高二数学　新编教案

目录

第 1 讲：初中平面向量衔接

[知识概要]

1.向量及其概念

向量是既有大小又有方向的量，记作$\overrightarrow{AB}$，向量的大小也叫是向量的模记作$|\overrightarrow{AB}|$，向量的模是非负实数，可以比较大小，而向量不能比较大小.

2.两个特殊的向量

零向量$\vec{0}$是模为 0 的向量，它的方向是任意的，一般规定所以的零向量均相等；而单位向量$\vec{e}$是模为一个单位的向量，单位向量方向不确定。注意$\vec{0}$与实数0是不同的，单位向量$\vec{e}$与实数 1 是不同的.

3.向量间的关系

(1)共线(平行)向量：$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反，注意$\vec{0}//\vec{a}$.

(2)相等向量：$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|$且方向相同.

(3)相等向量一定共线，但共线向量不一定相等；平行向量与共线向量是一回事，没有区别。表示平行(或共线)向量的有向线段可以在一条直线上，也可以平行；而直线平行与共线是不同的，两条直线平行就一定不共线.

4.向量的线性运算

(1)向量的线性运算包加法、减法与数乘三种运算，它们运算的结果仍然是向量；向量的加法与实数的加法类似，满足交换律、结合律与分配律.

(2)向量加法遵循平行四边形法则或三角形法则，同时多边形法则也成立，即

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{OA_n}$$

(3)向量的减法：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，注意顺序不要错

5.共线问题

(1)证明向量$\vec{a}//\vec{b}$:$\vec{a}=\lambda\vec{b} \Rightarrow \vec{a}//\vec{b}$.

(2)证明点共线：$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC} \Rightarrow A$、$B$、$C$三点共线.

[典型例题]

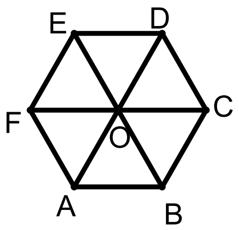
1.以下说法错误的是(　　)

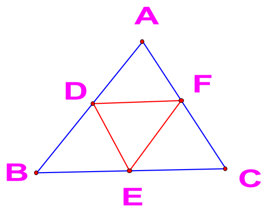
A．零向量与任一非零向量平行　　B.零向量与单位向量的模不相等

C.平行向量方向相同　　D.平行向量一定是共线向量

2.如图，在正六边形 ABCDEF 中，点 O 为其中心，则下列判断错误的是(　　)

A．$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$；B．$\overrightarrow{AB}\ //\ \overrightarrow{DE}$；C．$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BE}\right|$；D. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FC}$.





3.如图，D，E，F 分别是ΔABC 的边 AB，BC，CA 的中点，则(　　)

A．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$；　B．$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$；

C．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}=\vec{0}$；　D．$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FC}=\vec{0}$.

4.下列命题正确的个数是(　　)

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$；　②$0\overrightarrow{AB}=\vec{0}$；　③$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；　④$0\overrightarrow{AB}=0$.

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

5.点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}=$(　　)

A．$-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$；B．$-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$；C．$\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$；D．$\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

7.若 $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AB}=$ _____ $\overrightarrow{AC}$.

8.已知 O、A、B 是平面上的三个点，直线 AB 上有一点 C，满足 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$，若 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OC}$，则 $\overrightarrow{OC}=$______________.　　.

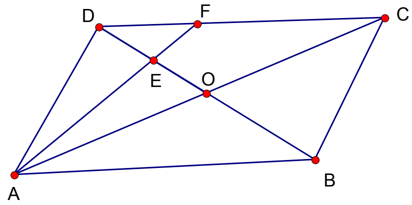
9.已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，且 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+k\vec{b}$ 共线，则实数 $k=$ ____________.　　.

10.已知平面内不共线的四点 O,A,B,C,满足 $\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，则 $\left|\overrightarrow{AB}\right|:\left|\overrightarrow{BC}\right|=$____________.

11.已知 ΔABC 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$，若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$

成立，则实数 $m=$___________.

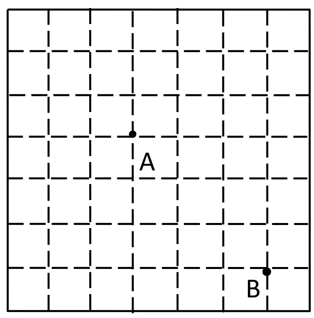
12.在平行四边形 $ABCD$ 中，E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点，或 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，其中 $\lambda,\mu\in R$，则 $\lambda+\mu=$__________.



13.在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 交于点 F．若 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$

14.如图的方格纸由若干个边长为 1 的小方形并在一起组成，方格纸中有两个定点 A、B，点 C 为小正方形的顶点，且 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5}$.

(1)画出所有的向量 $\overrightarrow{AC}$；(2)求 $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ 的最大值与最小值.



15.已知 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 是两个不共线的向量，

(1)若 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{e_1}-8\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$，求证：$A$、$B$、$D$ 三点共线；

(2)若 $k\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ 与 $4\overrightarrow{e_1}+k\overrightarrow{e_2}$ 共线，求实数 k 的值.

【随堂练习】

1.下列命题：

①向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度与 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等；

②向量 a 与向量 b 平行，则 a 与 b 的方向相同或相反；

③两个有共同起点的单位向量，其终点必相同；

④向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A、B、C、D 必在同一直线上.

其中真命题的序号是______.

2. 下列各式：

①$|a|=\sqrt{a\bullet a}$；

②$(a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)$；

③$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$；

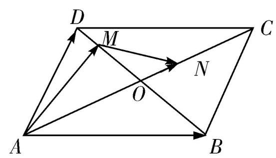
④在任意四边形 $ABCD$ 中，M 为 AD 的中点，N 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$；

⑤$a=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$b=(\cos\beta,\sin\beta)$，且 a 与 b 不共线，则 $(a+b)\perp(a-b)$.

其中正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3.如图，$ABCD$ 是平行四边形，AC、BD 交于点 O，点 M 在线段 DO 上，且 $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DO}$，点 N 在线段 OC 上,且 $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$,设 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$,试用 a、b 表示 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{MN}$.



4．O 是平面α上一点，A、B、C 是平面α上不共线的三点，平面α内的动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，若$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，则 $\overrightarrow{PA}\bullet(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的值为________.

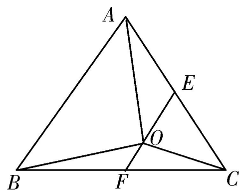
5. 设两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.

(1)若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$， $\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$， $\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

求证：A，B，D 三点共线；

(2)试确定实数 k，使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线.

6. 已知 O 是正三角形 BAC 内部一点，$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$，则△$OAC$ 的面积与△OAB 的面积之比是（　）



A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. 2　　D. $\frac{1}{3}$

第 2 讲：向量的坐标及其表示

[知识概要]

1.平面向量坐标的概念

若分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i},\vec{j}$ 作为基底，则 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，我们把有序实数对 (x,y) 称为向量 $\vec{a}$ 的坐标，记作 $\vec{a}=(x,y)$.

一般地，对于向量 $\vec{a}$，当它的起点移至原点 O 时，其终点的坐标为 (x,y) 称为向量 $\vec{a}$ 的坐标，记作 $\vec{a}=(x,y)$.

2.一个向量的坐标等于该向量终点的坐标减去起点的坐标，即 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

3.平面向量的坐标运算，已知向量 $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$ 和实数 λ，那么 $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$, $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.

[典型例题]

1.已知 $\vec{a}=(3,2)$，$\vec{b}=(0,-1)$，则 $-2\vec{a}+4\vec{b}$ 等于(　　)

A．$(-6,-8)$　　B．$(-3,-6)$　　C．$(6,8)$　　D．$(6,-8)$

2.已知平面向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(m,n)$,且 2 $\vec{a}=\vec{b}$，则 $2\vec{a}-3\vec{b}$ 等于(　　)

A．$(-2,-4)$　　B．$(-3,-6)$　　C．$(-5,-10)$　　D．$(-4,-8)$

3.已知 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-1,2)$，若 $k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}-k\vec{b}$ 平行，则 k 等于(　　)

A. 1　　B. -1　　C.1 或-1　　D.2

4.已知 a＝(1,2)，b＝(x,1)，若(a＋2b)∥(2a－b)，则 x 的值是(　　)

A．2 ；　B．1；　C.$\frac{1}{2}$；　D．$-\frac{1}{2}$.

