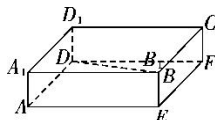


高二数学精炼题集参考答案

第一部分 立体几何

第1讲

1. B 2.D 3.A 4.平行或相交 5. 30° 45° 6.③④



7. 解析: (1)将平面 BF 折起后, 补成长方体 $AEFD-A_1BCD_1$, 则 BD 恰好是长方体的一条对角线.

因为 AE 、 EF 、 EB 两两垂直,

所以 BD 恰好是以 AE 、 EF 、 EB 为长、宽、高的长方体的对角线.

所以 $BD = \sqrt{AE^2 + EF^2 + EB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

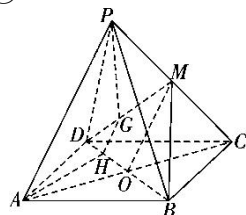
(2)证明: 因为 $AD \parallel EF$, $EF \parallel BC$, 所以 $AD \parallel BC$.

所以点 A 、 C 、 B 、 D 在同一平面内, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

所以 AC 、 BD 交于一点且被该点平分.

第2讲

1. C 2.C 3.B 4.B 5.④ 6.④



7. 证明: 如图所示, 连接 AC .

设 AC 交 BD 于 O , 连接 MO .

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 O 是 AC 的中点.

又因为 M 是 PC 的中点, 所以 $MO \parallel PA$.

又因为 $MO \subset$ 平面 BDM , $PA \not\subset$ 平面 BDM ,

所以 $PA \parallel$ 平面 BDM ,

平面 $BDM \cap$ 平面 $APG = GH$,

所以 $AP \parallel GH$.

第3讲

1. A 2.C 3.B 4.B 5.垂直 6.①③④ $\Rightarrow$ ②或②③④ $\Rightarrow$ ①

7. 证明: (1)因为 N 为 PC 的中点, 所以 $ON \parallel PA$.

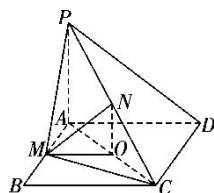
而 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $ON \perp$ 平面 $ABCD$. 所以 $ON \perp AB$.

又四边形 $ABCD$ 为矩形, M 为 AB 的中点,

所以 $OM \perp AB$, 所以 $AB \perp$ 平面 OMN , 所以 $AB \perp MN$.

(2) $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, 则 $PD \perp DC$.

故 $\angle PDA$ 为平面 PDC 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的平面角, 即 $\angle PDA = 45^\circ$, 所以 $PA = AD = BC$.



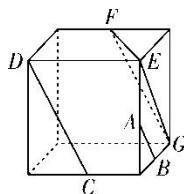
连接 MC , 由 $Rt\triangle BCM \cong Rt\triangle APM$ 知, $MC = MP$, 所以 $MN \perp PC$.

因为 $AB \perp MN$, 所以 $MN \perp CD$, 所以 $MN \perp$ 平面 PCD ,
所以平面 $MNO \perp$ 平面 PCD .

第 4 讲

巩固练习

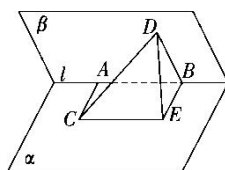
1. C 2. C 3. A



4. C 解析: 把展开图复原为正方体后示意图如右图所示, $\angle EGF$ 为 AB 和 CD 所成的角, F 为正方体一棱的中点. 设棱长为 1,

$$\text{则 } EF = GF = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad EG = \sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } \cos \angle EGF = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$



5. 2 解析: 过 B 作 $BE \perp AC$, 连接 CE 、 DE .

则 $\angle DBE$ 即为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

易证 $CE \perp DE$,

$$\text{所以 } CD = \sqrt{CE^2 + DE^2}$$

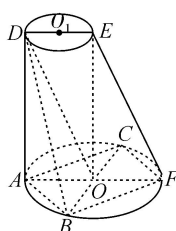
$$= \sqrt{AB^2 + BE^2 + BD^2 - 2BE \cdot BD \cdot \cos \angle DBE}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$= 2.$$

$$6. \frac{1}{4}$$

解析: 根据这两个视图可以推知折起后二面角 $C-BD-A$ 为直二面角, 其侧视图是一个两直角边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的直角三角形, 其面积为 $\frac{1}{4}$.



7. 解析: (1) 因为 AD 与两圆所在的平面均垂直,

所以 $AD \perp AB$, $AD \perp AF$, 故 $\angle BAF$ 是二面角 $B-AD-F$ 的平面角.

依题意可知, 四边形 $ABFC$ 是正方形, 所以 $\angle BAF = 45^\circ$,

即二面角 $B-AD-F$ 的大小为 45° .

(2) 连接 OD , 则 $OD \parallel EF$,

所以 $\angle ODB$ 为异面直线 BD 与 EF 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = 10$, $OA = OB = 3\sqrt{2}$.

因为四边形 $ABFC$ 是正方形, 所以 $DB \perp AF$.

又 $AD \perp$ 平面 $ABFC$,

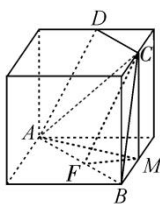
所以 $OB \perp$ 平面 DAO ,

所以 $OB \perp OD$,

$$\text{故 } \cos \angle ODB = \frac{DO}{BD} = \frac{\sqrt{8^2 + (3\sqrt{2})^2}}{10} = \frac{\sqrt{82}}{10}.$$

第 5 讲

1. C 2. D 3. D 4. B 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6. ①②③④



7. 解析: 设点 M 到截面 $ABCD$ 的距离为 h .

连接 AC 、 AM , 作 $CF \perp AB$, 垂足为 F , 连接 CM .

$$V_{C-ABM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot CM$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{12}.$$

$$\text{又 } V_{M-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \times h = \frac{h}{4},$$

$$\text{故由 } V_{C-ABM} = V_{M-ABC}, \text{ 得 } \frac{h}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } h = \frac{1}{3}.$$

第六讲 简单多面体和旋转体

例 1. (1) 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱 SA, SB, SC 两两垂直, 体积为 V , A', B', C' 分别是

SA, SB, SC 上的点, 且 $SA' = \frac{1}{2} SA, SB' = \frac{1}{3} SB, SC' = \frac{1}{4} SC$, 则三棱锥 $S-A'B'C'$ 的体积

为 ()

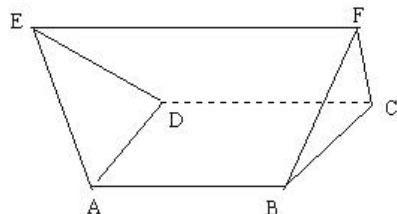
- (A) $\frac{1}{9}V$ (B) $\frac{1}{12}V$ (C) $\frac{1}{24}V$ (D) $\frac{1}{72}V$

(2) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF \parallel AB$, $EF = 2$, 则该多面体的体积为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

解: (1) 选 C; (2) 选 A。

说明: 对于第 (1) 小题, 注意转化三棱锥的顶点灵活使用体积计算公式; 对于 (2) 则需要利用图形的割补思想求解。



例 2. 在北纬 45° 圈上有 A, B 两点, 设该纬度圈上 A, B 两点的劣

弧长为 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$ (R 为地球半径), 求 A, B 两点间的球面距离。

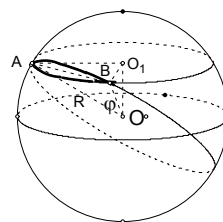
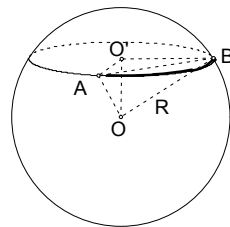
解: 设北纬 45° 圈的半径为 r , 则 $r = \frac{\sqrt{2}}{4}R$, 设 O' 为北纬 45°

圈的圆心, $\angle AOB' = \alpha$, 则 $\alpha r = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$, $\frac{\sqrt{2}}{2}R\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$,

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, 所以 $AB = \sqrt{2}r = R$, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$,

所以, A, B 两点的球面距离等于 $\frac{\pi}{3}R$ 。

说明: 要求两点的球面距离, 应先由已知条件求出两点的直线距离, 再求出这两点的球心角, 进一步求出这两点的球面距离。



例 3. 图 1 是某储蓄罐的平面展开图, 其中 $\angle GCD = \angle EDC = \angle F = 90^\circ$, 且 $AD = CD = DE = CG$, $FG = FE$. 若将五边形 $CDEFG$ 看成底面, AD 为高, 则该储蓄罐是一个直五棱柱。

(1) 图 2 为面 $ABCD$ 的直观图, 请以此为底面将该储蓄罐的直观图画完整;

(2) 已知该储蓄罐的容积为 $V = 1250\text{cm}^3$, 求制作该储蓄罐所需材料的总面积 S (精确到整数位, 材料厚度、接缝及投币口的面积忽略不计)。

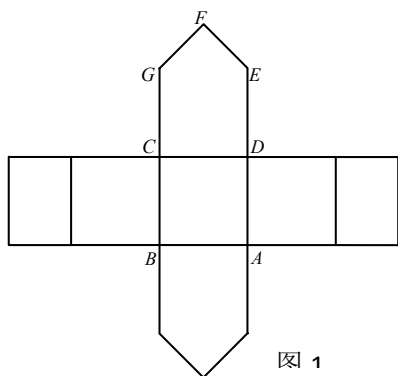
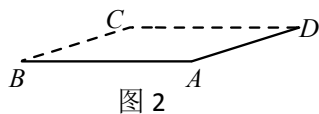


图 1



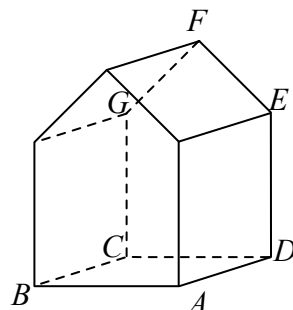
解: (1) 该储蓄罐的直观图如右图所示;

(2) 若设 $AD = a$, 则五边形 $CDEFG$ 的面积为 $\frac{5}{4}a^2$,

得容积 $V = \frac{5}{4}a^3 = 1250$, 解得 $a = 10$,

其展开图的面积 $S = 5a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{2}a^2 = 50(11 + 2\sqrt{2}) \approx 691$,

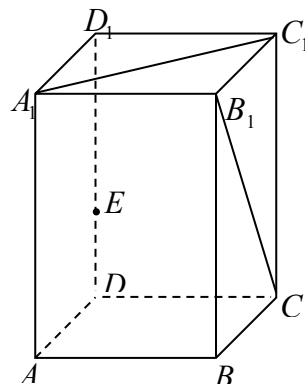
因此制作该储蓄罐所需材料的总面积约为 691 cm^2 。



例 4. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4$, $AA_1 = 8$ 。

(1) 求异面直线 B_1C 与 A_1C_1 所成角的大小; (用反三角函数形式表示)

(2) 若 E 是线段 DD_1 上 (不包含线段的两端点) 的一个动点, 请提出一个与三棱锥体积有关的数学问题 (注: 三棱锥需以点 E 和已知正四棱柱八个顶点中的三个为顶点构成); 并解答所提出的问题。



