_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

例 4、若 $f(x) = \log_2 x - \log_x 2$ ($0 < x < 1$), 数列 $\{a_n\}$ 满足 $f(2^{a_n}) = 2n, (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式;

(2) 判断此数列的单调性。

解: (1) 由 $f(x) = \log_2 x - \log_x 2$ 得

$$f(2^{a_n}) = \log_2 2^{a_n} - \log_{2^{a_n}} 2 = a_n - \frac{1}{a_n} = 2n,$$

$$\text{所以 } a_n^2 - 2na_n - 1 = 0, \text{ 解得 } a_n = n \pm \sqrt{n^2 + 1}.$$

$$\text{因为 } 0 < x < 1, \text{ 所以 } 0 < 2^{a_n} < 1, \text{ 从而有 } a_n < 0.$$

$$\text{故 } a_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$$

(2)

$$\begin{aligned}a_n &= n - \sqrt{n^2 + 1} \\&= \frac{(n - \sqrt{n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})}{n + \sqrt{n^2 + 1}} \\&= -\frac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}\end{aligned}$$

易得函数 $f(x) = -\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

从而数列 $\{a_n\}$ 是递增数列。

例 5、已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{9n^2 - 9n + 2}{9n^2 - 1}$

(1) 求这个数列的第 10 项;

(2) $\frac{98}{101}$ 是不是该数列中的项, 为什么?

(3) 求证: 数列中的各项都在区间 $(0, 1)$ 内;

(4) 在区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 内有无数列中的项? 若有, 有几项? 若无, 说明理由。

解: 设 $f(n) = \frac{9n^2 - 9n + 2}{9n^2 - 1} = \frac{3n - 2}{3n + 1}$

(1) 令 $n=10$, 得第 10 项: $a_{10} = \frac{28}{31}$

(2) 令 $\frac{3n - 2}{3n + 1} = \frac{98}{101}$, 得 $9n = 300$,

此方程无自然数解, 所以不是其中的项

(3) 证明:

$$\because a_n = \frac{3n-2}{3n+1} = \frac{3n+1-3}{3n+1} = 1 - \frac{3}{3n+1}$$

$$\because n \in N^*, \therefore 0 < \frac{3}{3n+1} < 1, \therefore 0 < a_n < 1$$

(4)

$$\frac{1}{3} < a_n = \frac{3n-2}{3n+1} < \frac{2}{3},$$

$$\text{令 } \begin{cases} 3n+1 < 9n-6 \\ 9n-6 < 6n+2 \end{cases} \therefore \begin{cases} n > \frac{7}{6} \\ n < \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{7}{6} < n < \frac{8}{3} \quad \therefore \text{当且仅当 } n=2, \text{在区间内}$$

三、巩固训练

1. 写出下面各数列的一个通项:

$$(1) -\frac{1}{2 \times 4}, \frac{4}{5 \times 7}, -\frac{9}{8 \times 10}, \frac{16}{11 \times 13}, \dots;$$

$$a_n = (-1)^n \frac{n^2}{(3n-1)(3n+1)}$$

(2) 数列的前 n 项的和 $S_n = 2n^2 + n + 1$;

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ 4n-1 & (n \geq 2) \end{cases}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 + ra_n$ (r 为不等于 0,1 的常数) .

$$a_n = \frac{1}{1-r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{n-1}$$

2、数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_2=4$ 且 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n (n \in N^*)$, 则 $a_{2009} = -4$

提示: 依次写出数列前几项可得

1, 4, 3, -1, -4, -3, 1, 4, $\dots$,

得 $a_n = a_{n+6}$ ，从而有 $a_{2009} = a_5 = -4$

3、已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n^2 + 4}{2n}$ ，则它的最小项为 2

4、在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，且 $a_{n+2} - a_n = 1 + (-1)^n (n \in N^*)$ ，则该数列的前 100 项和 $S_{100} = 2600$

提示： $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2k-1} = \cdots$ ，

$$a_{2k+2} - a_{2k} = 2 (k \in N^*),$$

$$\text{所以 } S_{100} = 50 \times 1 + \frac{50}{2} (2 + 100) = 2600$$

5、依次写出数 $a_1 = 1, a_2, a_3, \cdots$ 法则如下：如果 $a_n - 2$ 为正整数且未写出过，则写 $a_{n+1} = a_n - 2$ ，否

则就写 $a_{n+1} = a_n + 3$ ，那么 $a_6 =$ (C)

A、2 B、4 C、6 D、5

提示：此数列的项依次为 1, 4, 2, 5, 3, 6, ...

6、已知 S_k 表示数列 $\{a_k\}$ 的前 k 项和，且 $S_k + S_{k+1} = a_{k+1} (k \in N^*)$ ，那么此数列是 (C)

A、递增数列 B、递减数列 C、常数列 D、摆动数列

提示：由 $S_k + S_{k+1} = a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ 可得 $S_k = 0$ ，

且 $a_1 = S_1 = 0$ ，故该数列每项均为 0.