5.已知 $\vec{a}$=(5，－2)，$\vec{b}$=(－4，－3)，$\vec{c}$=(x，y)，且 $2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{c}$ 等于(　　)

A.$\left(-2，\frac{7}{3}\right)$；　B.$\left(2，\frac{7}{3}\right)$；　C.$\left(2，-\frac{7}{3}\right)$；　D.$\left(-2，-\frac{7}{3}\right)$.

6.已知 a＞0，若平面内三点 A(1，－a)，B(2，a^2)，C(3，a^3)共线，则 a＝(　　)

A．0；B．$1-\sqrt{2}$；C．$1+\sqrt{2}$；D.$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

7.若$\vec{a},\vec{b}$是不共线的两个向量，且$\overrightarrow{AB}=\lambda_1a+b$，$\overrightarrow{AC}=a+\lambda_2b$,($\lambda_1$，$\lambda_2\in R$)，则A、B、C三点共线的条件为____________.

8.设$\vec{a}=(\frac{3}{2}$，$\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\alpha$，$\frac{1}{3})$，且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则锐角α为____________.

9.在平行四边形ABCD中，$\overrightarrow{AD}=(-6，-7)$，$\overrightarrow{AB}=(2，-3)$，若平行四边形ABCD的对称中心为E，则$\overrightarrow{CE}$=____________.

10.已知$\vec{a}=(5,2)$，$\vec{a}=(-7,-2)$，则$4\vec{a}+3\vec{b}$的坐标为____________.

11.已知：点A（2，3）、B（5，4）、C（7，10），若$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$($\lambda\in$R)，则λ=_____时，点P在一、三象限角平分线上.

12.已知$\vec{a}=(2,-4)$，$\vec{b}=(-1,3)$，$\vec{c}=(6,5)$，$\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$，则以$\vec{a},\vec{b}$为基底,$\vec{p}$=____________.

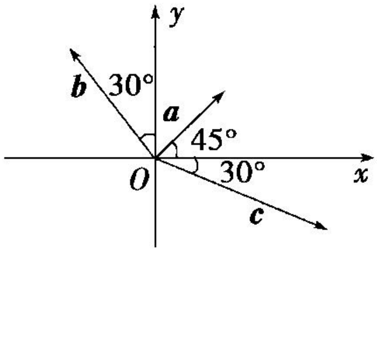
13.若向量$\vec{a}=\left(x+3,x^2-3x-4\right)$与$\overrightarrow{AB}$相等，其中A(1，2)，B(3，2)，则$x=$_______.

14. 已知$\vec{a}=\left(3x+4y,-2x-y\right)$，$\vec{b}=\left(2x-3y+1,-3x+\frac{16}{9}y+3\right)$，若$2\vec{a}=3\vec{b}$，试求$x$与$y$的值.

15.已知点M(1,0)，N(0,1)，P(2,1)，Q(1，y)，且$\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{PQ}$，求y的值，并求出向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标.

16.已知A、B、C三点的坐标分别为(－1,0),(3,-1),(1,2)，并且$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，求证：$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$.

17.在直角坐标系xOy中，向量a，b，c的方向如图所示，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，分别计算出它们的坐标.



【课后作业】

1、已知向量$a=(1,0),b=(0,1),c=ka+b(k\in R),d=a-b$，如果$c//d$那么（　）

A. $k=1$且c与d同向　　　　B. $k=1$且c与d反向

C. $k=-1$且c与d同向　　　　D. $k=-1$且c与d反向

2、已知向量$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(2,x)$若$\vec{a}+\vec{b}$与$4\vec{b}-2\vec{a}$平行，则实数x的值是（　　）

A. -2　　　　B. 0　　　　C. 1　　　　D. 2

3、若向量$\vec{a}$=（1，1），$\vec{b}$=（-1,1），$\vec{c}$=（4，2），则$\vec{c}$=（　　）

A. $3\vec{a}+\vec{b}$　　　　B. $3\vec{a}-\vec{b}$　　　　C. $-\vec{a}+3\vec{b}$　　　　D. $\vec{a}+3\vec{b}$

4、已知$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-3,2)$，当$k\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-3\vec{b}$平行，k为何值（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　　　B. $-\frac{1}{4}$　　　　C. $-\frac{1}{3}$　　　　D. $\frac{1}{3}$

5、已知向量$\vec{a}=(1-\sin\theta,1)$，$\vec{b}=(\frac{1}{2},1+\sin\theta)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则锐角$\theta$等于（　）

A. $30°$　　　　B. $45°$　　　　C. $60°$　　　　D. $75°$

6、设向量$\overline{AB}=(2,3)$，且点A的坐标为$(1,2)$，则点B的坐标为_______.

7、若$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-3,4)$则$3\vec{a}+4\vec{b}$的坐标为_________.

8、设平面向量$\vec{a}=(3,5),\vec{b}=(-2,1)$，则$\vec{a}-2\vec{b}=$_________.

9、已知向量$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,3)$，$\vec{c}=(k,7)$，若$(\vec{a}-\vec{c})//\vec{b}$，则$k$=_________.

10、若平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}+\vec{b}$平行于$x$轴，$\vec{b}=(2,-1)$，则$\vec{a}$=________.

11、已知向量$\vec{a}=(1,\sin\theta)$，$\vec{b}=(1,\sqrt{3}\cos\theta)$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最大值为____________.

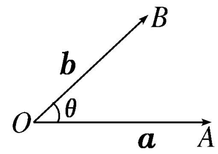
12、已知$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(2,1)$，

①求$\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|$；

②当k为何实数时，$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$平行，平行时它们是同向还是反向？

13、已知A（—2,4）、B（3,—1）、C（—3,—4）且$\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$，求点M、N的坐标及向量$\overrightarrow{MN}$的坐标.

第 3 讲：向量的数量积



[知识概要]

1.两个向量的夹角

已知两个非零向量 a 和 b(如图)，作$\overrightarrow{OA}$＝a，$\overrightarrow{OB}$＝b，则∠AOB＝θ(0°≤θ≤180°)叫做向量 a 与 b 的夹角，当θ＝0°时，a 与 b 同向；当θ＝180°时，a 与 b 反向；如果 a 与 b 的夹角是 90°，我们说 a 与 b 垂直，记作 a⊥b.

2.两个向量的数量积的定义

已知两个非零向量 a 与 b，它们的夹角为θ，则数量|a||b|cos θ叫做 a 与 b 的数量积(或内积)，记作 a·b，即 a·b＝|a||b|cos θ，规定零向量与任一向量的数量积为 0，即 0·a＝0.

3.向量数量积的几何意义

数量积 a·b 等于 a 的长度|a|与 b 在 a 的方向上的投影|b|cos θ的数量积.

4.向量数量积的性质，设 a、b 都是非零向量，e 是单位向量，θ为 a 与 b(或 e)的夹角．则

(1)e·a＝a·e＝|a|cos θ；(2)a⊥b⇔a·b＝0；

(3)当 a 与 b 同向时,a·b＝|a|·|b|；当 a 与 b 反向时,a·b＝－|a||b|，并且 a·a＝$|a|^2$，或|a|＝$\sqrt{a\cdot a}$；

(4)cos θ＝$\frac{a\cdot b}{|a||b|}$；(5)|a·b|≤|a||b|.

5.向量数量积的运算律

(1)a·b＝b·a；(2)λa·b＝λ(a·b)＝a·(λb)；(3)(a＋b)·c＝a·c＋b·c.