解: (1) 如图, 连接 AC 、 AB_1 , 由 $AA_1 \parallel CC_1$,

知 A_1ACC_1 是平行四边形, 则 $A_1C_1 \parallel AC$,

所以 $\angle B_1CA$ 为异面直线 B_1C 与 A_1C_1 所成角。

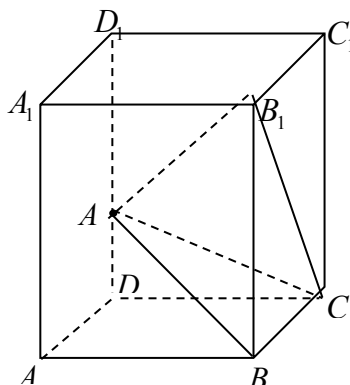
在 $\triangle B_1CA$ 中, $AC = 4\sqrt{2}$, $AB_1 = B_1C = 4\sqrt{5}$,

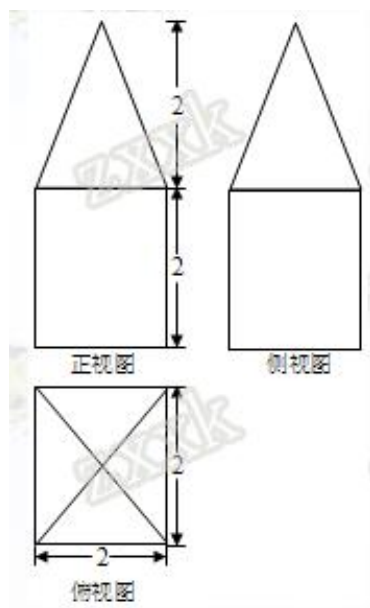
$$\text{则 } \cos \angle ACB_1 = \frac{AC^2 + B_1C^2 - AB_1^2}{2AC \cdot B_1C} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

所以 $\angle ACB_1 = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ 。(也可用向量求解)

(2) 第一种:

提出问题: 证明三棱锥 $E - B_1BC$ 的体积为定值。





【答案】C

【解析】由三视图可知，该几何体是一个棱长为2的正方体与一个底面边长为2，高为2的正四棱锥的组合体，故其体积为 $V = 2^3 + \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$. 故选 C.

【考点定位】1.三视图；2.空间几何体的体积.

2. 已知底面边长为1，侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上，则该球的体积为（ ）

- A. $\frac{32\pi}{3}$ B. 4π C. 2π D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】D

【解析】

试题分析：根据正四棱柱的几何特征得：该球的直径为正四棱柱的体对角线，故

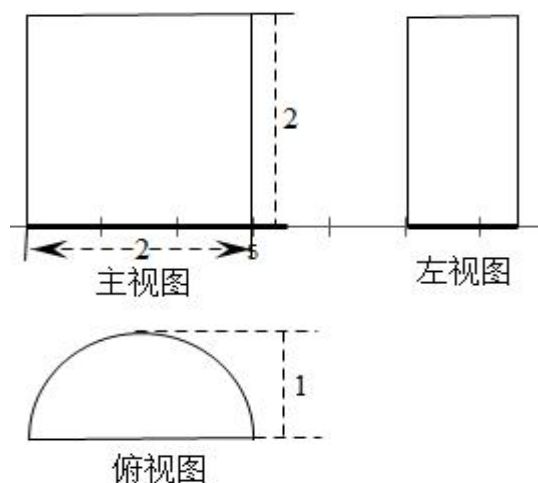
$2R = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ ，即得 $R = 1$ ，所以该球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 1^3 = \frac{4\pi}{3}$ ，故选

D.

考点：正四棱柱的几何特征；球的体积.

3. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（ ）

- A. 3π B. 4π C. $2\pi + 4$ D. $3\pi + 4$



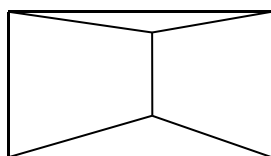
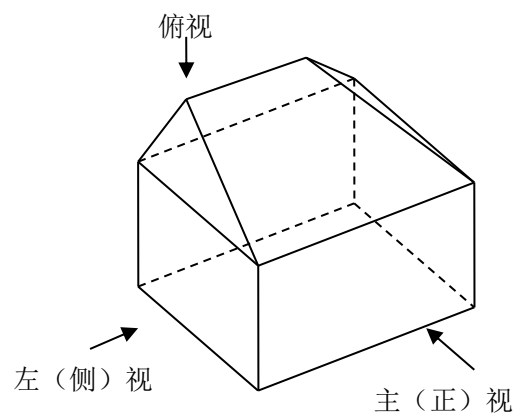
【答案】D

【解析】由几何体的三视图可知该几何体为圆柱的截去一半，所以该几何体的表面积为

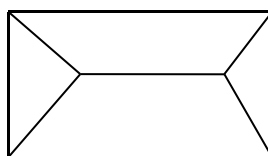
$$\pi \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times 2 + 2 \times 2 = 3\pi + 4, \text{ 故答案选 } D$$

考点：几何体的表面积

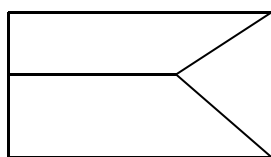
4. 一几何体的直观图如右图，下列给出的四个俯视图中正确的是（ ）



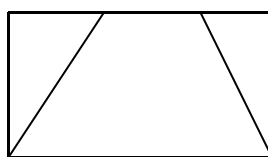
A



B



C



D

【答案】B

【解析】

试题分析：俯视图为几何体在底面上的投影，应为B中图形.

考点：三视图

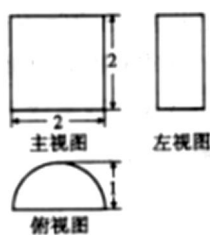
5. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（ ）

A. 3π

B. 4π

C. $2\pi+4$

D. $3\pi+4$



【答案】D

【解析】由三视图知：该几何体是半个圆柱，其中底面圆的半径为1，母线长为2，所以该几何体的表面积是 $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 \times (1+2) + 2 \times 2 = 3\pi + 4$ ，故选D.

【考点定位】1、三视图；2、空间几何体的表面积.

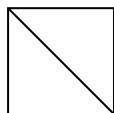
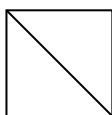
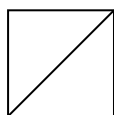
6. 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如右图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为()

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{6}$

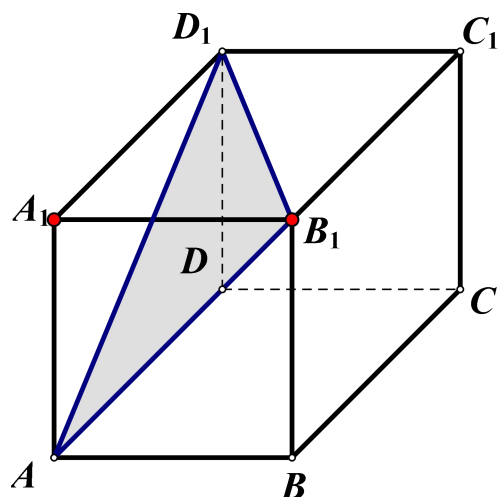
D. $\frac{1}{5}$



【答案】D

【解析】由三视图得，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，截去四面体 $A-A_1B_1D_1$ ，如图所示，，设正方体棱长为 a ，则 $V_{A-A_1B_1D_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^3 = \frac{1}{6} a^3$ ，故剩余几何体体积为 $a^3 - \frac{1}{6} a^3 = \frac{5}{6} a^3$ ，所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$ ，故选D.

【考点定位】三视图.



【名师点睛】本题以正方体为背景考查三视图、几何体体积的运算，要求有一定的空间想象能力，关键是能从三视图确定截面，进而求体积比，属于中档题.

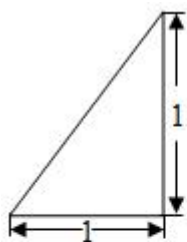
7. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥最长棱的棱长为（ ）

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

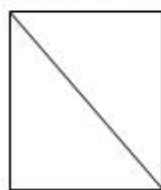
D. 2



正（主）视图



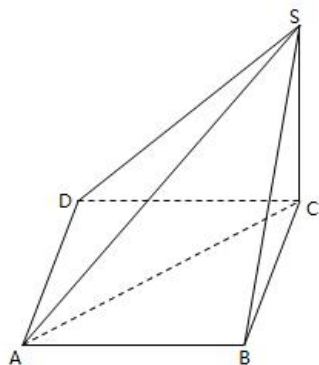
侧（左）视图



俯视图

【答案】C

【解析】四棱锥的直观图如图所示：



由三视图可知， $SC \perp$ 平面 $ABCD$ ， SA 是四棱锥最长的棱，

$$SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = \sqrt{SC^2 + AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}，故选 C.$$

【考点定位】三视图.

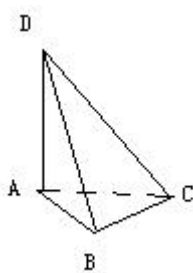
8. 已知三棱锥 $D-ABC$ 中， $AB=BC=1$ ， $AD=2$ ， $BD=\sqrt{5}$ ， $AC=\sqrt{2}$ ， $BC \perp AD$ ，则三棱锥的外接球的表面积为（ ）

- A. $\sqrt{6}\pi$ B. 6π C. 5π D. 8π

【答案】B

【解析】

试题分析：如图所示，由已知， $DA \perp AB$ ， $AB \perp BC$ ， $BC \perp$ 平面 DAB ，



所以， $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{6}$ ， $BD^2 + BC^2 = CD^2$ ， $BC \perp BD$ ，

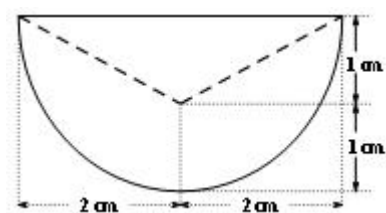
取 CD 的中点 O ，由直角三角形的性质， O 到 A, B, C, D 的距离均为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，其即为三棱锥的

外接球球心，故三棱锥的外接球的表面积为 $4\pi(\frac{\sqrt{6}}{2})^2 = 6\pi$ ，选 B.

考点：垂直关系，球的表面积

9. 某零件的正（主）视图与侧（左）视图均是如图所示的图形（实线组成半径为 2 cm 的

半圆，虚线是等腰三角形的两腰），俯视图是一个半径为 2 cm 的圆（包括圆心），则该零件的体积是（ ）



- A. $\frac{4}{3}\pi \text{ cm}^3$ B. $\frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3$
C. $4\pi \text{ cm}^3$ D. $\frac{20}{3}\pi \text{ cm}^3$

【答案】C

【解析】

试题分析：由三视图可知该零件为半球挖去一个同底的圆锥，所以该零件的体积为

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 2^3 - \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 1 = 4\pi.$$

考点：空间几何体的三视图、表面积和体积.

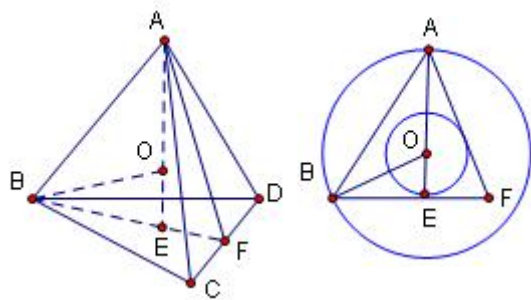
10. 正四面体的外接球和内切球的半径的关系是（ ）

- A. $R = \frac{7}{2}r$
B. $R = \frac{5}{2}r$
C. $R = 2r$
D. $R = 3r$

【答案】D

【解析】

如图所示，设点 O 是内切球的球心，正四面体棱长为 a ，由图形的对称性知，点 O 也是外接球的球心．设内切球半径为 r ，外接球半径为 R ．



在 $Rt\triangle BEO$ 中, $BO^2 = BE^2 + EO^2$, 即 $R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + r^2$, 得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, 得 $R = 3r$,

故选 D.