7、若数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_{n+1} = 3S_n (n \geq 1)$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

$$\text{解： } a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 3 \cdot 4^{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

8、已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中， $2a_{n+1}^2 = 1 + a_n (n \in N^*)$ 。

(1) 试求 a_1 的值，使得 $\{a_n\}$ 是一个常数列；

(2) 试求 a_1 的取值范围，使得 $\{a_n\}$ 为递增数列。

解：(1) 欲使正数数列 $\{a_n\}$ 是一个常数列，则 $a_{n+1} = a_n$ ， $\therefore 2a_n^2 = 1 + a_n$ ，

$$\text{解得 } a_n = 1 \text{ 或 } a_n = -\frac{1}{2} \text{ (舍)，即 } a_1 = a_n = 1。$$

$$(2) \because 2a_{n+1}^2 = 1 + a_n, \therefore 2a_n^2 = 1 + a_{n-1},$$

$$\text{两式相减得 } 2(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) = a_n - a_{n-1},$$

而 $a_{n+1} + a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} - a_n$ 与 $a_n - a_{n-1}$ 同号。

即 $a_{n+1} - a_n, a_n - a_{n-1}, a_{n-1} - a_{n-2}, \dots, a_2 - a_1$

有相同的符号。

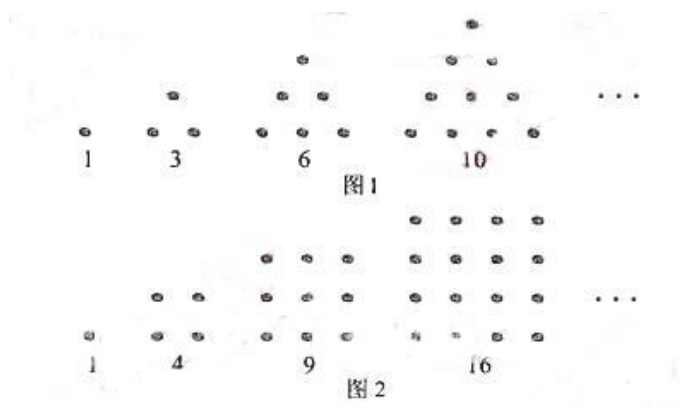
要使 $a_{n+1} > a_n$ 对任意的 $n \in N^*$ 都成立, 只需 $a_2 > a_1$ 。

$$\text{由 } \sqrt{\frac{1+a_1}{2}} > a_1 \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < a_1 < 1,$$

又 $a_1 > 0$, 故 $0 < a_1 < 1$ 。

能力提升

古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形状来研究数, 例如:



他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10, ..., 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地,

称图 2 中的 1, 4, 9, 16... 这样的数为正方形数。下列数中既是三角形数又是正方形数的是 (C)

A. 289

B. 1024

C. 1225

D. 1378

【解析】由图形可得三角形数构成的数列通项 $a_n = \frac{n}{2}(n+1)$,

同理可得正方形数构成的数列通项 $b_n = n^2$,

第 15 讲:等差数列

知识梳理

1、等差数列的定义:

如果一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的差

等于 同一个常数 , 那么这个数列就叫等差数列,

这个常数叫做 等差数列的公差 , 公差通常用字母 d 表示, 定义的表达式为

$$a_n - a_{n-1} = d (n \geq 2, n \in N^*)$$

$$\text{或 } a_{n+1} - a_n = d (n \in N^*)$$

2、等差中项: 如果 a, A, b 成等差数列, 那么 A 叫做

$$a \text{ 与 } b \text{ 的等差中项, } A = \frac{a+b}{2}.$$

3、等差数列的通项公式:

若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。

$$4、\text{等差数列的前 } n \text{ 项的和公式: } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

5、等差数列的判定常用方法:

$$(1) \text{ 定义法: } a_n - a_{n-1} = d;$$

$$(2) \text{ 中项法: } 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1};$$

$$(3) \text{ 通项法: } a_n = dn + c;$$

$$(4) \text{ 前 } n \text{ 项和公式法: } S_n = an^2 + bn.$$

6、简单性质:(1)若 $m+n=p+q$, 则 $\underline{a_m + a_n = a_p + a_q}$

(2) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 组成公差为 n^2d 的等差数列.

(3) $a_n, a_{n+m}, a_{n+2m}, \dots$ 组成公差为 md 的等差数列.

典型例题

考点一：等差数列的基本运算

例 1、

(1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_4 = 9, a_9 = -6, S_n = 63$,

求 n .

(2)若一个等差数列前三项和为 34,后三项和为 146,且所有项的和为 390,求这个数列项数.

(3)已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,前 10 项的和为 $S_{10} = 100$, 前 100 项的和 $S_{100} = 10$,求前 110 项的和 S_{110} .

解: (1) 设首项为 a_1 , 公差为 d , 则

$$\begin{cases} 9 = a_1 + 3d \\ -6 = a_1 + 8d \end{cases} \text{得} \begin{cases} a_1 = 18 \\ d = -3 \end{cases}$$

$$\therefore 63 = S_n = 18n - \frac{3}{2}n(n-1) \text{得: } n = 6 \text{ 或 } n = 7$$

(2)

$$\because a_1 + a_2 + a_3 = 34, \text{ 又 } a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 146,$$

$$\because a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

$$\therefore \text{两式相加得: } 3(a_1 + a_n) = 180, a_1 + a_n = 60,$$

$$\text{由 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 390, \text{ 得 } n = 13$$

(3)分析一:方程的思想,将题目条件应用公式表示成

关于首项 a_1 与公差 d 的两个方程.