6.平面向量数量积的坐标运算，设向量 a＝(x_1，y_1)，b＝(x_2，y_2)，向量 a 与 b 的夹角为θ

(1)a·b＝$x_1x_2+y_1y_2$；(2)|a|＝$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$；

(3)cos<a,b>＝$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$；(4)a⊥b⇔a·b＝0⇔$x_1x_2+y_1y_2=0$；

7.若 A(x_1,y_1),B(x_2，y_2)，则$|\overrightarrow{AB}|$＝$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$(平面内两点间的距离公式).

[典型例题]

1.已知|a|＝3，|b|＝2，若 a·b＝－3，则 a 与 b 的夹角为(　　).

A.$\frac{\pi}{3}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{3\pi}{4}$.

2.若 a，b，c 为任意向量，m∈R，则下列等式不一定成立的是(　　).

A．(a＋b)＋c＝a＋(b＋c)　　B．(a＋b)·c＝a·c＋b·c

C．m(a＋b)＝ma＋mb　　D．(a·b)·c＝a·(b·c)

3.若向量 a，b，c 满足 a∥b，且 a⊥c，则 c·(a＋2b)＝(　　)

A．4　　B．3　　C．2　　D．0

4.已知向量 a＝(1,2)，向量 b＝(x，－2)，且 a⊥(a－b)，则实数 x 等于(　　).

A．9　　B．4　　C．0　　D．－4

5.已知点 $A(-1,1)$. $B(1,2)$. $C(-2,-1)$. $D(3,4)$,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为(　　)

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$　　C. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

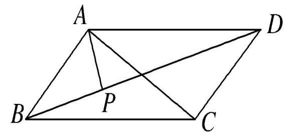
6.已知点 $A(1,3), B(4,-1)$,则与向量$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量为(　　)

A. $\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$　　B. $\left(\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$　　C. $\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$.

7.已知|a|＝|b|＝2，(a＋2b)·(a－b)＝－2，则 a 与 b 的夹角为________.

8.已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $120°$,且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=2$,若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$,则实数 λ 的值为__________.

9.如图，在平行四边形 ABCD 中，AP⊥BD，垂足为 P，且 AP＝3，则 $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AC}=$________.



10.已知向量 $\vec{m}=(\lambda+1,1), \vec{n}=(\lambda+2,2)$,若 $(\vec{m}+\vec{n})\perp(\vec{m}-\vec{n})$,则 $\lambda=$____________.

11.已知平面内 A，B，C 三点在同一条直线上，$\overrightarrow{OA}$＝(－2，m)，$\overrightarrow{OB}$＝(n,1)，$\overrightarrow{OC}$＝(5，－1)，且$\overrightarrow{OA}$⊥$\overrightarrow{OB}$，则 $mn=$____________.

12.设 e_1, e_2 为单位向量，且 e_1, e_2 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，若 $\vec{a}=e_1+3e_2, \vec{b}=2e_1$，则向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的射影为____________.

13.已知|a|＝4，|b|＝3，(2a－3b)·(2a＋b)＝61，

(1)求 a 与 b 的夹角θ；(2)求|a＋b|和|a－b|.

14.已知向量 $a=(\sin x,1)$,$b=\left(\cos x,-\frac{1}{2}\right)$.

(1)当 $a\perp b$ 时，求$|a+b|$的值；(2)求函数 $f(x)=a\cdot(b-a)$的值域.

15.已知 $f(x)=a\cdot b$，其中 $a=(2\cos x,-\sqrt{3}\sin 2x)$，$b=(\cos x,1)(x\in R)$.

(1)求 $f(x)$的周期和单调递减区间；

(2)在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,$f(A)=-1$,$a=\sqrt{7}$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$,求边长 b 和 c 的值(b>c).

【随堂练习】

1、若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为任意向量，m∈R，则下列等式不一定成立的是（　　）

A. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　　　B. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot c+\vec{b}\cdot\vec{c}$

C. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$　　　D. $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

2、设向量$\vec{a}$＝（1，cosθ）与$\vec{b}$＝（－1，　2cosθ）垂直，则cos2θ等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. －1

3、设x∈R，向量$\vec{a}$＝（x，1），$\vec{b}$＝（1，－2），且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|$等于（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 10

4、如果$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot c$，且$\vec{a}\neq 0$，那么（　　）

A. $\vec{b}=\vec{c}$　　B. $\vec{b}=\lambda\vec{c}$　　C. $\vec{b}\perp\vec{c}$　　D. $\vec{b}$，$\vec{c}$在$\vec{a}$方向上的投影相等

5、已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=2$，则向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

6、已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为120°，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

7、等边△ABC的边长为2，平面内一点M满足$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$等于（　　）

A. $\frac{13}{9}$　　B. $-\frac{13}{9}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. $-\frac{8}{9}$

8、已知$\vec{a}=(-3,2)$，$\vec{b}=(-1,0)$，向量$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-2\vec{b}$垂直，则实数λ的值___

9、已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-6$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为____

10、已知$\vec{a}$与$\vec{b}$为两个不共线的单位向量，k为实数，若向量$\vec{a}+\vec{b}$与向量$k\vec{a}-\vec{b}$垂直，则k＝__

11、已知向量$\vec{a}=(\sin\theta,1)$，$\vec{b}=(1,-\cos\theta)$，θ∈(0，π)．且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则θ＝____.

12. 已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为45°，且$|\vec{a}|=4$，$\left(\frac{1}{2}a+b\right)\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=12$，则$|\vec{b}|=$____；$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影等于______。

13、给定两个长度为1的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为120^o.如图所示，点C在以O为圆心的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上变动.若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x,y\in R$，则$x+y$的最大值是________.

第 4 讲：平面向量基本分解定理

[知识概要]

1.平面向量基本定理：如果 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\vec{a}$，有且只有一对实数 λ_1, λ_2，使 $\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$.

(1)我们把不共线向量 e_1、e_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底；

(2)基底不唯一，关键是不共线；

(3)由定理可将任一向量 a 在给出基底 e_1, e_2 的条件下进行分解；

(4)基底给定时，分解形式唯一，λ_1, λ_2 是被 $\vec{a}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 唯一确定的数量.

[典型例题]

1.设 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 是同一平面内的两个向量，则有(　)

A. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 一定平行；B. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 的模相等；

C.同一平面内的任一向量 a 都有 $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\mu\overrightarrow{e_2}, \lambda, \mu \in R$；

D.若 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 不共线，则同一平面内的任一向量 $\vec{a}$ 都有 $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\mu\overrightarrow{e_2}, \lambda, \mu \in R$.

2.已知向量 $a=e_1-2e_2, b=2e_1+e_2$，其中 e_1, e_2 不共线，则 a+b 与 $c=6e_1-2e_2$ 的关系(　　)

A.不共线　　B.共线　　C.相等　　D.无法确定

3.已知向量 e_1、e_2 不共线，实数 x、y 满足 $(3x-4y)e_1+(2x-3y)e_2=6e_1+3e_2$，则 x-y 的值等于(　)

A.3　　B.-3　　C.0　　D.2

4.在平行四边形 ABCD 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 交于点 F. 若 $\overrightarrow{AC}=a$，$\overrightarrow{BD}=b$，则 $\overrightarrow{AF}=$(　　)

A.$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b$　　B.$\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$；　C.$\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b$　　D.$\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$

5.在四边形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB}=a+2b$，$\overrightarrow{BC}=-4a-b$，$\overrightarrow{CD}=-5a-3b$，其中 a、b 不共线，则四边形 ABCD 是(　　)

A．梯形　　B．矩形　　C．菱形　　D．正方形

6.设 D、E、F 分别是△ABC 的三边 BC、CA、AB 上的点，且$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$与$\overrightarrow{BC}$(　　)A．反向平行；B．同向平行；C．互相垂直；D．既不平行也不垂直.

7.已知$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，e_1、e_2是一组基底，且 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$，则 a 与 e_1_____，a 与 e_2_________(填共线或不共线).

8.在▱ABCD 中，$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，$\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{MC}$，P 为 AD 的中点，则$\overrightarrow{MP}=$____________.