考点: 球与几何体的组合体

11. 设三棱柱的侧棱垂直于底面, 所有棱的长都为 a , 顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ()

- A. πa^2
- B. $\frac{7}{3}\pi a^2$
- C. $\frac{11}{3}\pi a^2$
- D. $5\pi a^2$

【答案】B

【解析】由题意知此三棱柱为正三棱柱,

设球心为 O , 正三棱柱上底面为 $\triangle ABC$, 其中心为 O' ,

因为三棱柱所有棱的长都为 a , 所以 $OO' = \frac{a}{2}$, $O'A = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

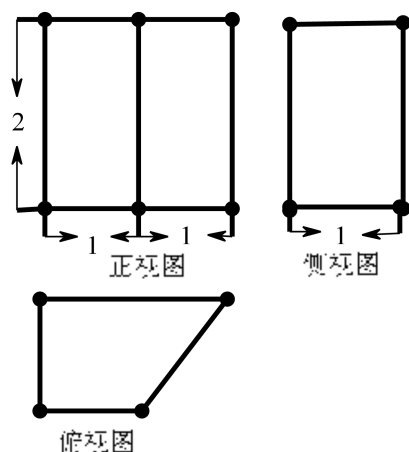
由球的相关性质可知, $\triangle O'O A$ 为直角三角形, 其中 AO 为球的半径 R

即 $R = \frac{\sqrt{OO'^2 + O'A^2}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{6}a$, 所以球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$, 故选 B.

考点: 球的表面积

12. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积等于 ()

- A. $8+2\sqrt{2}$
- B. $11+2\sqrt{2}$
- C. $14+2\sqrt{2}$
- D. 15



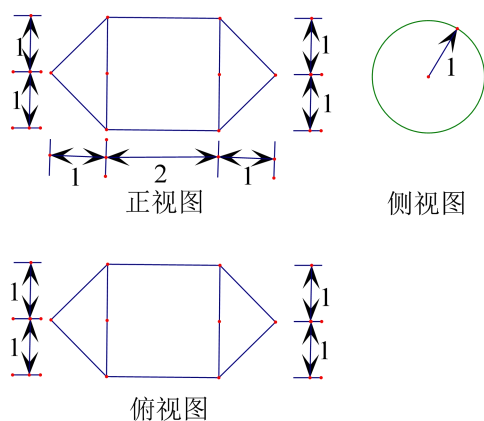
【答案】B

【解析】由三视图还原几何体，该几何体是底面为直角梯形，高为 2 的直四棱柱，且底面直角梯形的两底分别为 1, 2，直角腰长为 1，斜腰为 $\sqrt{2}$ 。底面积为 $2 \times \frac{1}{2} \times 3 = 3$ ，侧面积为 $2+2+4+2\sqrt{2}=8+2\sqrt{2}$ ，所以该几何体的表面积为 $11+2\sqrt{2}$ ，故选 B。

【考点定位】三视图和表面积。

二. 填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为_____ m^3 .

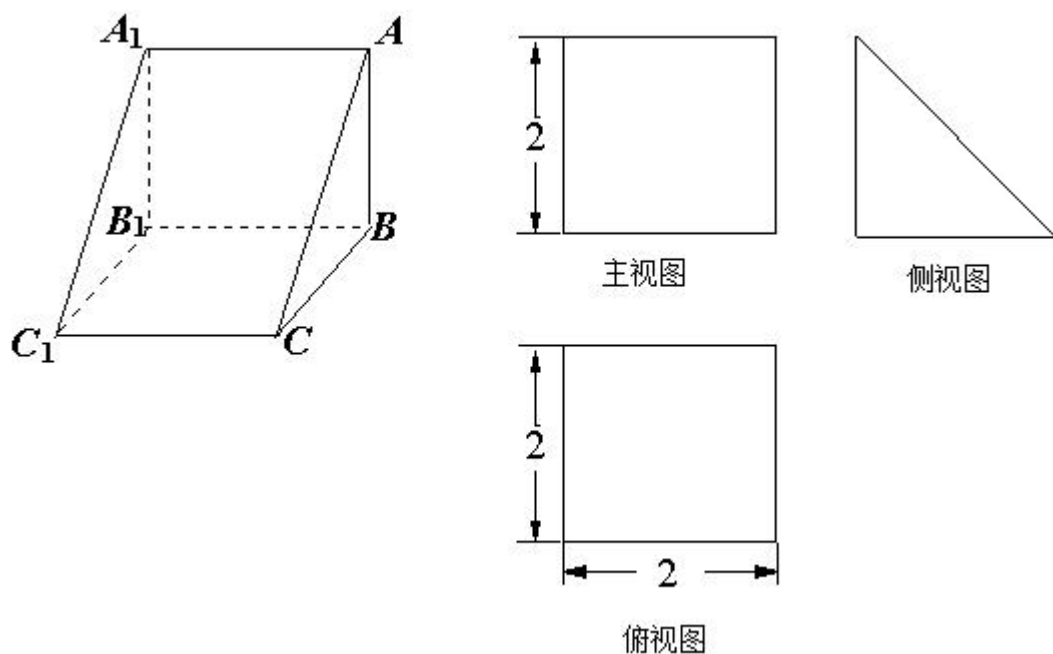


【答案】 $\frac{8}{3}\pi$

【解析】由三视图可知，该几何体是中间为一个底面半径为 1，高为 2 的圆柱，两端是底面半径为 1，高为 1 的圆锥，所以该几何体的体积 $V = 1^2 \times \pi \times 2 + 2 \times \frac{1}{3} \times 1^2 \times \pi \times 1 = \frac{8}{3}\pi$ 。

【考点定位】三视图与旋转体体积公式。

14. 三棱柱的直观图和三视图(主视图和俯视图是正方形, 左视图是等腰直角三角形) 如图所示, 则这个三棱柱的全面积等于_____



【答案】 $11+4\sqrt{2}$

【解析】

试题分析: 解: $S_{\text{侧}} = (2+2+2\sqrt{2}) \times 2 = 8+4\sqrt{2}$, $S_{\text{底}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\therefore S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}} = 8+4\sqrt{2}+2 \times 2 = 12+4\sqrt{2}$, 所以答案应填 $12+4\sqrt{2}$.

考点: 1、三视图; 2、棱柱的表面积.

15. 若圆锥的内切球与外接球的球心重合, 且内切球的半径为1, 则圆锥的体积为_____.

【答案】 3π

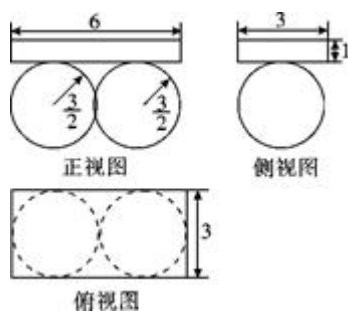
【解析】

试题分析: 过圆锥的旋转轴作轴截面, 得 $\triangle ABC$ 及其内切圆 $\odot O_1$ 和外切圆 $\odot O_2$, 且两圆同心, 即 $\triangle ABC$ 的内心与外心重合, 易得 $\triangle ABC$ 为正三角形, 由题意 $\odot O_1$ 的半径为 $r=1$,

$\therefore \triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, $\therefore$ 圆锥的底面半径为 $\sqrt{3}$, 高为 3, $\therefore V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3 \times 3 = 3\pi$.

考点: 圆锥的体积.

16. 一个几何体的三视图如图所示(单位: m), 则该几何体的体积为_____ m^3 .



【答案】 $18+9\pi$

【解析】由三视图可知，此几何体为两个相切的球上方放了一个长方体组成的组合体，所以其体积为：

$$V=3\times 6\times 1+2\times \frac{4}{3}\pi\times \left(\frac{3}{2}\right)^3=18+9\pi$$

考点：几何体的体积

第9讲 几何体表面积和体积

一、选择题

1. 解析：选 C 正四面体的各面为全等的正三角形，故其表面积 $S=4\times \frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=4\sqrt{3}$.

2. 答案：A

解：设展开图的正方形边长为 a ，圆柱的底面半径为 r ，则 $2\pi r=a$ ， $r=\frac{a}{2\pi}$ ，底面圆的

面积是 $\frac{a^2}{4\pi}$ ，于是全面积与侧面积的比是 $\frac{\frac{a^2}{2\pi}+a^2}{a^2}=\frac{1+2\pi}{2\pi}$ ，选 A.

3. 答案：D

解：正方体的体积为 1，过共顶点的三条棱中点的平面截该正方体截得的三棱锥的体积是 $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$ ，于是 8 个三棱锥的体积是 $\frac{1}{6}$ ，剩余部分的体积是 $\frac{5}{6}$ ，选 D.

4. 解析：选 A 依题意知，该几何体是一个底面半径为 $\frac{1}{2}$ 、高为 1 的圆柱，则其全面积

$$\text{为 } 2\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\pi\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{2}\pi.$$

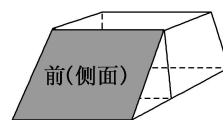
5. 解析：选 C 此几何体由半个球体与一个圆锥组成，其体积 $V=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 3^3+$

$$\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times\sqrt{5^2-3^2}=30\pi.$$

6. 解析：选 D 设球的半径为 R ，其内接正方体的棱长为 a ，则易知 $R^2=\frac{3}{4}a^2$ ，即 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ ，

$$\text{则 } \frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R^2}{6\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2}=\frac{\pi}{2}.$$

7. 解析: 选 C 由三视图可知几何体是一个放倒的直棱柱(最大的侧面贴在地面上), 直观图如图, 底面是等腰梯形, 其上底长为 2, 下底长为 4, 高为 4,



$\therefore$ 两底面积和为 $2 \times \frac{1}{2} \times (2+4) \times 4 = 24$, 四个侧面的面积为 $4 \times (4+2+2\sqrt{17}) = 24 + 8\sqrt{17}$,

$\therefore$ 几何体的表面积为 $48 + 8\sqrt{17}$.

8. 解析: 选 B 由平面 $ABC \perp$ 平面 ACD , 且 O 为 AC 的中点可知, $BO \perp$ 平面 ACD , 易知 $BO=2$, 故三棱锥 $N-AMC$ 的高为 $ON=2-x$, $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} MC \cdot AD = \sqrt{2}x$, 故三棱锥 $N-AMC$ 的体积为 $y=f(x) = \frac{1}{3} \cdot (2-x) \cdot \sqrt{2}x = \frac{1}{3}(-\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x) (0 < x < 2)$, 函数 $f(x)$ 的图象为开口向下的抛物线的一部分.

9. 解析: 选 B 依题意知, 该几何体是从一个长方体中挖去一个三棱柱后剩下的部分, 因此其体积等于 $2 \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times 4 = 12$.

10. 解析: 选 B 该空间几何体是底面边长为 4、高为 2 的正四棱锥, 这个四棱锥的斜高为 $2\sqrt{2}$, 故其表面积是 $4 \times 4 + 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 16 + 16\sqrt{2}$.

二、填空题

11. 答案: 148 cm^2

解: 底面菱形中, 对角线长分别是 6cm 和 8cm, 所以底面边长是 5cm, 侧面面积是 $4 \times 5 \times 5 = 100 \text{ cm}^2$, 两个底面面积是 48 cm^2 , 所以棱柱的全面积是 148 cm^2 .