设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差 d , 则

$$\begin{cases} 10a_1 + \frac{1}{2} \times 10 \times 9d = 100 \\ 100a_1 + \frac{1}{2} \times 100 \times 99d = 10 \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a_1 = -\frac{11}{50} \\ d = \frac{1099}{100} \end{cases}$$

$$\therefore S_{110} = 110a_1 + \frac{1}{2} \times 110 \times 109d = -110$$

分析二:运用前 n 项和变式: $S_n = An^2 + Bn$

$\{a_n\}$ 为等差数列,故可设 $S_n = An^2 + Bn$,

$$\text{则} \begin{cases} 100A+10B=100 \\ 10000A+100B=10 \end{cases} \text{两式相减化简得}$$

$$110A+B=-1$$

$$\therefore S_{110} = 110^2 A + 110B = 110(110A+B) = -110$$

$$\text{分析三: } \because S_{100} - S_{10} = \frac{(a_{11} + a_{100}) \times 90}{2} = -90$$

$$\therefore a_{11} + a_{100} = -2$$

$$\therefore S_{110} = \frac{110(a_1 + a_{110})}{2} = \frac{(a_{11} + a_{100}) \times 110}{2} = -110$$

考点二：等差数列的判定

例 2、在数列 $\{a_n\}$ 中，

$$a_1=1, a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}, b_n=\frac{2}{2a_n-1}, \text{ 其中 } n \in N^*。$$

求证：（1）数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；（2）求证：在数列 $\{a_n\}$ 中对于任意的 $n \in N^*$ ，都有 $a_{n+1} < a_n$ 。

证明：（1）因为

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{2}{2a_{n+1}-1} - \frac{2}{2a_n-1} \\ &= \frac{2}{2(1-\frac{1}{4a_n})-1} - \frac{2}{2a_n-1} \\ &= \frac{4a_n}{2a_n-1} - \frac{2}{2a_n-1} = 2, \quad n \in N^*, \end{aligned}$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列。

$$\text{（2）因为 } a_1=1, \text{ 所以 } b_1 = \frac{2}{2a_1-1} = 2,$$

$$\text{所以 } b_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n。$$

$$\text{由 } b_n = \frac{2}{2a_n-1} \text{ 得 } 2a_n-1 = \frac{2}{b_n} = \frac{1}{n}, \text{ 故 } a_n = \frac{n+1}{2n}。$$

$$\text{由 } a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{2(n+1)} - \frac{n+1}{2n} = \frac{-1}{2n(n+1)} < 0$$

得在数列 $\{a_n\}$ 中对于任意的 $n \in N^*$, 都有 $a_{n+1} < a_n$

例 3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 3$, 通项 a_n 与前 n 项和 S_n 之间满足 $2a_n = S_n S_{n-1} (n \geq 2)$

(1) 求证: $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列, 并求公差;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在正整数 k , 使得不等式 $a_k > a_{k+1}$ 对任意不小于 k 的正整数都成立? 若存在, 求出最小的 k , 若不存在, 请说明理由.

$$\text{解: (1) 当 } n \geq 2 \text{ 时, } \begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1} \\ 2a_n = S_n S_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S_n - 2S_{n-1} = S_n S_{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = -\frac{1}{2}, \text{ 而 } \frac{1}{S_1} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \left\{\frac{1}{S_n}\right\} \text{ 是首项为 } \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{2} \text{ 的等差数列}$$

$$(2) \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5-3n}{6}, \therefore S_n = \frac{6}{5-3n}$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{1}{2} S_n S_{n-1} = \frac{18}{(3n-5)(3n-8)}$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n=1), \\ \frac{18}{(3n-5)(3n-8)} & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$(3) a_1 = 3, a_2 = -9, a_1 > a_2,$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$a_k - a_{k+1} = \frac{108}{(3k-2)(3k-5)(3k-8)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < k < \frac{5}{3} \text{ 或 } k > \frac{8}{3}, \therefore \text{当 } k \geq 3 \text{ 时, 有 } a_k > a_{k+1}$$

所求最小 $k=3$.

考点三: 等差数列的性质

例 4、(1) 一个等差数列的前 12 项和为 354，前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 32:27，求公差 d ；

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_9 = 18$ ， $a_{n-4} = 30 (n > 9)$ ， $S_n = 240$ ，求 n 。

$$\text{解：(1) 由题意得 } \begin{cases} S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = 354 \\ S_{\text{偶}} : S_{\text{奇}} = 32 : 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{\text{偶}} = 192 \\ S_{\text{奇}} = 162 \end{cases}$$

又因为 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = 6d = 30$ ，故 $d = 5$ 。

$$(2) \text{ 由 } S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = 9a_5 = 18 \text{ 得 } a_5 = 2,$$

$$\text{又 } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_5 + a_{n-4}) = \frac{n}{2}(2 + 30) = 240,$$

故 $n = 15$ 。

考点四：数列中的范围与最值问题

例 5、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 若 $a_1 = 20$ ，前 n 项和为 S_n ，且 $S_{10} = S_{15}$ ，求当 n 取何值时， S_n 最大？并求出它的最大值；

(2) 若 $a_1 < 0$ ， $S_9 = S_{12}$ ，则该数列前多少项的和最小？

$$\text{解：(1) 由 } a_1 = 20, S_{10} = S_{15}, \text{ 解得公差 } d = -\frac{5}{3}.$$

$$\because S_{10} = S_{15}, \therefore S_{15} - S_{10} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 0 \because a_{11} + a_{15} = a_{12} + a_{14} = 2a_{13}, \therefore a_{13} = 0.$$

因为公差 $d < 0$ ， $a_1 > 0$ ，所以 $a_1, a_2, \dots, a_{11}, a_{12}$ 均为正数，而 a_{14} 及以后各项均为负数。

所以当 $n = 12$ 或 13 时， S_n 有最大值 $S_{12} = S_{13} = 130$ 。

(2) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则由题意得

$$9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d = 12a_1 + \frac{12 \times 11}{2}d,$$

$$\text{即 } 3a_1 = -30d, \text{ 所以 } a_1 = -10d. \because a_1 < 0, d > 0$$

$$\therefore S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d = \frac{1}{2}dn^2 - \frac{21}{2}dn$$

$$= \frac{d}{2}\left(n - \frac{21}{2}\right)^2 - \frac{441}{8}d$$

所以 S_n 有最小值。又因为 $n \in \mathbb{N}^*$ ，

故当 $n=10$ 或 11 时 S_n 取最小值。

巩固训练

1、一个凸 n 边形, 各内角的度数成等差数列, 公差为 10° , 最小内角为 100° , 则边数 $n = 8$.