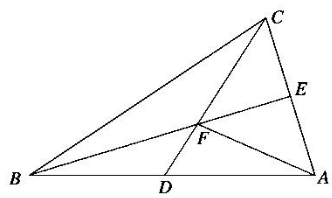
9.已知△ABC 中，点 D 在 BC 边上，且$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，则 r＋s 的值是____________.

10.设非零向量 a、b、c 满足|a|＝|b|＝|c|，a＋b＝c，则<a，b>=____________.

11.设 a、b 是不共线的两个非零向量，已知$\overrightarrow{AB}=2a+pb$，$\overrightarrow{BC}=a+b$，$\overrightarrow{CD}=a-2b$.若 A、B、D 三点共线，则 p 的值为____________.

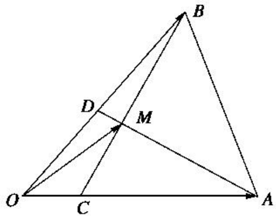
12.△ABC 中，点 D 在边 AB 上，CD 平分∠ACB，若$\overrightarrow{CB}=a$，$\overrightarrow{CA}=b$，|a|＝1，|b|＝2，则$\overrightarrow{CD}=$__________.

13.如图，△ABC 中，AD＝DB，AE＝EC，CD 与 BE 交于 F，设$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$，$\overrightarrow{AF}=xa+yb$，求 x, y 的值.



14.在▱ABCD 中，设边 AB、BC、CD 的中点分别为 E、F、G，设 DF 与 AG、EG 的交点分别为 H、K，设$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{BC}=b$，试用 a、b 表示$\overrightarrow{GK}$、$\overrightarrow{AH}$.

15.在△OAB 中，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，AD 与 BC 交于点 M，设$\overrightarrow{OA}$＝a，$\overrightarrow{OB}$＝b，以 a、b 为基底表示$\overrightarrow{OM}$.



【课后作业】

一、选择题：

1. 已知点 $A(0,1),B(3,2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$（ ）

A. $(-7,-4)$　　B. $(7,4)$　　C. $(-1,4)$　　D. $(1,4)$

2. 若 $\overrightarrow{MA}=\left(-1,3\right)$， $\overrightarrow{MB}=\left(1,7\right)$，则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$ （　　）

A. $\left(0,5\right)$　　B. $\left(1,2\right)$　　C. $\left(0,10\right)$　　D. $\left(2,4\right)$

3. 已知向量 $\vec{a}=\left(2,4\right)$，$\vec{b}=\left(-1,1\right)$，则 $2\vec{a}-\vec{b}=$（　　）

A. $\left(5,7\right)$　　B. $\left(5,9\right)$　　C. $\left(3,7\right)$　　D. $\left(3,9\right)$

4. 已知直角坐标系中点$A(0,1)$，向量$\overrightarrow{AB}=(-4,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(-7,-4)$，则点$C$的坐标为（　　）

A. $(11,8)$　　B. $(3,2)$　　C. $(-11,-6)$　　D. $(-3,0)$

5. 在 ΔABC 中，D 为 AB 边上一点，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $2\sqrt{3}-1$　　D. 2

6. 已知平面向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{a}=(-2,k)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则 $|3\vec{a}+\vec{b}|=$（　　　）

A. 3　　B. 4　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

7. 已知向量 $\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(-1,2)$，且 $\vec{a}+\vec{b}=(1,3)$，则 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 等于（　　）

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 5

8. 点G为ΔABC的重心（三边中线的交点）．设$\overrightarrow{GB}=\vec{a},\overrightarrow{GC}=\vec{b}$，则$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$等于　（　　）

A. $\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　B. $\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　C. $2\vec{a}-\vec{b}$　　D. $2\vec{a}+\vec{b}$

9. 已知向量$\vec{a}=\left(2,3\right),\vec{b}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则$\tan\theta=$（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

10. 向量$\vec{a}=\left(\dfrac{1}{3},\tan\alpha\right),\vec{b}=\left(\cos\alpha,1\right)$, 且$\vec{a}//\vec{b}$，则$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

11. 在平行四边形$ABCD$中，AC与BD交于点O，E是线段OD的中点，AE的延长线与CD交于点F．若$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AF}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　C. $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　D. $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$

12. ΔABC中，点E为AB边的中点，点F为AC边的中点，BF交CE于点G，若$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$，则$x+y$等于（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. 1　　D. $\dfrac{2}{3}$

第 5 讲：向量的应用

[典型例题]

1.已知两个非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则下面结论正确的是(　　)

A. $\vec{a}//\vec{b}$；B. $\vec{a}\perp\vec{b}$；C.$|\vec{a}|=|\vec{b}|$；D.$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$.

2.若非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，且$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$；B.$\frac{\pi}{3}$；C. $\frac{2\pi}{3}$；D.$\frac{5\pi}{6}$.

3.在$Rt\triangle ABC$中，$C=90^\circ,AC=4$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$等于(　　)

A. -16；B. -8；C. 8；D. 16.

4.在$\triangle ABC$中，M 是 BC 的中点，$AM=3,BC=10$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$___________.

5.已知向量$\vec{a},\vec{b}$夹角为$\frac{\pi}{4}$，且$|\vec{a}|=1,|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$，则$|\vec{b}|=$___________.

6.若向量$\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(2,5),\vec{c}=(3,x)$，满足条件$(8\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=30$，则实数 x=___________.

7.已知$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是夹角为$\frac{2\pi}{3}$的两个单位向量，有$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2},\vec{b}=k\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数 k 的值为.

8.已知两个单位向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，若向量$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2},\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$___________.

9.在$\triangle ABC$中，M 是 BC 的中点，$|\overrightarrow{AM}|=1,\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=$___________.

10.已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，则$|2\vec{a}-\vec{b}|=$______________.

11.若平面向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|\le1$，且以向量$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积为$\frac{1}{2}$，则$\vec{a},\vec{b}$的夹角$\theta$的取值范围是___________.

12.已知$|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=3,(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=61$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$___________.

13.已知$\vec{a},\vec{b}$是两个非零向量，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为___________.

14.已知$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta),0<\alpha<\beta<\pi$,

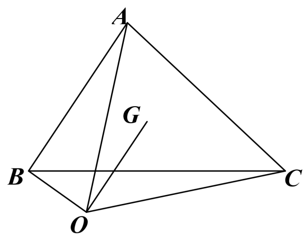
(1)求证：$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$互相垂直；(2)若$k\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-k\vec{b}$的模相等，求$\beta-\alpha$.

15.已知平面向量$\vec{a}=(\sqrt{3},-1),\vec{b}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

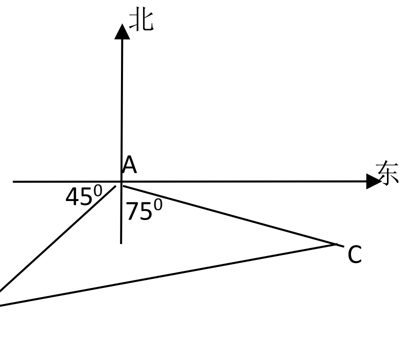
(1)证明：$\vec{a}\perp\vec{b}$；

(2)若存在不同时为零的实数 k 和 t，使$\vec{c}=\vec{a}+(t^2-3)\vec{b},\vec{d}=-k\vec{a}+t\vec{b}$，且$\vec{c}\perp\vec{d}$，试求函数关系式$k=f(t)$.

16．如图， O 是△ABC 外任一点，若$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，求证：G 是△ABC 重心（即三条边上中线的交点）.