12. 答案: $2\sqrt{2} : \sqrt{5}$

解: 设圆柱的母线长为 l , 因为两个圆锥的侧面展开图恰能拼成一个圆, 且它们的侧面积之比为 1:2, 所以它们的展开图即扇形的圆心角分别是 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3}$,

由圆锥侧面展开图扇形的圆心角的计算公式 $\theta = \frac{2\pi r}{l}$, 得 $r_1 = \frac{l}{3}$, $r_2 = \frac{2l}{3}$,

所以它们的高的比是 $\frac{\sqrt{l^2 - (\frac{l}{3})^2}}{\sqrt{l^2 - (\frac{2l}{3})^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

13. 答案: 1 cm^3

解: 转换一个角度来认识这个三棱锥, 即把它的两条侧棱(如长度为 1cm, 2cm 的两条)确定的侧面看作底面, 另一条侧棱作为高, 则此三棱锥的底面面积是 1, 高为 3,

则它的体积是 $\frac{1}{3} \times 1 \times 3 = 1 \text{ cm}^3$.

14. 答案: $\frac{b}{a}$

解: 矩形绕 a 边旋转, 所得几何体的体积是 $V_1 = \pi b^2 a$, 矩形绕 b 边旋转, 所得几何体的体积

是 $V_2 = \pi a^2 b$, 所以两个几何体的体积的比是 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}$.

15. 答案: 48π

解: 小圆周长为 4π , 所以小圆的半径为 2, 又这三点 A 、 B 、 C 之间距离相等,

所以每两点间的距离是 $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$,

又 A 、 B 之间的大圆劣弧长等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$, 所以 A 、 B 在大圆中的圆心角是 60° ,

所以大圆的半径 $R = 2\sqrt{3}$, 于是球的表面积是 $4\pi R^2 = 48\pi$.

16. 答案: 1: 9

解: 如图, 不难看出四面体 $EFGH$ 与四面体 $ABCD$ 是相似的。所以关键是求出它们的相似比,

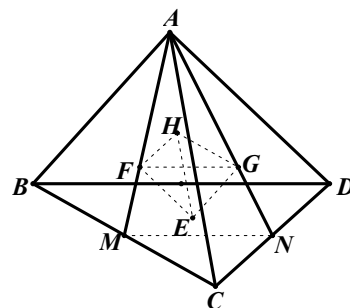
连接 AF 、 AG 并延长与 BC 、 CD 相交于 M 、 N ,

由于 F 、 G 分别是三角形的重心, 所以 M 、 N 分别是 BC 、 CD 的中点, 且 $AF: AM = AG: AN = 2: 3$,

所以 $FG: MN = 2: 3$, 又 $MN: BD = 1: 2$,

所以 $FG: BD = 1: 3$, 即两个四面体的相似比是 1: 3,

所以两个四面体的表面积之比是 1: 9.



17. 答案: $4R^2$

解: 如图, 过正方体的对角面 AC_1 作正方体和半球的截面。

则 $OC_1 = R$, $CC_1 = a$, $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 所以 $a^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = R^2$,

得 $a^2 = \frac{2}{3}R^2$, 所以正方体的表面积是 $6a^2 = 4R^2$.

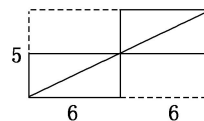
18. 答案: $\frac{\sqrt{2}}{6}$

解析: 由题知该多面体为正四棱锥, 底面边长为 1, 侧棱长为 1, 斜高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 连接顶点和底面中心即为高, 可求得高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以体积 $V = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

19. 答案: 13

解析: 根据题意, 利用分割法将原三棱柱分割为两个相同的三棱柱, 然后将其展开为如图所示的实线部分, 则可知所求最短路线的长为 $\sqrt{5^2 + 12^2} =$

13 (cm).



三、解答题

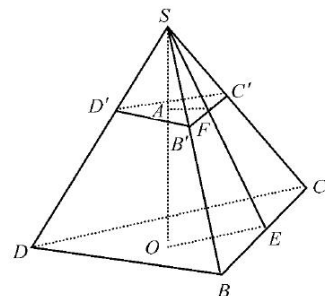
20. 解: 棱锥 $S-BCD$ 的截面为 $B'C'D'$, 过 S 作 $SF \perp B'C'$, 垂足为 F , 延长 SF 交 BC 于点 E , 连结 AF 和 OE ,

$\because$ 平面 $BCD \parallel$ 平面 $B'C'D'$, 平面 $B'C'D' \cap$ 平面 $SOE = AF$, 平面 $BCD \cap$ 平面 $SOE = OE$,

$\therefore AF \parallel OE$, 于是 $\frac{AF}{OE} = \frac{SA}{SO} = \frac{SF}{SE} = \frac{1}{3}$, 即 $SF = \frac{1}{3}SE$, 同理可得 $B'C' = \frac{1}{3}BC$,

$$\therefore S_{\triangle SB'C'} = \frac{1}{9}S_{\triangle SBC}, S_{\triangle SB'D'} = \frac{1}{9}S_{\triangle SBD}, S_{\triangle SC'D'} = \frac{1}{9}S_{\triangle SCD},$$

$$\therefore S_{\text{棱锥 } S-B'C'D'} = \frac{1}{9}Q, \therefore S_{\text{棱台侧}} = \frac{8}{9}Q.$$



21. 解: 设放入的球的半径为 R , 球心为 S , 当且仅当球与四棱锥的各个面都相切时, 球的半径最大, 连结 SA 、 SB 、 SC 、 SD 、 SP , 则把此四棱锥分割成四个三棱锥和一个四棱锥, 这些小棱锥的高均为 R , 底面为原四棱锥的侧面或底面. 由体积关系, 得

$$V_{P-ABCD} = \frac{R}{3}(S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCD} + S_{\triangle PAD} + S_{\square ABCD})$$

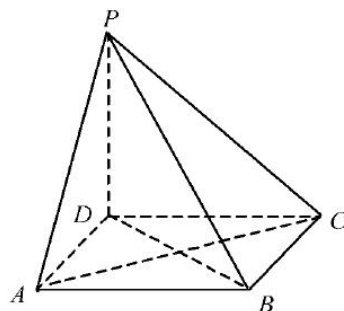
$$= \frac{R}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + a^2\right)$$

$$= \frac{R}{3}(2 + \sqrt{2})a^2$$

$$\text{又 } V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}S_{\text{正方形 } ABCD} \cdot PD = \frac{1}{3}a^3,$$

$$\therefore \frac{R}{3}(2 + \sqrt{2})a^2 = \frac{1}{3}a^3,$$

$$\text{解得 } R = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}a, \text{ 故所放入的球的最大半径为 } \frac{2 - \sqrt{2}}{2}a.$$



22. 解: (1) 由题知, 在图 2 中, $AB=3$, $BC=4$, $CA=5$,

$$\therefore AB^2 + BC^2 = CA^2, \therefore AB \perp BC.$$

$$\text{又 } \because AB \perp BB_1, BC \cap BB_1 = B, \therefore AB \perp \text{平面 } BCC_1B_1.$$

(2) 由题易知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 12 = 72$.

$\because$ 在图 1 中, $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACQ$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = BP = 3, AC = CQ = 7,$$

$$\therefore V_{A-CQPB} = \frac{1}{3} \times S_{\text{四边形 } CQPB} \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (3+7) \times 4 \times 3 = 20.$$

$$\therefore \text{多面体 } A_1B_1C_1-APQ \text{ 的体积 } V = V_{ABC-A_1B_1C_1} - V_{A-CQPB} = 72 - 20 = 52.$$

第 10 讲 空间几何体综合复习

1A 2A 3D 5 D 6B 7D 8D 10B 11D 12B
13C 14C 15C 16C 17B 18D

13、28 14、 $\frac{a^3}{6}$ 15. ②③ 16. 6π 17. 16π 18、小于

19、解：由题意有 $S_{\text{上}} = 40^2 = 1600\text{cm}^2$ ， $S_{\text{下}} = 60^2 = 3600\text{cm}^2$ 4 分

$$V = \frac{1}{3}h(S_{\text{上}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}} + S_{\text{下}}) = \frac{1}{3}h(1600 + \sqrt{1600 \times 3600} + 3600) = \frac{7600}{3}h \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{7600}{3}h = 190000 \Rightarrow h = 75\text{cm} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

20、解:如图,设所截等腰三角形的底边边长为 $x\text{cm}$.

$$\text{在 } Rt\triangle EOF \text{ 中, } EF = 5\text{cm}, OF = \frac{1}{2}x\text{cm} ,$$

$$\text{所以 } EO = \sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2} , \text{ 于是 } V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2}$$

依题意函数的定义域为 $\{x | 0 < x < 10\}$

21、(1) 图 (1) 中的几何体可看成是一个底面为直角梯形的直棱柱。直角梯形的上底为 1，下底为 2，高为 1；棱柱的高为 1。可求得直角梯形的四条边的长度为 1，1，2， $\sqrt{2}$ 。

所以此几何体的体积

$$V = S_{\text{梯形}} \cdot h = \frac{1}{2}(1+2) \times 1 \times 1 = \frac{3}{2}(\text{CM}^3)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{表面}} &= 2S_{\text{底}} + S_{\text{侧面}} \\ &= \frac{1}{2}(1+2) \times 1 \times 2 + (1+1+2+\sqrt{2}) \times 1 \\ &= 7 + \sqrt{2}(\text{CM}^2) \end{aligned}$$

(2)由图可知此正三棱柱的高为 2，底面正三角形的高为 $2\sqrt{3}$ ，可求得底面边长为 4。

$$\text{所以 } V = S \cdot h = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 2 = 8\sqrt{3}(\text{CM}^3)$$

$$\begin{aligned}
 S_{\text{表面}} &= 2S_{\text{底}} + S_{\text{侧面}} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} + 3 \times 4 \times 2 \\
 &= 8\sqrt{3} + 24(\text{CM}^2)
 \end{aligned}$$

22、(1) 如果按方案一，仓库的底面直径变成 16M, 则仓库的体积

$$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{16}{2}\right)^2 \times 4 = \frac{256}{3} \pi (\text{M}^3)$$

如果按方案二，仓库的高变成 8M, 则仓库的体积

$$V_2 = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{12}{2}\right)^2 \times 8 = \frac{288}{3} \pi (\text{M}^3)$$

(2) 如果按方案一，仓库的底面直径变成 16M, 半径为 8M.

$$\text{棱锥的母线长为 } l = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \quad \text{则仓库的表面积 } S_1 = \pi \times 8 \times 4\sqrt{5} = 32\sqrt{5}\pi (\text{M}^2)$$

如果按方案二，仓库的高变成 8M.

$$\text{棱锥的母线长为 } l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \quad \text{则仓库的表面积 } S_2 = \pi \times 6 \times 10 = 60\pi (\text{M}^2)$$

(3) $\because V_2 > V_1$, $S_2 < S_1$ $\therefore$ 方案二比方案一更加经济

第 11 讲 空间向量及其坐标表示

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	B	C	D	A	D	B	C	D

二、填空题

11. $\sqrt{65}$; 12. $(-4, 2, -4)$; 13. $[1, 5]$; 14. 3; 15. $\frac{5}{6}$

三、解答题

16. 解: $\because b_1 \parallel a$, $\therefore$ 令 $b_1 = (\lambda, \lambda, 0)$, $b_2 = b - b_1 = (1-\lambda, 1-\lambda, 1)$,
 又 $\because b_2 \perp a$, $\therefore a \cdot b_2 = (1, 1, 0) \cdot (1-\lambda, 1-\lambda, 1) = 1-\lambda+1-\lambda=2-2\lambda=0$,
 $\therefore \lambda=1$, 即 $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1)$.