提示: $100n + \frac{n(n-1)}{2} \times 10 = 180(n-2)$

解得 $n=8$ 或 9 。当 $n=9$ 时, 最大内角为 180° , 舍去。

2、项数为偶数的等差数列, 其奇数项之和为 24 , 偶数项之和为 30 , 且末项比首项大 11 , 则此数列的项数是 12 项。

解: 设一共有 $2n$ 项, 则

$$S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd = 6 \text{ ①}$$

$$\text{又 } a_{2n} - a_1 = (2n-1)d = 11 \text{ ②},$$

由 ① $\div$ ② 得 $n=6$, 所以一共有 12 项。

3、等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 < 0, d \neq 0$, 且 $|a_4| = |a_{12}|$, 若前 n 项和 S_n 取得最小值, 则 $n = 7$ 或 8

解: 有题意得 $a_4 < 0, a_{12} > 0$, 故 $d > 0$ 且 $a_4 + a_{12} = 0$, 即 $a_8 = 0$ 。

4、首项为 -24 的等差数列, 从第 10 项起开始为正数, 则公差的取值范围是 (D)

A、 $d > \frac{8}{3}$ B、 $d < 3$ C、 $\frac{8}{3} \leq d < 3$ D、 $\frac{8}{3} < d \leq 3$

$$\text{解: } \begin{cases} a_{10} = -24 + 9d > 0 \\ a_9 = -24 + 8d < 0 \end{cases}$$

5、设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 = -6, a_8 = 6$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 (B)

A. $S_4 < S_5$ B. $S_4 = S_5$ C. $S_6 < S_5$ D. $S_6 = S_5$

6、数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$ ($n \in N^*$), 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n}$,

(1) 判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列, 并证明你的结论;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 中的最大项和最小项。

答案: (1) $a_n = n - \frac{5}{2}$, 是等差数列

(2) $b_n = 1 + \frac{2}{2n-5}$, 最大项 $b_3 = 3$, 最小项 $b_2 = -1$

7、已知两个等差数列 5, 8, 11, ... 和 3, 7, 11... 都有 100 项, 问它们有多少相同的项? 并求出所有相同项的和。

分析一: 两个等差数列的相同的项按原来的先后次序组成一个等差数列, 且公差为原来两个公差的最小公倍数。

解: 设两个数列相同项按原来的前后次序

组成的新数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_1 = 11$

$\because$ 数列 5, 8, 11, ... 和 3, 7, 11... 的公差分别为 3 与 4

$\therefore \{a_n\}$ 的公差 $d = 3 \times 4 = 12, \therefore a_n = 12n - 1$

又因为数列 5, 8, 11, ... 和 3, 7, 11... 的

第 100 项分别是 302 和 399,

$\therefore a_n = 12n - 1 \leq 302$ 即 $n \leq 25.5$, 又 $n \in N^*$,

所以两个数列有 25 个相同的项。

其和 $S_{25} = 11 \times 25 + \frac{25 \times 24}{2} \times 12 = 3875$

分析二: 由条件可知两个等差数列的通项公式,

可用不定方程的求解法来求解。

解: 设数列 5, 8, 11, ... 和 3, 7, 11... 分别

为 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 则 $a_n = 3n + 2, b_n = 4n - 1$

设 $\{a_n\}$ 中的第 n 项与 $\{b_n\}$ 中的第 m 项相同, 即

$3n + 2 = 4m - 1 \therefore n = \frac{4}{3}m - 1$, 又 $m, n \in N^*$,

$\therefore$ 设 $m = 3r, (r \in N^*)$ 得 $n = 4r - 1$

根据题意得:

$$\begin{cases} 1 \leq 3r \leq 100 \\ 1 \leq 4r - 1 \leq 100 \end{cases}$$
 解得: $1 \leq r \leq 25 (r \in N^*)$

从而有 25 个相同的项, 且公差为 12, 其和

$S_{25} = 11 \times 25 + \frac{25 \times 24}{2} \times 12 = 3875$

能力提升

若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则该数列的前 n 项和 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 。试对其逆命题进行研究, 写出你的结论, 并证明。

答案: 逆命题是: 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 则该数列是等差数列。这是一个真命题。

证明: 由条件得

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \text{ ①,}$$

$$2S_{n+1} = (n+1)(a_1 + a_{n+1}) \text{ ②}$$

$$2S_{n-1} = (n-1)(a_1 + a_{n-1}), (n \geq 2) \text{ ③}$$

$$\text{②-①得: } (n-1)a_{n+1} = na_n - a_1 \text{ ④}$$

$$\text{①-③得: } (n-1)a_{n-1} = (n-2)a_n + a_1 \text{ ⑤}$$

$$\text{④+⑤化简得 } a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n,$$

$$\text{即 } a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。

第 16 讲等比数列

知识要点

1、等比数列的定义：

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于 同一个非零常数 ，那么这个数列就叫等比数列，这个常数叫做 等比数列的公比 ，公比通常用字母 q 表示，定义的表达式为

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q (q \neq 0, n \geq 2, n \in N^*) \text{ 或 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q (n \in N^*)$$

2、等比中项：如果 a, G, b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项， $G = \pm\sqrt{ab}$ 。