17．一只渔船在航行中遇险，发出求救警报，在遇险地西南方向 10mile 处有一只货船收到警报立即侦察，发现遇险渔船沿南偏东 75⁰，以 9mile/h 的速度向前航行，货船以 21mile/h 的速度前往营救，并在最短时间内与渔船靠近，求货的位移。



【随堂练习】

1．已知 A、B、C 为三个不共线的点，P 为△ABC 所在平面内一点，若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{AB}$，则点 P 与△ABC 的位置关系是 （ ）

A、点 P 在△ABC 内部　　　B、点 P 在△ABC 外部

C、点 P 在直线 AB 上　　　D、点 P 在 AC 边上

2．已知三点 A（1，2），B（4，1），C（0，-1）则△ABC 的形状为 （ ）

A、正三角形　B、钝角三角形　C、等腰直角三角形　D、等腰锐角三角形

3．当两人提起重量为|G|的旅行包时，夹角为θ，两人用力都为|F|，若|F|=|G|，则θ的值为（ ）

A、30^0　B、60^0　C、90^0　D、120^0

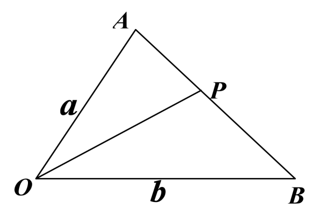
4．某人顺风匀速行走速度大小为 a，方向与风速相同，此时风速大小为 v，则此人实际感到的风速为 （ ）

A、v-a　B、a-v　C、v+a　D、v

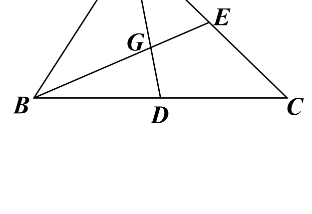
5．一艘船以 5km/h 的速度向垂直于对岸方向行驶，船的实际航行方向与水流方向成 30^0 角，则水流速度为______km/h。

6．两个粒子 a，b 从同一粒子源发射出来，在某一时刻，以粒子源为原点，它们的位移分别为 S_a=（3，-4），S_b=（4，3），（1）此时粒子 b 相对于粒子 a 的位移________；（2）求 S 在 S_a 方向上的投影______。

7．如图，点 P 是线段 AB 上的一点，且 AP∶PB=m ∶ n，点 O 是直线 AB 外一点，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $m,n,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的运算式表示向量 $\overrightarrow{OP}$.



8．如图，△ABC 中，D，E 分别是 BC，AC 的中点，设 AD 与 BE 相交于 G，求证：AG∶GD=BG∶GE=2∶1.



第 6 讲：平面向量的综合提升与复习

1.已知$|a|=1$，$|b|=\sqrt{2}$，若$(a-b)\perp a$，则向量 a 与 b 的夹角为________.

2.已知 A，B，C 是锐角△ABC 的三个内角，向量 $p=(-\sin A,1)$，$q=(1,\cos B)$，则 p 与 q 的夹角是________(填锐角，钝角或直角).

3.已知向量 a，b 满足$|a|=1$，$|b|=2$，a 与 b 的夹角为 60°，则$|a-b|=$________.

4.设 E、F 分别是 Rt△ABC 的斜边 BC 上的两个三等分点，已知 AB＝3，AC＝6，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$________

5.在△ABC 中，已知 BC＝2，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，则△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 最大值是________.

6.已知 O 是△ABC 的内部一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，且∠BAC＝60°，则△OBC 的面积为__________.

7.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A(－1，－2)，B(2,3)，C(－2，－1).

(1)求以线段 AB，AC 为邻边的平行四边形两条对角线的长；

(2)设实数 t 满足$(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OC}=0$，求 t 的值.

8.已知平面向量 $a=(\sqrt{3},-1)$，$b=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)若存在实数 k 和 t，满足 $x=(t+2)a+(t^2-t-5)b$，$y=-ka+4b$，且 $x\perp y$，求出 k 关于 t 的关系式 $k=f(t)$；

(2)根据(1)的结论，试求出函数 $k=f(t)$在 $t\in(-2,2)$上的最小值.

9.若等边三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$，平面内一点 M 满足$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$________.

10.已知向量 p 的模为$\sqrt{2}$，向量 q 的模为 1，p 与 q 的夹角为$\frac{\pi}{4}$，且 $a=3p+2q$，$b=p-q$，则以 a，b 为邻边的平行四边形的长度较小的对角线长为__________.

11、下列命题正确的是 （　　）

A、单位向量都相等

B、若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是共线向量，$\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 是共线向量，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 是共线向量

C、$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$

D、若 $\overrightarrow{a_0}$ 与 $\overrightarrow{b_0}$ 是单位向量，则 $\overrightarrow{a_0}\bullet\overrightarrow{b_0}=1$

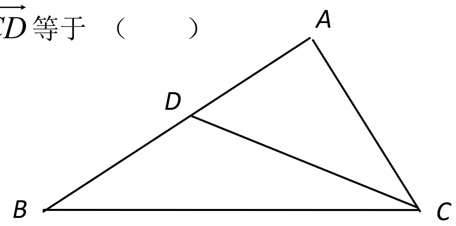
12、下列命题中正确的是 （　　）

A、$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$　　B、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$　　C、$\vec{0}\bullet\overrightarrow{AB}=\vec{0}$　　D、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

13、若向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(1,-1)$，$\vec{c}=(-1,2)$，则 $\vec{c}$ 等于 （　　）

A、$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　　B、$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$　　C、$\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$　　D、$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

14、如图所示，D 是 ΔABC 的边 AB 上的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}$ 等于 （　　）



A、$-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　B、$-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C、$\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　D、$\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

15、已知向量 $\vec{a}=(-5,6)$，$\vec{b}=(6,5)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ （　　）

A、垂直　　B、不垂直也不平行　　C、平行且同向　　D、平行且反向

16、若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为任意向量，$m\in R$，则下列等式不一定成立的是 （　　）

A、$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　　B、$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

C、$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$　　D、$(\vec{a}\bullet\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\bullet\vec{c})$

17、已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}=(-3,6)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-3,2)$，则 $\vec{a}^2-\vec{b}^2$ 等于 （　　）

A、-3　　B、-24　　C、21　　D、12

18、若三点 $A(2,3)$，$B(3,a)$，$C(4,b)$ 共线，则有 （　　）

A、$a=3,b=-5$　　B、$a-b+1=0$　　C、$2a-b=3$　　D、$a-2b=0$

19、在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=0$，则四边形 $ABCD$ 是 （　　）

A、矩形　　B、菱形　　C、直角梯形　　D、等腰梯形

20、若 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，且 $\vec{c}\perp\vec{a}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 （　　）

A、30°　　B、60°　　C、120°　　D、150°

21、点P在平面上做匀速直线运动，速度向量$\vec{v}=(4,-3)$（运动方向与$\vec{v}$相同，且每秒移动的距离为$|\vec{v}|$个单位），设开始时点P的坐标为$(-10,10)$，则5秒后点P的坐标为（　　）

A、$(-2,4)$　　B、$(-30,25)$　　C、$(10,-5)$　　D、$(5,-10)$

22、已知$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0$，点$C$在$\angle AOB$内，且$\angle AOC=30^\circ$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in R)$，则$\dfrac{m}{n}$等于（　　）

A、$\dfrac{1}{3}$　　B、3　　C、$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D、$\sqrt{3}$

23、已知平行四边形$ABCD$中，$A(-4,2)$，$B(-2,6)$,$C(5,8)$，则D的坐标是_________。

24、在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$，$M$为$BC$的中点，则$\overrightarrow{MN}=$______________（用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示）。

25、在ΔABC中，$AB=2$，$AC=3$，D为边BC的中点，则$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}=$__________。

26、若向量$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$__________。

27、已知平面上三点A、B、C满足$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{CA}|=5$，则$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AB}$的值等于__________。

28、$Rt\Delta ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$|AB|=\sqrt{5}$，则$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AB}=$______。

29、若$\vec{a}(2,3)$，$\vec{b}=(-4,7)$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为__________。

30、已知$\vec{a}=(\sqrt{3},1)$，$\vec{b}$是不平行于x轴的单位向量，且$\vec{a}\bullet\vec{b}=\sqrt{3}$，则$\vec{b}=$_________。

31、已知$\vec{a}=(-2,2)$，$\vec{b}=(5,k)$，若$|\vec{a}+\vec{b}|\le 5$，则k的取值范围是_______________。

32、已知$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,1)$，若单位向量$\vec{c}=(x,y)$与$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角相等，求$\vec{c}$