17. 解: (1) 过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E, 则 $DE = CD \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OE = OB - BD \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$\therefore D$ 的坐标为 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 又 $\because C(0, 1, 0)$, $\therefore \overrightarrow{CD} = (0, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(2) 依题设有 A 点坐标为 $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\therefore \overrightarrow{AD} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$

则 $\cos \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$. 故异面直线 AD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

$$18. \text{解: (1)} \because |u|^2 = |a+tb|^2 = |a|^2 + 2(a \cdot b)t + t^2|b|^2 = |b|^2 \left(t + \frac{a \cdot b}{|b|^2}\right)^2 + |a|^2 - \frac{(a \cdot b)^2}{|b|^2},$$

$$\therefore \text{当 } t = -\frac{a \cdot b}{|b|^2} \text{ 时, } |u| = |a+tb| \text{ 最小.}$$

$$(2) \because b \cdot (a+tb) = a \cdot b + t|b|^2 = a \cdot b + |b|^2 \left(-\frac{a \cdot b}{|b|^2}\right) = 0 \therefore b \perp (a+tb).$$

$$19. \text{解: } \because \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC}), \overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO},$$

$$\therefore |\overrightarrow{BF}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BO}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}(4+1+2|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BC}|\cos 60^\circ) = \frac{7}{4},$$

$$|\overrightarrow{BF}| = \frac{\sqrt{7}}{2}; |\overrightarrow{OE}|^2 = \frac{4}{9}|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BO}|^2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = 4+4-4=4, |\overrightarrow{OE}| = 2.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} - |\overrightarrow{BO}|^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO}\right) = \frac{1}{2}(2-4-1) = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{OE} \rangle = \frac{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{OE}|} = \frac{-3}{2\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{14}, \text{ 故异面直线 OE 与 BF 所成角余弦 } \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

$$20. \text{解: (1) 设 } BP=t, \text{ 则 } CQ = \sqrt{2-(2-t)^2}, DQ = 2 - \sqrt{2-(2-t)^2},$$

$$\therefore B_1(2, 0, 2), D_1(0, 2, 2), P(2, t, 0),$$

$$Q(2 - \sqrt{2-(2-t)^2}, 2, 0), \overrightarrow{QB_1} = (\sqrt{2-(2-t)^2}, -2, 2), \overrightarrow{PD_1} = (-2, 2-t, 2)$$

$$\text{又 } \because B_1Q \perp D_1P \Leftrightarrow \overrightarrow{QB_1} \cdot \overrightarrow{PD_1} = 0, \therefore -2\sqrt{2-(2-t)^2} - 2(2-t) + 2 \times 2 = 0, \text{ 即 } \sqrt{2-(2-t)^2} = t$$

解得 $t=1$, 即 P, Q 分别为中点时, $B_1Q \perp D_1P$.

(2) 由(1)知 $PQ \parallel BD$, 且 $AC \perp PQ$, 设 $AC \cap PQ = E$, 连 C_1E ,

$\because CC_1 \perp$ 底面 BD , $CE \perp PQ$,

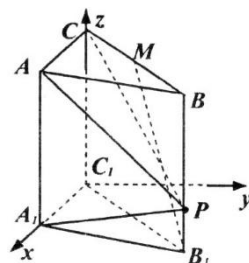
$\therefore C_1E \perp PQ$, 即 $\angle CEC_1$ 为所求二面角 $O-PQ-C_1$ 的平面角, 易得 $\tan \angle CEC_1 = 2\sqrt{2}$.

21. 解: 建立如图所示的空间直角坐标系, 则相关各点的坐标为 $A_1(2, 0, 0)$,

$$B_1(1, \sqrt{3}, 0), P(1, \sqrt{3}, z), M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), C(0, 0, 2), A(2, 0, 2)$$

$$\text{由 } A_1P \perp B_1M \text{ 知 } \overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{B_1M} = 0 \therefore (-1, \sqrt{3}, z) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2z = 0, \therefore z = \frac{1}{2},$$

即点 P 的坐标为 $P(1, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$.



(1) 设平面 APC 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{CP} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2x = 0, \\ x + \sqrt{3}y - \frac{3}{2}z = 0, \end{cases} \therefore n = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}z, z).$$

取 $z = -1$, 则有 $n = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$, 方向指向平面 APC 的左下方, 又 $\overrightarrow{PA_1} = (1, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$,

$$\cos \langle \overrightarrow{PA_1}, n \rangle = \frac{\overrightarrow{PA_1} \cdot n}{|\overrightarrow{PA_1}| \cdot |n|} = \frac{8}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{119}}{119}.$$

设直线 A_1P 与平面 APC 所成角为 α , 则 $\sin \alpha = \frac{8\sqrt{119}}{119}$.

(2) $|\overrightarrow{A_1P}| = \sqrt{1+3+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, 设 A_1 到平面 PAC 的距离为 d , 则

$$d = |\overrightarrow{A_1P}| \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{17 \times 7}} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

第 12 讲 空间向量在立体几何度量中的应用

一、填空题

1. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ 2. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ 3. 45° 4. $\frac{4}{5}$ 5. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
6. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 7. 平行 8. 90° 9. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 10. $\frac{1}{5}$

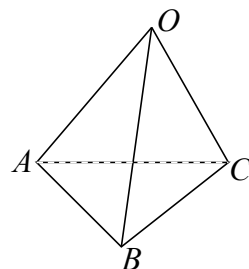
二、选择题

11. D 12. B 13. B 14. C

三、解答题

15. 解: $\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$
 $= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC} \rangle - |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB} \rangle$
 $= 8 \times 4 \times \cos 135^\circ - 8 \times 6 \times \cos 120^\circ = 24 - 16\sqrt{2}$
 $\therefore \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{24 - 16\sqrt{2}}{8 \times 5} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$,

所以, OA 与 BC 的夹角的余弦值为 $\frac{3-2\sqrt{2}}{5}$.



16. 解析: 以 C 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

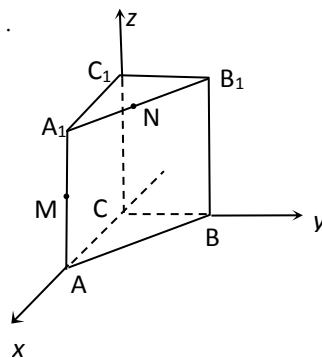
(1) 依题意得 $B(0, 1, 0)$, $M(1, 0, 1)$. $\therefore |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$.

(2) 依题意得 $A_1(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $B_1(0, 1, 2)$.

$\therefore \overrightarrow{BA_1} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{CB_1} = (0, 1, 2)$, $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.
 $= 3, |\overrightarrow{BA_1}| = \sqrt{6}, |\overrightarrow{CB_1}| = \sqrt{5}$

(3) 证明: 依题意得 $C_1(0, 0, 2)$, $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $\therefore \overrightarrow{A_1B} = (-1, 1, -2)$, $\overrightarrow{C_1N} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

$\therefore \overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{C_1N} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$, $\therefore \overrightarrow{A_1B} \perp \overrightarrow{C_1N}$



17. 解析: (1) $\because PC \perp$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC , $\therefore PC \perp AB$.

$\because CD \perp$ 平面 PAB , $AB \subset$ 平面 PAB , $\therefore CD \perp AB$. 又 $PC \cap CD = C$, $\therefore AB \perp$ 平面 PCB .

(2) 由(1) $AB \perp$ 平面 PCB , $\therefore PC = AC = 2$, 又 $\because AB = BC$, 可求得 $BC = \sqrt{2}$. 以 B 为原点, 如图建立坐标系. 则 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(\sqrt{2}, 0, 0)$, $P(\sqrt{2}, 0, 2)$.

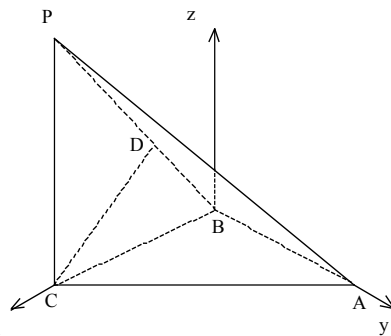
$\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (\sqrt{2}, 0, 0)$. 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 0 + 0 = 2$.
 $\cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. $\therefore$ 异面直线 AP 与 BC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$.

(3) 设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$.

$\overrightarrow{AB} = (0, -\sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$,
 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{m} = 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{2}y = 0, \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z = 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} y = 0, \\ x = -\sqrt{2}z \end{cases}$ 令 $z = -1$, 得 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}, 0, -1)$.

由 $PC \perp$ 平面 ABC 易知: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , 取 AC 的中点 E , 连接 BE , 则 $\overrightarrow{BE}$ 为平面 PAC 的一个法向量, $\overrightarrow{BE} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0)$, 故平面 PAC 的法向量也

可取为 $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$. $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\therefore$ 二面角 $C-PA-B$ 的余弦为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



18. 解析: (1) 以 A 为坐标原点, AB 、 AD 、 AP 分

别为 x 、 y 、 z 轴建立坐标系如图所示.

$\because PA=AB=1, BC=a, \therefore P(0, 0, 1), B(1, 0, 0), D(0, a, 0).$

(2) 设点 $Q(1, x, 0)$, 则 $\overrightarrow{DQ}=(1, x-a, 0), \overrightarrow{QP}=(-1, -x, 1).$

由 $\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{QP}=0$, 得 $x^2-ax+1=0$. 显然当该方程有非负实数解时, BC 边上才存在点 Q , 使得 $PQ \perp QD$, 故只须 $\Delta=a^2-4 \geq 0$. 因 $a>0$, 故 $a \geq 2$.

(3) 易见, 当 $a=2$ 时, BC 上仅有一点满足题意, 此时 $x=1$, 即 Q 为 BC 的中点.

取 AD 的中点 M , 过 M 作 $MN \perp PD$, 垂足为 N , 连结 QM 、 QN . 则 $M(0, 1, 0), P(0, 0, 1), D(0, 2, 0)$. $\because D、N、P$ 三点共线,

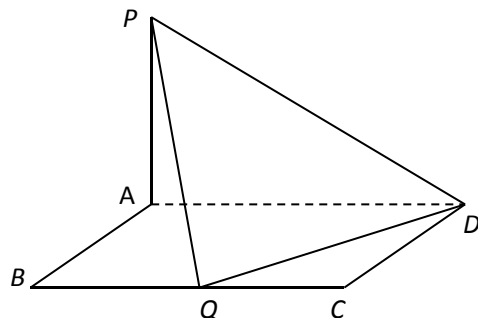
$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MD} + \lambda \overrightarrow{MP}}{1 + \lambda} = \frac{(0, 1, 0) + \lambda(0, -1, 1)}{1 + \lambda} = \frac{(0, 1 - \lambda, \lambda)}{1 + \lambda}$. 又 $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -1)$, 且 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$,

故 $\frac{(0, 1 - \lambda, \lambda)}{1 + \lambda} \cdot (0, 2, -1) = \frac{2 - 3\lambda}{1 + \lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$. 于是 $\overrightarrow{MN} = \frac{(0, 1 - \frac{2}{3}, \frac{2}{3})}{1 + \frac{2}{3}} = (0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

故 $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AB} = (1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$. $\because \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0 + 2 \times (-\frac{1}{5}) + (-1) \times (-\frac{2}{5}) = 0$,

$\therefore \overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{NQ}$. $\therefore \angle MNQ$ 为所求二面角的平面角. $\cos \angle MNQ = \frac{|\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NQ}|}{|\overrightarrow{NM}| \cdot |\overrightarrow{NQ}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

注: 该题还有很多方法解决各个小问, 以上方法并非最简.