3、等比数列的通项公式：

若等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公比为 q ，则 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 。

$$4、\text{等比数列的前 } n \text{ 项的和公式： } S_n = \begin{cases} na_1 (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1-a_n q}{1-q} (q \neq 0 \text{ 且 } q \neq 1) \end{cases}。$$

5、等比数列的判定常用方法：

$$(1) \text{ 定义法： } \frac{a_n}{a_{n-1}} = q；$$

$$(2) \text{ 中项法： } a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}；$$

6、简单性质：(1)若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m a_n = a_p a_q$

(2) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 组成公比为 q^n 的等比数列。

(3) $a_n, a_{n+m}, a_{n+2m}, \dots$ 组成公比为 q^m 的等比数列。

典型例题

考点一：等比数列的基本运算

例 1、已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，其中 $a_7 = 1$ ，且 $a_4, a_5 + 1, a_6$ 成等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n ，证明：对任意 $n \in N^*$ ，都有 $S_n < 128$ 。

$$\text{解：(1) } \begin{cases} a_1 q^6 = 1 & (1) \\ 2(a_1 q^4 + 1) = a_1 q^3 + a_1 q^5 & (2) \end{cases}$$

由 (1) 得 $a_1 = q^{-6}$ 代入 (2) 解得 $q = \frac{1}{2}, a_1 = 64$ 。

$$\therefore a_n = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-7}$$

$$(2) S_n = 128 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] < 128$$

例 2、设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_3 + S_6 = 2S_9$, 求公比 q 的值。

解: 若 $q = 1$, 则 $S_3 + S_6 = 3a_1 + 6a_1 = 9a_1$,

$2S_9 = 2 \times 9a_1 = 18a_1$, 由 $S_3 + S_6 = 2S_9$ 得 $a_1 = 0$ 舍去。

所以 $q \neq 1$, 由 $S_3 + S_6 = 2S_9$ 得

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2a_1(1-q^9)}{1-q} \Rightarrow q^3 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

考点二: 等比数列的判定与证明

例 3、已知数列 $\{a_n\}$, S_n 是它的前 n 项和, 且 $S_{n+1} = 4a_n + 2 (n \in N^*), a_1 = 1$

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - 2a_n (n \in N^*)$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列。

思维分析: 证明数列是等差数列还是等比数列, 应紧扣定义式; 而数列的前 n 项和 S_n 已知可求 a_n

解:

(1)

$$S_{n+1} = 4a_n + 2, S_{n+2} = 4a_{n+1} + 2$$

$$\Rightarrow S_{n+2} - S_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

$$\text{即 } a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+2} - 2a_{n+1}}{a_{n+1} - 2a_n} = \frac{4a_{n+1} - 4a_n - 2a_{n+1}}{a_{n+1} - 2a_n}$$

$$= \frac{2a_{n+1} - 4a_n}{a_{n+1} - 2a_n} = 2$$

由此可得 $\{b_n\}$ 是等比数列且首项 $b_1 = a_2 - 2a_1 = 3$,

公比 $q = 2, \therefore b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$$(2) c_n = \frac{a_n}{2^n}, \therefore c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{b_n}{2^{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{4}$$

可知 $\{c_n\}$ 是首项 $c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$, 公差 $d = \frac{3}{4}$ 的等差数列, $\therefore c_n = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$

例 4、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n = 2^n, b_n = 3n + 2$, 它们公共项由小到大排列的数列是 $\{c_n\}$,

①写出 $\{c_n\}$ 的前 5 项; ②证明 $\{c_n\}$ 是等比数列。

思维分析: 容易证明 $\{c_n\}$ 是等比数列, 由定义式, 只需找出 $\{c_n\}$ 中任意相邻两项关系即可。

解(1) $\{c_n\}$ 的前 5 项为: 8、32、128、512、2048

(2) 设 $a_m = b_p = c_n, \therefore c_n = 2^m = 3p + 2$,

而 $a_{m+1} = 2 \cdot 2^m = 2(3p + 2) = 3 \cdot (2p + 1) + 1$

$\therefore a_{m+1}$ 不在 $\{b_n\}$ 中, 又 $a_{m+2} = 4 \cdot 2^m = 4 \cdot (3p + 2) = 3 \cdot (4p + 2) + 2, \therefore a_{m+2}$ 在 $\{b_n\}$ 中

$\therefore a_{m+2}$ 是 $\{c_n\}$ 中的项即 c_{n+1} 项, $\therefore c_{n+1} = 4c_n$,

故 $\{c_n\}$ 是等比数列

考点三: 等比数列的性质

例 5、在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 完成下列各题:

(1) 若 $a_n > 0 (n \in N^*)$, 且 $a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$, 求 $a_3 + a_5$ 的值;

提示: $a_3^2 + 2a_3 a_5 + a_5^2 = 25$, 即 $(a_3 + a_5)^2 = 25$

又因为 $a_n > 0 (n \in N^*)$, 所以 $a_3 + a_5 = 5$

(2) 若 $a_9 + a_{10} = a$, $a_{19} + a_{20} = b (a, b \neq 0)$, 求 $a_{99} + a_{100}$ 的值;

提示: 因为 $\frac{a_{19} + a_{20}}{a_9 + a_{10}} = q^{10} = \frac{b}{a}$, 所以

$$a_{99} + a_{100} = (a_9 + a_{10})q^{90} = a \left(\frac{b}{a} \right)^9 = \frac{b^9}{a^8}$$

考点四：等比数列的综合应用

例 6、设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和 $S_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

(1) 求 q 的取值范围；

(2) 设 $b_n = a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1}$ ，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，试比较 S_n 与 T_n 的大小。