33、已知平面向量$\vec{a}=(1,x)$，$\vec{b}=(2x+3,-x)$，$x\in R$；

（1）若$\vec{a}\perp\vec{b}$，求x的值；　　（1）若$\vec{a}//\vec{b}$，求$|\vec{a}-\vec{b}|$。

34、已知$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$，$\left|\vec{b}\right|=2$，

（1）若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为150°，求$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$；

（2）若$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角大小。

35、已知$\vec{a}=(2\cos x,1)$，$\vec{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$，$x\in R$，$f(x)=\vec{a}\bullet\vec{b}$；

（1）求函数$f(x)$的取值范围；

（2）若函数$y=2\sin 2x$图像按向量$\vec{c}=(m,n)$ $(\left|m\right|<\dfrac{\pi}{2})$平移后得到$y=f(x)$的图像，求实数$m$、$n$的值。

35、已知向量$\vec{a}=(\cos x+2\sin x,\sin x)$，$\vec{b}=(\cos x-\sin x,2\cos x)$，函数$f(x)=\vec{a}\bullet\vec{b}$；

（1）求函数$f(x)$的单调递增区间；

（2）求函数$f(x)$的最大值及取得最大值时x的集合。

第 7 讲：阶段测试复习(平面向量)

1. 已知向量 $\vec{a}=(-3,1)$ 与 $\vec{b}=(-1,-3)$，则 $\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|$ =________；$3\vec{a}-\vec{b}$ 的坐标为__________.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(3,2)$.若向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线,则实数 $k=$________.

3. 已知平面向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-1,3)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为__________.

4. 若 P（-1,1），A（2，-4），B（x，-9）三点共线，则 x=______________.

5.已知向量a与b的夹角为 60º,且|a|=1,|b|=2,那么 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值为________.

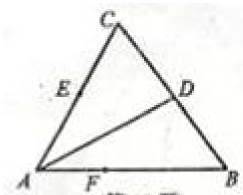
6. 若 $\left|\vec{AB}\right|=\left|\vec{AC}\right|=6$，$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=18$，，则△ABC的形状是____________..

7. 已知向量 $\vec{a}$ 的模为 2,向量 $\vec{e}$ 为单位向量,$\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的夹角大小为_____.

8. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是非零向量且满足 $(\vec{a}-2\vec{b})\perp\vec{a}$，$(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是________.

9. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，若点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为 ___

10. 若等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB//CD$，$AB=3$，$BC=\sqrt{2}$，$\angle ABC=45^{\circ}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值为_________.



(第 10 题)

11. 已知向量 $\vec{a}=(x,2),\vec{b}=(-3,-5)$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的范围是_______.

12. 已知非零向量a,b满足|a|=|a+b|=1,a与b夹角为 120°,则向量b的模为________.

13. 在 ΔABC 中, M 为 AB 的的三等分点, $AM:AB=1:3$, N 为 AC 的中点, BN 与 CM 交于点 E，$\overrightarrow{AB}=\vec{m}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{n}$，则 $\overrightarrow{AE}=$______________________.(用 $\vec{m},\vec{n}$ 表示)

14. 向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-2,3)$，若 $m\vec{a}-n\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 共线(其中 $m,n\in R$，且 $n\neq 0$）则 $\frac{m}{n}$ 等于

________.

15. 在 ΔABC 中, $BC=6$，BC 边上的高为 2，则 $\vec{AB}\bullet\vec{AC}$ 的最小值为________.

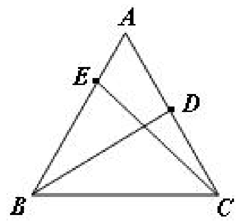
16. 在平面直角坐标系xOy中,已知 $\vec{OA}=(3,-1)$，$\vec{OB}=(0,2)$ 若 $\vec{OC}\bullet\vec{OB}=0$，$\vec{AC}=\lambda\vec{OB}$，则实数λ的值为__________.

17. 点 G 是△ABC 的重心，$\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{BC}=\vec{b}$，则 $\vec{BG}$ =_________________.

18. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ =0，则四边形 $ABCD$ 的形状是____________.

19. 已知在 ΔABC 中, $AB=BC=3$，$AC=4$，设 O 是 ΔABC 的内心,若 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则 $m:n=$______.

20. 如图，在等腰三角形 ABC 中，底边 $BC=2$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$，



若 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=$_____.

21. 已知非零向量 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 不共线，设 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{m+1}\overrightarrow{OP}+\frac{m}{m+1}\overrightarrow{OQ}$，定义点集

$A=\{F\mid\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FM}}{|\overrightarrow{FP}|}=\frac{\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{FM}}{|\overrightarrow{FQ}|}\}$. 若对于任意的 $m\geq 3$，当 F_1，$F_2\in A$ 且不在直线 PQ 上时，

不等式 $|\overrightarrow{F_1F_2}|\leq k|\overrightarrow{PQ}|$ 恒成立，则实数 k 的最小值为________________.

22. 已知 ΔABC 是边长为 4 的正三角形,D、P是 ΔABC 内部两点,且满足

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BC}$,则 ΔAPD 的面积为________.

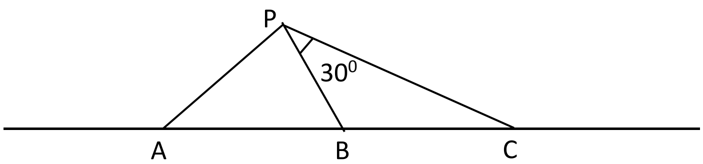
23. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为锐角，且满足 $|\vec{a}|=\frac{8}{\sqrt{15}}$ 、$|\vec{b}|=\frac{4}{\sqrt{15}}$，

若对任意的 $(x,y)\in\left\{(x,y)\middle\| x\vec{a}+y\vec{b}|=1,xy>0\right\}$，都有 $|x+y|\leq 1$ 成立，

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值为______________.

24. 如图, A,B,C 是直线上三点, P 是直线外一点, $AB=BC=1,\angle APB=90°,\angle BPC=30°$，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$________.



25. 已知O为ΔABC的外心, $AB=2a,AC=\frac{2}{a},\angle BAC=120^0$, 若 $\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，

则 $\alpha+\beta$ 的最小值为__________.

第 8 讲：矩阵的概念及矩阵的运算

[知识概要]

1.矩阵的定义

(1)有 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,3,\cdots,m;\ j=1,2,3,\cdots,n)$ 按一定的次序排成矩形表：

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$叫一个 m 行 n 列的矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，读作 m 乘 n 矩阵.

(2)横的各排叫做矩阵的行，纵的各排叫做矩阵的列，数 a_{ij} 叫做矩阵的元素.

(3)通常用大写字母，例如 A 表示矩阵，也可记作 $(a_{ij})_{m\times n}$，说明 A 是一个以 a_{ij} 为元素的 m 行 n 列矩阵.

2.矩阵的相关概念

(1)同阶矩阵：如果两个矩阵 A、B，它们的行数和列数分别相同，那么矩阵 A 与 B 叫做同阶矩阵.

(2)相等矩阵：当矩阵 A 与 B 是同阶矩阵时，如果矩阵 A 中的每一个元素与 B 中相同位置的元素都相等，那么 A 与 B 叫做相等的矩阵，记作 $A=B$.

(3)n 阶方阵：一个矩阵的行数与列数均为 n，例如 3 阶方阵 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$..

(4)行矩阵：一个矩阵的行数为 1，例如 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(5)列矩阵：一个矩阵的列数为 1，例如 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(6)零矩阵：一个矩阵中所有的元素都为零，例如 $0_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(7)单位矩阵：主对角线上的元素都为 1，其余元素都为 0 的 n 阶方阵，记作 I，例如 $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.矩阵的加法、减法及性质

(1)若 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则 $C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 A 和 B 的和，记作 $C=A+B$，

即 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$，

则 $C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

(2)矩阵的加法的运算规律

①交换律：$A+B=B+A$.

②结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$

(3)负矩阵：对矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵，有 $A+(-A)=0_{m\times n}$.