20. 解析: (1) 传统方法易得证明 (略) (2) 传统方法或向量法均易解得 $\theta=30^\circ$;

(3) 解 以 A 为坐标原点, 直线 AD 、 AP 分别为 y 轴、 z 轴, 过 A 点垂直于平面 PAD 的直线为 x 轴, 建立空间直角坐标系 (如图). 由题设条件, 相关各点的坐标为

$A(0, 0, 0), B(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0), C(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, 0), D(0, a, 0), P(0, 0, a), E(0, \frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a)$

所以 $\overrightarrow{AE} = (0, \frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a)$, $\overrightarrow{AC} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, a)$, $\overrightarrow{PC} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, -a)$

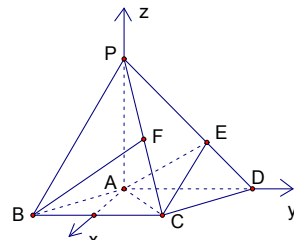
$\overrightarrow{BP} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, a)$, 设点 F 是棱 PC 上的点, $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PC} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a, \frac{1}{2}\lambda a, -\lambda a)$, 其中 $0 \leq \lambda < 1$, 则

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PF} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1), \frac{1}{2}a(1+\lambda), a(1-\lambda))$.

令 $\overrightarrow{BF} = \lambda_1 \overrightarrow{AC} + \lambda_2 \overrightarrow{AE}$ 得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a(1-\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda_1 \\ \frac{1}{2}a(1+\lambda) = \frac{1}{2}a\lambda_1 + \frac{2}{3}a\lambda_2 \\ a(1-\lambda) = \frac{1}{3}a\lambda_2 \end{cases}$ 解得 $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}$,

即 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$. 亦即, F 是 PC 的中点时, $\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}$ 共面,

又 $BF \not\subset$ 平面 AEC , 所以当 F 是 PC 的中点时, $BF \parallel$ 平面 AEC .



21. 解析: (1) 以 G 点为原点, $\overrightarrow{GB}$ 、 $\overrightarrow{GC}$ 、 $\overrightarrow{GP}$ 为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $P(0, 0, 4)$, 故 $E(1, 1, 0)$,

$$\overrightarrow{GE} = (1, 1, 0), \quad \overrightarrow{PC} = (0, 2, 4) \quad \cos \langle \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{PC} \rangle = \frac{\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{GE}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

(2) 平面 PBG 的单位法向量 $n = (0, \pm 1, 0) \because \overrightarrow{GD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC} = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$,

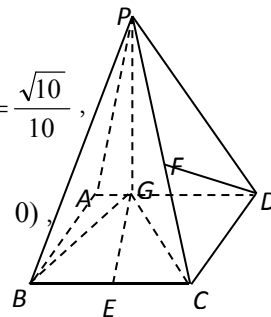
$\therefore$ 点 D 到平面 PBG 的距离为 $|\overrightarrow{GD} \cdot n| = \frac{3}{2}$.

(3) 设 $F(0, y, z)$, 则 $\overrightarrow{DF} = (0, y, z) - (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0) = (\frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}, z)$.

$\because \overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{GC}, \therefore \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$ 即 $(\frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}, z) \cdot (0, 2, 0) = 2y - 3 = 0$,

$\therefore y = \frac{3}{2}$, 又 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 即 $(0, \frac{3}{2}, z - 4) = \lambda(0, 2, -4), \therefore z = 1$,

故 $F(0, \frac{3}{2}, 1)$, $\overrightarrow{PF} = (0, \frac{3}{2}, -3), \overrightarrow{FC} = (0, \frac{1}{2}, -1), \therefore \frac{PF}{FC} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 3$.



22. 解析: (1) $\because SA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD, \therefore SA \perp BD$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AC \perp BD, \therefore BD \perp$ 平面 SAC ,

$\because BD \subset$ 平面 $EBD, \therefore$ 平面 $EBD \perp$ 平面 SAC .

(2) 设 $AC \cap BD = F$, 连结 SF , 则 $SF \perp BD, \because AB = 2, SA = 4, \therefore BD = 2\sqrt{2}$,

$$SF = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}, \therefore S_{\triangle SBD} = \frac{1}{2} BD \cdot SF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6,$$

设点 A 到平面 SBD 的距离为 h ,

$$\because SA \perp \text{平面 } ABCD, \therefore \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle SBD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABD} \cdot SA, \therefore 6 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4, \therefore h = \frac{4}{3},$$

(3) 设 $SA = a$, 以 A 为原点, AB 、 AD 、 AS 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 为计算

方便, 不妨设 $AB = 1$, 则 $C(1, 1, 0), S(0, 0, a), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0)$,

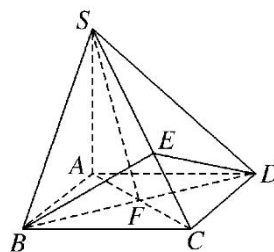
$$\therefore \overrightarrow{SC} = (1, 1, -a), \overrightarrow{SB} = (1, 0, -a), \overrightarrow{SD} = (0, 1, -a),$$

再设平面 SBC 、平面 SCD 的法向量分别为 $n_1 = (x_1, y_1, z_1), n_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{SC} = x_1 + y_1 + az_1 = 0 \\ n_1 \cdot \overrightarrow{SB} = x_1 - az_1 = 0 \end{cases} \quad \therefore y_1 = 0, \text{ 从而可取 } x_1 = a, \text{ 则 } z_1 = 1, \therefore n_1 = (a, 0, 1),$$

$$\begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{SC} = x_2 + y_2 + az_2 = 0 \\ n_2 \cdot \overrightarrow{SD} = x_2 - az_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore x_2 = 0, \text{ 从而可取 } y_2 = a, \text{ 则 } z_2 = 1, \therefore n_2 = (0, a, 1),$$

$$\therefore \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{1}{a^2 + 1}, \text{ 要使二面角 } B-SC-D \text{ 的大小为 } 120^\circ, \text{ 则 } \frac{1}{a^2 + 1} = \frac{1}{2}, \text{ 从而 } a = 1,$$



第 13 讲 线性规划

一. 选择题

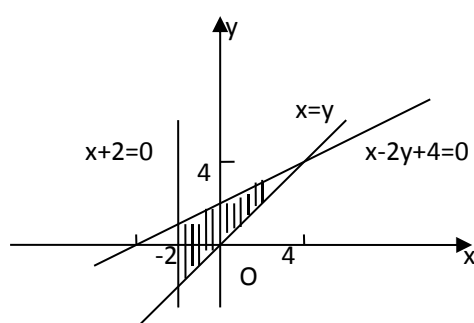
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	C	C	C	D	C	D	D	A

二. 填空题

11. $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 12. $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ 13. $[2, 4]$ 14. 2

三. 解答题

15.



16. [解析]: 由约束条件作出其所确定的平面区域 (阴影部分),

其四个顶点为 $O(0, 0)$, $B(3, 0)$, $A(0, 5)$, $P(1, 4)$. 过 P 点作 y 轴的垂线, 垂足为 C .

$$\text{则 } AC = |5-4| = 1, PC = |1-0| = 1, OC = 4, OB = 3, AP = \sqrt{2},$$

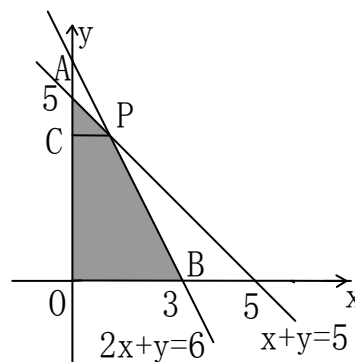
$$PB = \sqrt{(4-0)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{得 } S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC \cdot PC = \frac{1}{2},$$

$$S_{\text{梯形} COBP} = \frac{1}{2} (CP + OB) \cdot OC = 8$$

$$\text{所以 } S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ACP} + S_{\text{梯形} COBP} = \frac{17}{2},$$

$$C_{\text{阴影部分}} = OA + AP + PB + OB = 8 + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

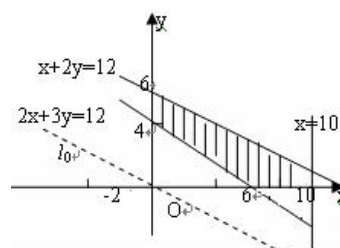


17. [解析]: 作出其可行域如图所示, 约束条件所确定的平面区域的五个顶点为

$(0, 4)$, $(0, 6)$, $(6, 0)$, $(10, 0)$, $(10, 1)$, 作直线 $l_0: 10x + 15y = 0$,

再作与直线 l_0 平行的直线 $l: 10x + 15y = z$,

由图象可知, 当 l 经过点 $(10, 1)$ 时使 $z = 10x + 15y$ 取得



最大值, 显然 $z_{\max} = 10 \times 10 + 15 \times 1 = 115$,

此时最优解为 $(10, 1)$.

18. [解析]: 作出其可行域如图所示, 约束条件所确定的平面区域的四个顶

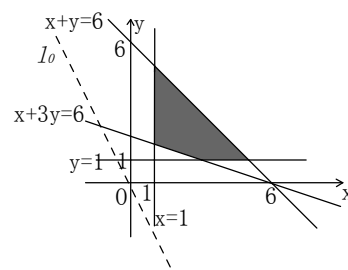
点为 $(1, \frac{5}{3})$, $(1, 5)$, $(3, 1)$, $(5, 1)$, 作直线 $l_0: 2x + y = 0$, 再作与

直线 l_0 平行的直线 $l: 2x + y = z$,

由图象可知, 当 l 经过点 $(1, \frac{5}{3})$ 时使 $z = 2x + y$ 取得最小值,

$$z_{\min} = 2 \times 1 + 1 \times \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

当 l 经过点 $(5, 1)$ 时使 $z = 2x + y$ 取得最大值, $z_{\max} = 2 \times 5 + 1 \times 1 = 11$



19. [解析]: 由题意可得, A 市、B 市、C 市调往 D 市的机器台数分别为 x 、 y 、 $(18-x-y)$, 调往 E 市的机器台数分别为 $(10-x)$ 、 $(10-y)$ 、 $[8-(18-x-y)]$. 于是得

$$W = 200x + 800(10-x) + 300y + 700(10-y) + 400(18-x-y) + 500[8-(18-x-y)] = -500x - 300y + 17200$$

$$\text{设 } W = 17200 - 100T, \text{ 其中 } T = 5x + 3y,$$

又由题意可知其约束条件是

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 \leq 18-x-y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 10 \leq x+y \leq 18 \end{cases}$$

作出其可行域如图: 作直线 $l_0: 5x + 3y = 0$,

再作直线 l_0 的平行直线 $l: 5x + 3y = T$

当直线 l 经过点 $(0, 10)$ 时, T 取得最小值,

当直线 l 经过点 $(10, 8)$ 时, T 取得最大值,

所以, 当 $x=10, y=8$ 时, $W_{\min}=9800$ (元)

当 $x=0, y=10$ 时, $W_{\max}=14200$ (元).