解：(1) 因为 $\{a_n\}$ 为等比数列， $S_n > 0$ ，可以得到 $a_1 = S_1 > 0, q \neq 0$

当 $q=1$ 时， $S_n = na_1 > 0$ ；满足条件；

当 $q \neq 1$ 时， $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} > 0$ ，即 $\frac{1-q^n}{1-q} > 0$

上式等价于 $\begin{cases} 1-q > 0 \\ 1-q^n > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-q < 0 \\ 1-q^n < 0 \end{cases}$ ，解得 $q \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

(2) $b_n = a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1} = a_n(q^2 - \frac{3}{2}q)$ ，所以 $T_n = S_n(q^2 - \frac{3}{2}q)$

于是 $T_n - S_n = S_n(q^2 - \frac{3}{2}q - 1) = S_n(q + \frac{1}{2})(q - 2)$ ，又因为 $S_n > 0$ ，

当 $q \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ 时， $T_n > S_n$ ；当 $q \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 2)$ 时， $T_n < S_n$ ；

当 $q = -\frac{1}{2}$ 或 2 时， $T_n = S_n$ 。

巩固训练

1、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ，且 a_1, a_3, a_9 成等比数列，则 $\frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_2 + a_4 + a_{10}} = \frac{13}{16}$ 。

提示： $a_3^2 = a_1 a_9$ ， $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$

因为 $d \neq 0$ ，所以解得 $a_1 = d$

$$\frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_2 + a_4 + a_{10}} = \frac{3a_1 + 10d}{3a_1 + 13d} = \frac{13d}{16d} = \frac{13}{16}$$

2、数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 2, a_n = S_{n-1} (n \geq 2, n \in N^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n$

3、等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$ ，已知 $a_2 = 1$ ， $a_{n+2} + a_{n+1} = 6a_n$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4 = \frac{15}{2}$

提示: $q^2 + q = 6, q > 0$, 解得 $q = 2, a_1 = \frac{1}{2}$

4、设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, b_n = \left| \frac{a_n + 2}{a_n - 1} \right|, n \in N^*$, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = 2^{n+1}$

提示: 因为 $a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$, 所以

$$b_{n+1} = \left| \frac{a_{n+1} + 2}{a_{n+1} - 1} \right| = 2 \left| \frac{a_n + 2}{a_n - 1} \right| = 2b_n, b_1 = 4$$

所以 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列。

5、设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}$ 成等差数列。类比以上

结论有: 设等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则 $T_4, \frac{T_8}{T_4}, \frac{T_{12}}{T_8}, \frac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列。

6、已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 且 $a_5 \cdot a_{2n-5} = 2^{2n} (n \geq 3)$, 则当 $n \geq 1$ 时,

$$\log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{2n-1} = \quad (C)$$

$$A. n(2n-1) \quad B. (n+1)^2 \quad C. n^2 \quad D. (n-1)^2$$

提示: $a_n^2 = a_5 a_{n-5} = 2^{2n}$, 且 $a_n > 0$, 所以 $a_n = 2^n$

7、数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则下列结论中不正确的有(C)

$$(A) \{a_n^2\} \text{ 为等比数列} \quad (B) \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \text{ 为等比数列}$$

$$(C) \{\lg a_n\} \text{ 为等差数列} \quad (D) \{\lg |a_n|\} \text{ 为等差数列}$$

8、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d, (d \neq 0)$, 在 $\{a_n\}$ 中取出部分项 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots, a_{k_n}$ 恰好构成等比

数列 $\{a_{k_n}\}$ ，已知 $k_1=1, k_2=5, k_3=17$ ，试求数列 $\{k_n\}$ 的通项公式。

解：由 $a_5^2 = a_1 a_{17}$ 得 $(a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 16d)$ ，

因为 $d \neq 0$ ，所以 $a_1 = 2d$ ，所以 $\{a_{k_n}\}$ 的公比 $q = \frac{a_{k_2}}{a_{k_1}} = \frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 + 4d}{a_1} = \frac{6d}{2d} = 3$ ，

由于 $a_{k_n} = a_{k_1} q^{n-1} = a_1 \cdot 3^{n-1} = 2d \cdot 3^{n-1}$ ，

且 $a_{k_n} = a_1 + (k_n - 1)d = (k_n + 1)d$ ，所以

$2d \cdot 3^{n-1} = (k_n + 1)d$ ，所以 $k_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

能力提升

对于数列 $\{u_n\}$ ，若存在常数 $M > 0$ ，对任意的 $n \in N^*$ ，恒有 $|u_{n+1} - u_n| + |u_n - u_{n-1}| + \cdots + |u_2 - u_1| \leq M$ ，

则称数列 $\{u_n\}$ 为B-数列。

请问首项为1，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列是否为B-数列？说明理由。

解：设满足题设的等比数列为 $\{a_n\}$ ，则 $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$ 。于是

$$|a_n - a_{n-1}| = \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right| = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, n \geq 2.$$

$$|a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| = \frac{3}{2} \times \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$$

$$= 3 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] < 3.$$

所以首项为1，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列是B-数列。

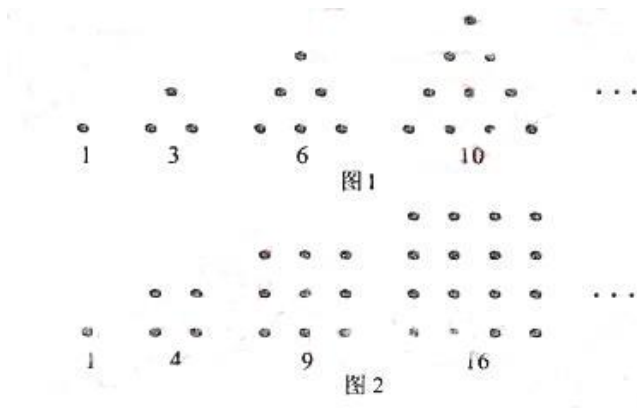
第 17 讲等差和等比数列复习

等差数列:

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 6$, $a_1 = 4$, 则公差 d 等于 (). C

- A. 1 B. $\frac{5}{3}$ C. -2 D. 3

2. 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形状来研究数, 例如:



他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10, ..., 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地, 称图 2 中的 1, 4, 9, 16, ... 这样的数成为正方形数。下列数中既是三角形数又是正方形数的是 ()

C

- A. 289 B. 1024 C. 1225 D. 1378

3. 已知非 0 实数 a, b, c 成等差数列, 则二次函数 $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ 的图象与 x 轴的交点个数为

() C

(A) 1

(B) 2

(C) 1 或 2

(D) 0

4. (全国大纲理 4) 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 1$, 公差 $d = 2$, $S_{k+2} - S_k = 24$, 则 $k =$

()

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

【答案】D

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0$, $S_{2m-1} = 38$, 则 $m =$ (). C

(A) 38

(B) 20

(C) 10

(D) 9

解析 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以, $a_{m-1} + a_{m+1} = 2a_m$, 由 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0$, 得: $2a_m - a_m^2 =$

0, 所以, $a_m = 2$, 又 $S_{2m-1} = 38$, 即 $\frac{(2m-1)(a_1 + a_{2m-1})}{2} = 38$, 即 $(2m-1) \times 2 = 38$, 解得 $m =$

10, 故选.C。

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 + a_3 + a_5 = 105$, $a_2 + a_4 + a_6 = 99$, S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 S_n 达到最大值的 n

是 () (B

(A) 21 (B) 20 (C) 19 (D) 18

[解析]: 由 $a_1 + a_3 + a_5 = 105$ 得 $3a_3 = 105$, 即 $a_3 = 35$, 由 $a_2 + a_4 + a_6 = 99$ 得 $3a_4 = 99$ 即 $a_4 = 33$,

$\therefore d = -2$, $a_n = a_4 + (n-4) \times (-2) = 41 - 2n$, 由 $\begin{cases} a_n \geq 0 \\ a_{n+1} < 0 \end{cases}$ 得 $n = 20$, 选

7. S_n 表示等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和, $a_3 + a_9 > 0$, $S_9 < 0$, 则 $S_1, S_2, \dots, S_N$ 中最小的是 ()

B

(A) S_4 (B) S_5 (C) S_6 (D) S_9

8. (重庆理 11) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_7 = 37$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ _____

【答案】74

9. (湖南理 12) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, a_4 = 7$, 则 $S_9 =$

【答案】81

10. (广东理 11) 等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和等于前 4 项的和. 若 $a_1 = 1, a_k + a_4 = 0$, 则 $k =$ _____.

【答案】10

11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_9 = 72$, 则 $a_2 + a_4 + a_9 =$ _____。24

解: $\because \{a_n\}$ 是等差数列, 由 $S_9 = 72$, 得 $\therefore S_9 = 9a_5$, $a_5 = 8$

$$\therefore a_2 + a_4 + a_9 = (a_2 + a_9) + a_4 = (a_5 + a_6) + a_4 = 3a_5 = 24.$$

12. (安徽理 14) 已知 $\triangle ABC$ 的一个内角为 120° , 并且三边长构成公差为 4 的等差数列, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

【答案】 $15\sqrt{3}$

13. 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后 3 项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个

数列的项数 $n =$ $\circ 13$

14. (湖北理 13)《九章算术》“竹九节”问题: 现有一根 9 节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列, 上面 4 节的容积共为 3 升, 下面 3 节的容积共 4 升, 则第 5 节的容积为 $\quad$ 升。

【答案】 $\frac{67}{66}$

15. 所有能被 7 整除且被 11 除余 2 的三位数之和为 $\quad$; 6426

16. 若首项不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前 9 项和与 4 项和之比 $S_9 : S_4 = 81 : 16$, 则 $a_9 : a_4$ 的值为 $\quad$ 。 $\frac{17}{7}$

17. 一等差数列共有奇数项, 且奇数项之和为 80, 偶数项之和为 75, 此数列的中间项为 $\quad$; 项数为 $\quad$; $n = 31, a_{16} = 5$

18. 已知 $\lg a, \lg b, \lg c$ 与 $\lg a - \lg 2b, \lg 2b - \lg 3c, \lg 3c - \lg a$ 都是等差数列, 则 a, b, c 之比为 $\quad$ 。 9: 6: 4

19. 如果两等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和的比为 $\frac{5n+1}{3n-1}$, 则 $a_{15} : b_{15} =$ $\quad$ 。 $\frac{73}{43}$

20. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 S_n 有唯一的最大值 S_{99} , 且 $|a_{99}| < |a_{100}|$, 求使 $S_n > 0$ 的 n 的最大值为 $\quad$ 。 197

21. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -60, a_{17} = -12$, 记 $b_n = |a_n|$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 30 项和。

$S_{30} = 765$

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4, a_n = 4 - \frac{4}{a_{n-1}} (n \geq 2)$, 记 $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列; (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

$b_n = \frac{1}{2}n, a_n = \frac{2}{n} + 2$

等比数列:

1. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_2 a_3 = 5, a_7 a_8 a_9 = 10$, 则 $a_4 a_5 a_6 =$ $\quad$ 。 $5\sqrt{2}$

2. 若等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n = -512$, 前 n 项和 $S_n = -341$, 则公比 $q =$ $\quad$ -2 ,

项数 $n = 10$.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 表示前 n 项和, 若 $a_3 = 2S_2 + 1, a_4 = 2S_3 + 1$, 则公比 $q =$.3

4. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $8a_2 + a_5 = 0$, 则 $\frac{S_5}{S_2} = -11$.