(4)矩阵的差：把 $A+(-B)$ 记为 $A-B$，叫做两矩阵 A 和 B 的差，求矩阵差的运算叫做矩阵的减法.

*(5)注意，矩阵的加法和矩阵的减法只有在两矩阵的行数、列数都相同时才可以进行，并且两个矩阵相加(减)归结为其对应元素相加(减).

4.数乘矩阵及其性质

(1)以实数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的每个元素所得的矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 叫做数 k 与矩阵 A 相乘的积，记作 kA，

即 $kA=k(a_{ij})_{m\times n}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$，叫做实数与矩阵的乘法.

(2)实数和矩阵的乘法的运算规律

①$(k+l)A=kA+lA,k,l\in R,A\in M$.

②$k(A+B)=kA+kB,k\in R,A,B\in M$.

③$k(lA)=(kl)A,k,l\in R,A\in M$.

5. 矩阵有关概念

（1）已知方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，则它的系数矩阵为___________；增广矩阵为_________.

（2）利用矩阵解方程用到的三种矩阵变换分别为：__________；____________；__________.

[典型例题]

1. 若线性方程组的增广矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则该线性方程组的解是_________.

2. 关于 x、y 的线性方程组$\begin{cases} mx+y=-1 \\ 3mx-my=2m+3 \end{cases}$，则该线性方程组的增广矩阵是________.

第 9 讲：二阶行列式与三阶行列式

[知识概要]

1. 二阶行列式：定义$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$，把$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$叫做二阶行列式，其中横排叫做行，纵排叫做列，四个数a,b,c,d叫做这个二阶行列式的元素，算式$ad-bc$叫做这个二阶行列式的展开式，其计算结果叫做行列式的值，在$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$中，实线表示的对角线称之为主对角线，虚线表示的对角线称之为副对角线，亦即二阶行列式的值等于主对角线上元素的乘积减去副对角线上的元素的乘积.

2. 二元线性方程组的行列式解法

(1) 二元线性方程组$(I)\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$当$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$时，二元线性方程组有唯一解

$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$记$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$,

当$D \neq 0$时，方程组的唯一解可以写成$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases}$

这里行列式 D 是由方程组(I)中的未知数x,y的系数组成，称为方程组(I)的系数行列式；行列式D_x和D_y分别是用方程组(I)的常数项c_1,c_2替换行列式 D 中 x 的系数a_1,a_2或 y 的系数b_1,b_2后得到的.

(2) 二元线性方程组(I)的解的判断：

$D \neq 0$时，方程组有唯一解$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases}$；

$D=D_x=D_y=0$时，方程组有无穷多组解；

$D=0, D_x^2+D_y^2 \neq 0$时，方程组无解.

(3) $D \neq 0$是二元线性方程组(I)有唯一解的充要条件，把 D 叫做方程组解的判别式.

3.三阶行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$ 叫做三阶行列式，

$a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3$ 叫做三阶行列式的元素，

$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$ 叫做这个三阶行列式的展开式.

(2) 三阶行列式的对角线法则：先在行列式 D 的第 3 列右边顺次另写第 1 列和第 2 列，

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$，然后把每一条实线经过的 3 个元素的积的和，减去每一条虚线经过的 3 个元素的积的和，就得到三阶行列式 D 的展开式.

4. 三元线性方程组的行列式解法

(1) 方程组 $(I)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

若 $D\neq 0$ 时，则方程组(I)有唯一解 $\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \\ z=\dfrac{D_z}{D} \end{cases}$

(2) $D\neq 0$ 时，方程组可能无解，可能有无穷多组解.

5. 三阶行列式的常用结论

顶点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 的三角形面积公式为 $S=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$.

7.余子式和代数余子式

(1) 余子式：把三阶行列式某元素所在的行和列划去，将剩下的元素按原来的位置关系组成的二阶行列式，叫做这个元素的余子式，

例如$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$中元素$a_2$的余子式是$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(2) 代数余子式：如果三阶行列式中某元素所在的位置为第 i 行和第 j 列，那么这个元素的余子式乘以$(-1)^{i+j}$所得的式子，叫做这个元素的代数余子式，

例如三阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$中的元素$a_2$的代数余子式是$A_2=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(3) 定理 1：三阶行列式 D 等于它的任意一行(或列)的所有元素分别和它们的代数余子式的乘积的和，

例如$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2$.

(4) 定理 2：三阶行列式的某一行(或列)的元素和另一行(或列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，例如对于行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，有$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0$.

(5) 定理 3：三元齐次线性方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$有非零解的充要条件是它的系数行列式$D=0$.

[典型例题]

1. 不解方程组，判别下列二元一次方程组解的情况。

（1）$\begin{cases} 6x+9y=7 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 4(x+2)=1-5y \\ 3(y-2)=3-2x \end{cases}$　（3）$\begin{cases} \dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4}{y-2}=2 \\ \dfrac{7}{x+1}+\dfrac{3}{2-y}=1 \end{cases}$

2. 解关于 x, y 的二元一次方程组，并对解的情况进行讨论 $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ my - m = -x \end{cases}$.

3. 若行列式 $\begin{vmatrix} 2^{x-1} & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 则 $x =$ ____________.

4. 解关于 x 的不等式：$\begin{vmatrix} \lg^2 x & 2 & 4 \\ 2\lg x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \leq 0$

5. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2$，则 C_2 化简后的最后结果等于_______.

6. 当 a 为何值时，关于 x、y、z 的方程组 $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ 3x + (2a+1)y + 3z = 6 \end{cases}$ 有唯一解.

第 10 讲：数学归纳法及其应用

知识概要：

证明一个与正整数有关的命题关键步骤如下：

(I) 证明当 n 取第一个值 n_0 时结论正确；（归纳奠基）

(ii) 假设当 n＝k (k∈ N^*，k≥ n_0) 时结论正确，证明当 n＝k＋1 时结论正确.（归纳递推）

完成这两个步骤后，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确，

这种证明方法叫做数学归纳法.

典型例题：

1.用数学归纳法证明 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n\in N^*$.

2.用数学归纳法证明 $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}, n\in N^*$.

3.用数学归纳法证明：$1 + a + a^2 +\ldots+a^{n+1} = \dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}, a\neq 1$，在验证 n = 1 时，左端计算所得的项为(　　)

A．1；B． 1 + a；C． 1 + a + a^2；D． 1 + a + a^2 + a^3

4. 某个命题当 n = k (k∈N)时成立，可证得当 n = k+1 时也成立。

现在已知当 n = 5 时该命题不成立，那么可推得 (　　)

A. n = 6 时该命题不成立；　　B. n = 6 时该命题成立；

C. n = 4 时该命题不成立；　　D. n = 4 时该命题成立.

5.用数学归纳法证明等式$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$的过程中，由 n=k 到 n=k+1 左边增加的代数式为____________.

6. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,S_n=n^2a_n\quad(n\in N^*)$

（1）求出a_2,a_3,a_4；

（2）猜想出通项公式$a_n=f(n)$，并用数学归纳法加以证明。

课后练习：

1. 用数学归纳法证明等式"1+2+3+…+（n+3）=$\frac{(n+3)(n+4)}{2}$（$n\in N^*$），
   当n=1 时，左边的式子应为 ______________ .
2. 已知数列｛a_n｝的前n项和S_n=2n－a_n，则｛a_n｝的前四项依次为______________、______、________、________，猜想a_n= ______________ .
3. 用数学归纳法证明某个命题时，左式为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$（$n$为正偶数）从"$n$=2$k$到$n$=2$k$+2"，左边需增加的代数式是 ______________.
4. 用数学归纳法证明 1+2+3+…+（2n+1）=$(n+1)(2n+1)$时，从"n=k到n=k+1"，左边需增添的代数式是 _______________ .
5. 观察下列式子:$1+\frac{1}{2^2}<\frac{3}{2}$,$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{5}{3}$,$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<\frac{7}{4}$,…,则可以猜想其结论为________
6. 观察：1=1，$1-4=-(1+2)$，$1-4+9=1+2+3$，$1-4+9-16=-(1+2+3+4),\cdots$，
   找出一般规律，表示出第n个式子为__________________________________。
7. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_{n+1}-2a_n=\frac{n+2}{n(n+1)}\quad(n\in N^*)$