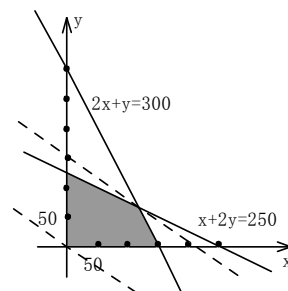
答: W 的最大值为 14200 元, 最小值为 9800 元.

20. 分析: 将已知数据列成下表:

消耗量 资源	甲种棉纱 (1 吨)	乙种棉纱 (1 吨)	资源限额 (吨)
一级子棉 (吨)	2	1	300
二级子棉 (吨)	1	2	250
利 润 (元)	600	900	

解: 设生产甲、乙两种棉纱分别为 x 吨、 y 吨, 利润总额为 z 元,

$$\text{那么 } \begin{cases} 2x + y \leq 300 \\ x + 2y \leq 250 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad z = 600x + 900y.$$



作出以上不等式组所表示的平面区域(如图),即可行域.

作直线 $l: 600x+900y=0$, 即直线 $l: 2x+3y=0$, 把直线 l 向右上方平移至 l_1 的位置时, 直线经过可行域上的点 M , 且与原点距离最大, 此时 $z=600x+900y$ 取最大值. 解方程组

$$\begin{cases} 2x+y=300 \\ x+2y=250 \end{cases}, \text{得 } M \text{ 的坐标为 } x=\frac{350}{3} \approx 117, y=\frac{200}{3} \approx 67.$$

答: 应生产甲种棉纱 117 吨, 乙种棉纱 67 吨, 能使利润总额达到最大.

第 14 讲 直线和圆锥曲线的参数方程

一、填空题

1. 相交; 2. $\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)、 $10+6\sqrt{3}$; 3. 两条射线; 4. $x-3y=5(x \geq 2)$

5. 略 6. 椭圆; 7. $\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$; 8. $\sqrt{5}$; 9. 70° ; 10. 相切;

11. $(-1, 2)$ 或 $(-3, 4)$; 12. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$; 13. $\frac{b^2+16}{4}$ ($0 < b \leq 4$) 或 $2b$ ($b > 4$);

二、选择题

13. D 14. B 15. D 16. B

三、解答题

17. 解: (1) 直线的参数方程是 $\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=1+\frac{1}{2}t; \end{cases}$ (t 是参数)

(2) 因为点 A, B 都在直线 l 上, 所以可设它们对应的参数为 t_1 和 t_2 , 则点 A, B 的坐标分别为

$$A\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}t_1, 1+\frac{1}{2}t_1\right), B\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}t_2, 1+\frac{1}{2}t_2\right)$$

以直线 L 的参数方程代入圆的方程 $x^2+y^2=4$ 整理得到 $t^2+(\sqrt{3}+1)t-2=0$

①

因为 t_1 和 t_2 是方程①的解, 从而 $t_1t_2=-2$. 所以 $|PA| \cdot |PB| = |t_1t_2| = |-2| = 2$.

18. 解: 将 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-5+\sqrt{3}t \end{cases}$ 代入 $x-y-2\sqrt{3}=0$ 得 $t=2\sqrt{3}$,

$$\text{得 } P(1+2\sqrt{3}, 1), \text{ 而 } Q(1, -5), \text{ 得 } |PQ| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = 4\sqrt{3}$$

19、(1) 解：设椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 2\sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$, $d = \frac{|4 \cos \theta - 4\sqrt{3} \sin \theta - 12|}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} |\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta - 3| = \frac{4\sqrt{5}}{5} \left| 2 \cos(\theta + \frac{\theta}{3}) - 3 \right|$$

当 $\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$ 时, $d_{\min} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 此时所求点为 $(2, -3)$ 。

(2): (先设出点 P 的坐标, 建立有关距离的函数关系)

设 $P(3 \cos \theta, 2 \sin \theta)$, 则 P 到定点 $(1, 0)$ 的距离为

$$d(\theta) = \sqrt{(3 \cos \theta - 1)^2 + (2 \sin \theta - 0)^2} = \sqrt{5 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 5} = \sqrt{5 \left(\cos \theta - \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{16}{5}}$$

当 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 时, $d(\theta)$ 取最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

20. 1) 设圆的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$, $2x + y = 2 \cos \theta + \sin \theta + 1 = \sqrt{5} \sin(\theta + \varphi) + 1$

$$\therefore -\sqrt{5} + 1 \leq 2x + y \leq \sqrt{5} + 1$$

(2) $x + y + a = \cos \theta + \sin \theta + 1 + a \geq 0$

$$\therefore a \geq -(\cos \theta + \sin \theta) - 1 = -\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1$$

$$\therefore a \geq -\sqrt{2} - 1$$

21、 $20\sqrt{2}$

22. (1) $m > \frac{23 + 4\sqrt{3}}{12}$, (2) $m = 3$

第 15 讲 阶段测试

一、选择题

1、B 2、C 3、C 4、B 5、A 6、C 7、D 8、A 9、C 10、B 11、D 12、C

二、填空题

13、4 14、1 15、 $\frac{3}{2}$ 16、(3)

三、解答题

17、设圆台的母线长为 l ，则圆台的上底面面积为 $S_{\text{上}} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

圆台的上底面面积为 $S_{\text{下}} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ 所以圆台的底面面积为 $S = S_{\text{上}} + S_{\text{下}} = 29\pi$

又圆台的侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi(2+5)l = 7\pi l$ 于是 $7\pi l = 25\pi$ 即 $l = \frac{29}{7}$ 为所求.

18. (1) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CE \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CE$,
因为 $AB \perp AD$, $CE \parallel AB$, 所以 $CE \perp AD$, 又 $PA \cap AD = A$, 所以 $CE \perp$ 平面 PAD .

(2) 由(1)可知 $CE \perp AD$, 在直角三角形 ECD 中, $DE = CD \cdot \cos 45^\circ = 1$, $CE = CD \cdot \sin 45^\circ = 1$.

又因为 $AB = CE = 1$, $AB \parallel CE$, 所以四边形 $ABCE$ 为矩形, 所以

$$S_{ABCD} = S_{ABCE} + S_{\triangle ECD} = AB \cdot AE + \frac{1}{2}CE \cdot DE = 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{5}{2}, \text{ 又 } PA \perp \text{平面 } ABCD, PA = 1,$$

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积等于 $\frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PA = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{6}$

19、(I) 取 AB 的中点 E , 连结 DE , CE ,

因为 $\triangle ADB$ 是等边三角形, 所以 $DE \perp AB$.

当平面 $ADB \perp$ 平面 ABC 时,

因为平面 $ADB \cap$ 平面 $ABC = AB$,

所以 $DE \perp$ 平面 ABC , 可知 $DE \perp CE$

由已知可得 $DE = \sqrt{3}$, $EC = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中, $CD = \sqrt{DE^2 + EC^2} = 2$.

(II) 当 $\triangle ADB$ 以 AB 为轴转动时, 总有 $AB \perp CD$. 证明如下:

①当 D 在平面 ABC 内时, 因为 $AC = BC$, $AD = BD$,

所以 C, D 都在线段 AB 的垂直平分线上, 即 $AB \perp CD$.

②当 D 不在平面 ABC 内时, 由(I)知 $AB \perp DE$. 又因 $AC = BC$, 所以 $AB \perp CE$.

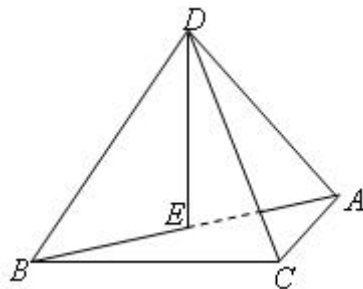
又 DE, CE 为相交直线, 所以 $AB \perp$ 平面 CDE , 由 $CD \subset$ 平面 CDE , 得 $AB \perp CD$.

综上所述, 总有 $AB \perp CD$.

20、 $\because AO \perp \alpha$, 由斜线和平面所成角的定义可知, $\angle ABO$ 为 AB 和 α 所成角,

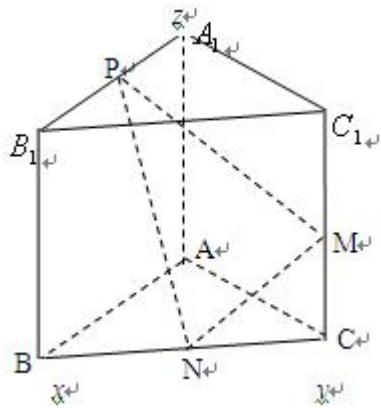
又 $\because \cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$,

$$\therefore \cos \angle ABO = \frac{\cos \angle ABC}{\cos \angle CBO} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$



$\therefore \angle BAO = 45^\circ$ ，即斜线 AB 和平面 α 所成角为 45° 。

21、(1) 以 AB, AC, AA_1 分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ，



则 $\overrightarrow{PN} = (\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2}, -1)$ ，

平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{PN}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{PN} \cdot \vec{n}|}{\|\overrightarrow{PN}\| \|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}}} \quad (*)$

于是问题转化为二次函数求最值，而 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，当 θ 最大时， $\sin \theta$ 最大，所以当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，

$$(\sin \theta)_{\max} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(2) 已知给出了平面 PMN 与平面 ABC 所成的二面角为 45° ，即可得到平面 ABC 的一个法向量为

$\vec{n} = \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$ ，设平面 PMN 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ， $\overrightarrow{MP} = (\lambda, -1, \frac{1}{2})$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} (\lambda - \frac{1}{2})x - \frac{1}{2}y + z = 0 \\ \lambda x - y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} y = \frac{2\lambda + 1}{3}x \\ z = \frac{2(1 - \lambda)}{3}x \end{cases}.$$

令 $x = 3$ ，得 $\vec{m} = (3, 2\lambda + 1, 2(1 - \lambda))$ 这样 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 就表示出来了，于是由

$$\left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{m}\| \|\vec{n}\|} = \frac{|2(1 - \lambda)|}{\sqrt{9 + (2\lambda + 1)^2 + 4(1 - \lambda)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $\lambda = -\frac{1}{2}$, 故点 P 在 B_1A_1 的延长线上, 且 $|A_1P| = \frac{1}{2}$.

22、(1) 证明: 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1 \parallel CC_1$,

又 $CC_1 \not\subset$ 面 ABB_1A_1 , 所以 $CC_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , $ABCD$ 是正方形, 所以 $CD \parallel AB$,

又 $CD \not\subset$ 面 ABB_1A_1 , 所以 $CD \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 所以平面 $CDD_1C_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ,

所以 $C_1D \parallel$ 平面 ABB_1A_1 .

(2) 解: $ABCD$ 是正方形, $AD \perp CD$, 因为 $A_1D \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $A_1D \perp AD$, $A_1D \perp CD$, 如图, 以 D 为原点建立

空间直角坐标系 $D-xyz$,

在 $\triangle ADA_1$ 中, 由已知可得 $A_1D = \sqrt{3}$,

所以 $D(0,0,0), A_1(0,0,\sqrt{3}), A(1,0,0), C_1(-1,1,\sqrt{3})$,

$B_1(0,1,\sqrt{3}), D_1(-1,0,\sqrt{3}), B(1,1,0)$,

$\overrightarrow{BD_1} = (-2, -1, \sqrt{3})$,

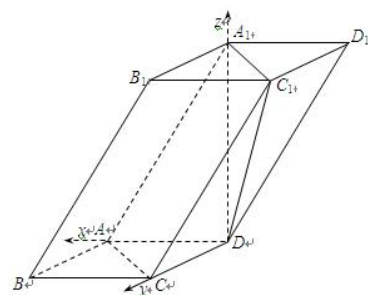
因为 $A_1D \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $A_1D \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $A_1D \perp B_1D_1$,

又 $B_1D_1 \perp A_1C_1$, 所以 $B_1D_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ,

所以平面 A_1C_1D 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$,

设 $\overrightarrow{BD_1}$ 与 $\mathbf{n}$ 所成的角为 β , 又 $\overrightarrow{BD_1} = (-2, -1, \sqrt{3})$, 则 $\cos \beta = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BD_1}|} = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = -\frac{3}{4}$.