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, 若 $a_2 = 1, a_{n+1} + a_{n+2} = 6a_n$, 则前 4 项和 $S_4 = \frac{15}{2}$.

6. 设等比数列的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_6}{S_3} = 3$, 则 $\frac{S_9}{S_6} = \frac{7}{3}$.

7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 前 4 项之和为 240, 第 2 项和第 4 项之和为 180, 则首项为 .6

8. 设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+1} (n \in N)$, 则 $f(n) = \frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$.

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 公比 $q \neq 1$, 设 $P = \frac{a_3 + a_9}{2}, Q = \sqrt{a_5 a_7}$, 则 P, Q 的大小关系

是 $P > Q$.

10. 设 $\{a_n\}$ 为公比 $q > 1$ 的等比数列, 若 a_{2008} 和 a_{2009} 是方程 $4x^2 - 8x + 3 = 0$ 的两根, 则 $a_{2010} + a_{2011} = 18$.

11. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 a_6 = 9$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} = 10$.

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比不等于 1, 给出 4 个数列: ① $\{2a_n\}$; ② $\{a_n + 2\}$; ③ $\{a_n^2\}$; ④ $\left\{\frac{2}{a_n}\right\}$,

其中仍为等比数列的有 . (写出序号) ①③④

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 若 $S_{30} = 13S_{10}, S_{10} + S_{30} = 140$, 则 S_{20} 的值为 .40

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 则 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}$ 成等差数列. 类比以上结论有:

设等比数列 $\{b_n\}$ 前 n 项积为 T_n , 则 $T_4, \quad , \quad , \frac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列. $\frac{T_8}{T_4}, \frac{T_{12}}{T_8}$

15. (1) 在公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则其公比 q 为 .3

(2) 若正项等比数列 $\{a_n\}$ 公比 $q \neq 1$, 且 a_3, a_5, a_6 成等差数列, 则 $\frac{a_3 + a_5}{a_4 + a_6} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

16. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $|q| > 1$, 令 $b_n = a_n + 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53, -23, 19, 37, 82\}$ 中, 则 $6q = -9$.

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -4$, 则 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$.

18. 已知函数 $f(x) = 2^x$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 若 $f(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) = 1024$, 则 $\log_2 [f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot f(a_3) \cdots f(a_{10})] = -6$.

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$, 首项为 a_1 , 公比为 q , 则 $\{a_n\}$ 为递增数列的充要条件是 (D).

A. $q > 1$ B. $a_1 > 0$ 且 $q > 0$ C. $a_1 > 0$ 且 $q > 1$ D. $a_1 > 0, q > 1$ 或 $a_1 < 0, 0 < q < 1$

20. 某商品的单价今年第一、二季度均比上一季度降低 10%, 第三、四季度均比上一季度上升 10%, 则今年第四季度与去年第四季度的单价比较, 正确的是 (B).

A. 不增不减; B. 均减 2%; C. 均增 2%; D. 均减 3%

21. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = \frac{1}{5}$, 且对任意正整数 m, n , 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 若 $S_n < a$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 (A).

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 4

22. $\{a_n\}$ 是由实数构成的等比数列, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 关于数列 $\{S_n\}$ 给出下列命题:

① 数列 $\{S_n\}$ 中任意一项均不为 0; ② 数列 $\{S_n\}$ 中必有一项为 0; ③ 数列 $\{S_n\}$ 中任意一项均不为 0, 或者有多项 0; ④ 数列 $\{S_n\}$ 中不可能出现 $S_n = S_{n+2}$; ⑤ 数列 $\{S_n\}$ 中不可能出现 $S_n = S_{n+3}$, 则其中正确的是 (C).

A. ①④; B. ②③; C. ③⑤; D. ④⑤

23. 设 $\{a_n\}$ 是各项为正数的无穷数列, A_i 是边长为 a_i, a_{i+1} 的矩形面积 ($i \in \mathbb{N}^*$), 则 $\{A_n\}$ 为等比数列的充要条件为 (D).

A. $\{a_n\}$ 是等比数列; B. $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 或 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 是等比数列;

C. $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 和 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 均是等比数列;

D. $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 和 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 均是等比数列, 且公比相同

24. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 + a_n = 66, a_2 a_{n-1} = 128, S_n = 126$, 求 n 和公比 q 的值.

$$\begin{cases} n=6 \\ q=2 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} n=6 \\ q=\frac{1}{2} \end{cases}$$

25. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n \cdot a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 试求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & n \text{ 奇} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ 偶} \end{cases}$$

26. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_1 + 3a_2 = 1, a_3^2 = 9a_2a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 设 $b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

$$(1) a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n; (2) b_n = -\frac{n(n+1)}{2}$$

27. 设数列 $\{a_n\}$, $a_1 = \frac{5}{6}$, 若以 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为系数的二次方程 $a_{n-1}x^2 - a_nx + 1 = 0$ ($n \geq 2, n \in N^*$)

都有根 α, β 满足 $3\alpha - \alpha\beta + 3\beta = 1$.

(1) 求证: $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列; (2) 求 a_n ; (3) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

$$(1) \text{ 略}; (2) a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}; (3) S_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$