所以直线 BD_1 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$.



第 16 节 二项式定理

一选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

答案	C	D	A	B	C	C	B	B	C	C	B	A
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

二、填空题：

13. 1 或 3 14. 48 15. 7 16. 324

三、解答题

17. 解：由二项式系数的性质：二项展开式中偶数项的二项式系数之和为 2^{n-1} ，得 $n=9$ ，由

$$\text{通项 } T_{r+1} = C_9^r \cdot (\sqrt{x})^{9-r} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{x^2}}\right)^r = C_9^r \cdot (-2)^r \cdot x^{\frac{9-r}{2} - \frac{2}{3}r},$$

$$\text{令 } \frac{9-r}{2} - \frac{2}{3}r = 1, \text{ 得 } r=3, \text{ 所以 } x \text{ 的二项式系数为 } C_9^3=84,$$

$$\text{而 } x \text{ 的系数为 } C_9^3 \cdot (-2)^3 = 84 \times (-8) = -672.$$

18. (1) $A_9^3 = 504$ (2) 287280 (3) 17280 (4) 43200

19. (1) 210 (2) 105 (3) 70

20. 解：由题意得 $2^{n-1} + 120 = 2^{2n-1}$ 即 $(2^n - 16)(2^n + 15) = 0$ $\therefore 2^n - 16 = 0, n = 4$

$$(1) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^4 \text{ 展开式的第三项的系数为 } C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$(2) (a+b)^8 \text{ 展开的中间项为 } T_5 = C_8^4 a^4 b^4 = 70a^4 b^4$$

21. 解：(I) $C_n^4 + C_n^6 = 2C_n^5$ $\therefore n=7$ 或 $n=14$,

当 $n=7$ 时，展开式中二项式系数最大的项是 T_4 和 T_5

$$\text{且 } T_4 = C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 (2x)^3 = \frac{35}{2}x^3, \quad T_5 = C_7^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 (2x)^4 = 70x^4$$

第 17 讲 期末复习

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	C	B	B	D	C	C	D	D

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

11. 252 12. $\frac{1}{2}dS$ 13. 4 14. 4

三、解答题（本大题共 6 题，共 76 分）

15. (12 分) 解一：记事件 A 为“中国队与巴西队被分在同一小组”，则事件 A 的对立事件； $\bar{A}$ 为

“中国队与巴西队被分在两个小组”。8 支球队分为两组共有 C_8^4 种方法，即基本事

件总数为 C_8^4 ，其中中国队与巴西队被分在两个小组有 $C_2^1 C_6^3$ 种可能，

$$\therefore P(\bar{A}) = \frac{C_2^1 C_6^3}{C_8^4} = \frac{4}{7}$$

根据对立事件的概率加法公式 $\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

解二：设巴西队已被分在某组，中国队此时面临 7 种可能位置，其中与巴西同组的位置有 3 种，故两队同组的概率为 $\frac{3}{7}$ 。答：中国队与巴西队被分在同一组的概率为 $\frac{3}{7}$ 。

16. (12 分) 证明：（1）取 PD 中点 E，连接 NE、AE，则四边形 MNEA 是平行四边形，所以 MN//AE，所以 MN//平面 PAD

（2）连接 AC、BD 交于 O，连接 OM、ON，因为 ON//PA，所以 ON⊥平面 ABCD，因为 OM⊥AB，由三垂线定理知，MN⊥AB；

（3）∵ PA⊥面 AC，AD 是 PD 在面 AC 内的射影，CD⊥AD ∴ CD⊥PD ∴ ∠PDA 是二面角 P-CD-B 的平面角 θ。当 θ=45° 时，AE⊥PD，AE⊥CD，∴ AE⊥面 PCD ∵ MN//AE ∴ MN⊥面 PCD，∵ PC⊂面 PCD，∴ MN⊥PC，又由（2）知 MN⊥AB，∴ MN 是 AB 与 PC 的公垂线。

17. (12 分) 解：每个人上网的概率为 0.5，作为对立事件，每个人不上网的概率也为 0.5，在 6 个人需上网的条件下，r 个人同时上网这个事件（记为 A_r ）的概率为：

$$P(A_r) = C_6^r \cdot 0.5^r \cdot (1-0.5)^{6-r} = C_6^r \cdot 0.5^6 = \frac{1}{64} C_6^r \text{ 式中 } r=0,1,2,\dots,6$$

第（1）问的解法一 应用上述记号，至少 3 人同时上网即为事件 $A_3+A_4+A_5+A_6$ ，因为 A_3 、 A_4 、 A_5 、 A_6 为彼此互斥事件，所以可应用概率加法公式，得至少 3 人同时上网的概率为 $P=P(A_3+A_4+A_5+A_6)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)$

$$= \frac{1}{64} (C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6) = \frac{1}{64} (20+15+6+1) = \frac{21}{32}$$

解法二 “至少 3 人同时上网”的对立事件是“至多 2 人同时上网”，即事件 $A_0+A_1+A_2$ ，因为 A_0 、 A_1 、 A_2 是彼此互斥的事件，所以至少 3 人同时上网的概率为

$$P=1-P(A_0+A_1+A_2)=1-[P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)]=1-\frac{1}{64}(C_6^0+C_6^1+C_6^2)=1-\frac{1}{64}(1+6+15)=\frac{21}{32}$$

第（2）问的解法：记“至少 r 个人同时上网”为事件 B_r ，则 B_r 的概率 $P(B_r)$ 随 r 的增加而减少，依题意是求满足 $P(B_r)<0.3$ 的整数 r 的值，因为 $P(B_6)=P(A_6)=\frac{1}{64}<0.3$ ，

$$P(B_5)=P(A_5+A_6)=P(A_5)+P(A_6)=\frac{1}{64}(C_6^5+C_6^6)=\frac{7}{64}<0.3$$

$$P(B_4)=P(A_4+A_5+A_6)=P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)=\frac{1}{64}(C_6^4+C_6^5+C_6^6)=\frac{1}{64}(15+6+1)=\frac{11}{32}>0.3$$

因为至少 4 人同时上网的概率大于 0.3, 所以至少 5 人同时上网的概率小于 0.3.

18. (12 分) 解: 5 把钥匙, 逐把试开有 A_5^5 种等可能的结果.

(1) 第三次打开房门的结果有 A_4^4 种, 因此恰好第三次打开房门的概率 $P(A)=\frac{A_4^4}{A_5^5}=\frac{1}{5}$.

(2) 三次内打开房门的结果有 $3A_4^4$ 种, 因此所求概率 $P(A)=\frac{3A_4^4}{A_5^5}=\frac{3}{5}$.

(3) 解法一 因 5 把内有 2 把房门钥匙, 故三次内打不开的结果有 $A_3^3 \cdot A_2^2$ 种, 从而

$$\text{三次内打开的结果有 } A_5^5 - A_3^3 \cdot A_2^2 \text{ 种, 所求概率 } P(A)=\frac{A_5^5 - A_3^3 \cdot A_2^2}{A_5^5}=\frac{9}{10}.$$

解法二 三次内打开的结果包括: 三次内恰有一次打开的结果有 $C_2^1 A_3^1 A_2^1 A_3^3$ 种;

三次内恰有 2 次打开的结果有 $A_3^2 A_3^3$ 种, 因此, 三次内打开的结果有 $C_2^1 A_3^1 A_2^1 A_3^3 + A_3^2 A_3^3$, 所

$$\text{求概率 } P(A)=\frac{C_2^1 A_3^1 A_2^1 A_3^3 + A_3^2 A_3^3}{A_5^5}=\frac{9}{10}.$$

19. (14 分) 解: 末三项的二项式系数分别为: $C_n^{n-2}, C_n^{n-1}, C_n^n$, 由题设得: $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 121$

$$\text{即 } C_n^2 + C_n^1 + C_n^0 = 121, \therefore n^2 + n - 240 = 0 \quad \therefore n = 15 \text{ (} n = -16 \text{ 舍去)}$$

当 $n=15$ 时, 二项式系数最大的为中间项第 8、9 项. 分别为 $C_{15}^7 3^7 x^7$ 与 $C_{15}^8 3^8 x^8$

$\therefore$ 展开式通项 $T_{r+1} = C_{15}^r (3x)^r = C_{15}^r 3^r \cdot x^r$ 设 T_{r+1} 项系数最大, 则有

$$\begin{cases} C_{15}^r 3^r \geq C_{15}^{r-1} 3^{r-1} \\ C_{15}^r 3^r \geq C_{15}^{r+1} 3^{r+1} \end{cases}$$

$$\text{解得 } 11 \leq r \leq 12, \therefore \text{展开式中系数最大的项为 } T_{12} = C_{15}^{11} 3^{11} x^{11}, T_{13} = C_{15}^{12} 3^{12} x^{12}$$

20. (14 分) 解: (1) 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面展开图是一个长为 9, 宽为 4 的矩形, 其对角线的长为 $\sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$

(2) 如图 1, 将侧面 BB_1C_1C 绕棱 CC_1 旋转 120° 使其与侧面 AA_1C_1C 在同一平面上, 点 P 运动到点 P_1 的位置, 连结 MP_1 , 则 MP_1 就是由点 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到点 M 的最短路线. 设 $PC=x$, 则 $P_1C=x$

在 $Rt\triangle MAP_1$ 中, 由勾股定理得: $(3+x)^2 + 2^2 = 29$

$$\text{解得: } x = 2 \quad \therefore PC = P_1C = 2$$

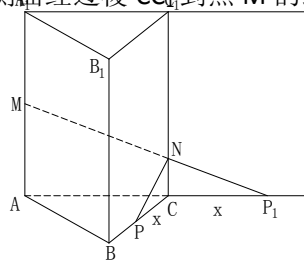


图1

$$\therefore \frac{NC}{MA} = \frac{P_1C}{P_1A} = \frac{2}{5} \quad \therefore NC = \frac{4}{5}$$

(3) 如图 2, 连接 PP_1 , 则 PP_1 就是平面 NMP 与平面 ABC 的交线.

作 $NH \perp PP_1$ 于 H , 又 $CC_1 \perp$ 平面 ABC , 连结 CH

由三垂线定理得: $CH \perp PP_1$

$\therefore \angle NHC$ 就是平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角的平面角 (锐角)

在 $Rt\triangle PHC$ 中, $\therefore \angle PCH = \frac{1}{2} \angle PCP_1 = 60^\circ$

$$\therefore CH = \frac{1}{2} PC = 1 \quad \text{在 } Rt\triangle NCH \text{ 中, } \tan \angle NHC = \frac{NC}{CH} = \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$$

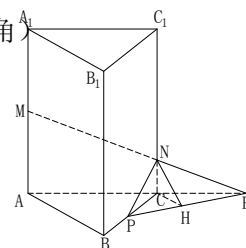


图2

故平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角 (锐角) 的大小为 $\arctan \frac{4}{5}$