（1）求出a_2,a_3,a_4；　（2）猜想出通项公式$a_n=f(n)$，并用数学归纳法加以证明。

第 11 讲：数列的极限

知识概要：

1.数列的极限

(1)描述性定义：在项数无限增大的变化过程中，如果无穷数列$\{a_n\}$中的项a_n无限趋近于某个常数 A，那么 A 叫做数列$\{a_n\}$的极限，或叫做数列$\{a_n\}$收敛于 A，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，读作 n 趋向于无穷大时，$a_n$的极限等于 A，由于$a_n$无限地趋近于 A，与$|a_n - A|$无限地趋近于 0 的意义相同，所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，可表示为$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

(2)$\varepsilon - N$ 定义：设$\{a_n\}$是一个数列，A 是一个确定的常数，若对任意给定的正数ε，总存在一个正整数 N，使得当$n > N$时，都有$|a_n - A| < \varepsilon$，则称数列$\{a_n\}$的极限是 A，或者说数列$\{a_n\}$收敛于 A，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

2.基本数列的极限：$\lim\limits_{n\to\infty} C = C$；$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$；$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0(|q| < 1)$.

3.数列极限的运算法则，如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

4.无穷等比数列各项的和

把公比 q 满足$|q| < 1$的无穷等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，

当$n \to \infty$时的极限叫做无穷等比数列各项的和，并用符号S表示，

即$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}(0 < |q| < 1)$.

典型例题：

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+2}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n}{2n^4-n^2}$.

2. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}$，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+3b_n-1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$.

3.计算：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(5-\frac{1}{n^2})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+1}{-3n^2+2n}$.

4. 若实数b满足$|b|>1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{b^n}$.

5. （1） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{3n^2+n}-an-b\right)=0$，求 a，b （2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{1+a^n}(a\neq-1)$

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^{n+1}+(a+1)^n}=\dfrac{1}{3}$，求 a 的取值范围

6. 下列命题中，正确的是________

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 必存在；

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=A^2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pm A$；

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ 都存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 必存在；

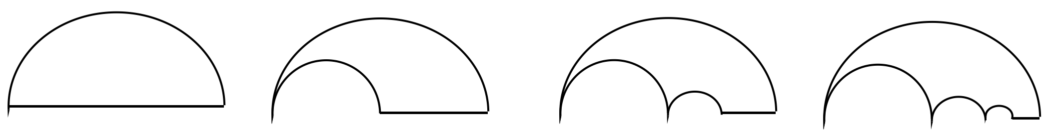
（4）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$；

（5）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 也存在；

（6）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$ 都存在是必相等。

7. 如图 P_1 是一块半径为 1 的半圆形纸板，在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2，然后依次剪去一个更小半圆（其直径为前一个被剪掉半圆的半径）得图形 P_3 ，P_4 ，… ,P_n,…,记纸板 P_n 的周长、面积分别为 L_n、S_n，

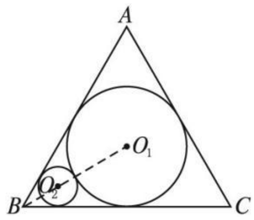
求（1） $\lim\limits_{n\to\infty}L_n$； （2） $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.



P_1 P_2 P_3 P_4

8. 在边长为 1 的等边△ABC 中,圆 O_1 为△ABC 的内切圆,圆 O_2 与圆 O_1 外切,且与 AB、BC 相切,…,圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切,且与 AB、BC 相切,如此无限下去.记圆 O_n 的面积为 $a_n(n\in N^*)$.

(1)证明{a_n}是等比数列;(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$的值.



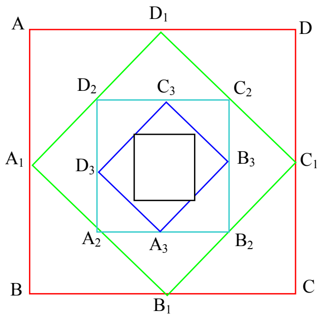
第 12 讲：无穷等比数列各项和

知识概要：

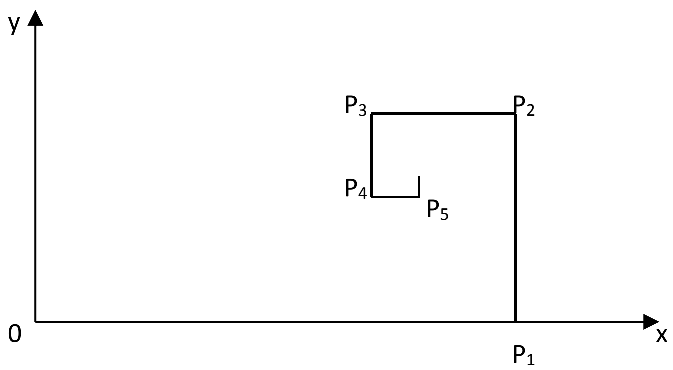
我们把$|q|<1$的无穷等比数列前 n 项的和S_n当$n\to\infty$时的极限叫做无穷等比数列各项的和，并用 S 表示，即$S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$ $(0<|q|<1)$

典型例题：

1. 正方形 ABCD 的边长为 1，连接这个正方形各边的中点得到一个小的正方形$A_1B_1C_1D_1$；又连接这个小正方形各边的中点得到一个更小的正方形$A_2B_2C_2D_2$；如此无限继续下去，求所有这些正方形的面积的和.



2. 在直角坐标系中，蚂蚁由原点出发沿 x 轴向右前进 1 个单位到 P_1 ，接着向上前进$\dfrac{1}{2}$个单位到点 P_2，再向左前进$\dfrac{1}{2^2}$个单位到点 P_3，又向下前进$\dfrac{1}{2^3}$个单位到点 P_4，以后的前进方向按向右、向上、向左、向下的顺序，每次前进的距离为上一次前进距离的一半。这样无限下去，那么蚂蚁爬行的极限位置将在何处？



3. （1）设无穷等比数列满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})=\frac{8}{3}$，

求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 的取值范围

（2）等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，且前 n 项和 S_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{5}$，求 a_1 的取值范围

（3）等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，且满足 $a_1>3(a_2+a_3+\cdots)$，求 q 的取值范围

4. 数列 $\{b_n\}$ 中任意相邻两项 b_n,b_{n+1} 是方程 $x^2-a_nx+\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ 的两个根，其中 $n\in N^*$，已知 $b_1=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$

第 13 讲　阶段性测试

一、填空题（每题 3 分，共 33 分）

1．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若$a_1=1$，则数列$\{a_n\}$的前10项之和$S_{10}=$______

2．已知平面向量$\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(x,-3)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$x=$______________.

3．线性方程组$\begin{cases}2x+3y-2=0\\3x-4y-5=0\end{cases}$的增广矩阵为____________________.

4．已知$a,b,a+b$成等差数列，a,b,ab成等比数列，则行列式$\begin{vmatrix}a & a+b\\ b & ab\end{vmatrix}$的值为__________.

5．已知$\vec{a}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，则$\vec{a}$的单位向量为_______________.

6．已知$\overrightarrow{OA}=(-4,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1)$，则向量$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$的方向上的投影为______.

7．行列式$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & -2\end{vmatrix}$的第$1$行第$2$列元素的代数余子式的值为______________.

8．等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知S_1，$2S_3$，$3S_2$成等差数列，则$\{a_n\}$的公比为____.

9．无穷数列$\{a_n\}$满足：$a_1=3$，且对于任意的正整数m,n

都有$a_{m+n}=a_m a_n$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的各项和为_________.

10．设a_n,a_{n+2}是方程$x^2-a_{n+1}x+c_n=0$（$n\in N^*$）的两根，$a_1=1,a_2=3$，则$c_1+c_2+\cdots+c_{2018}$的值为________________.

11．设n阶方阵

$$A_n=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1\\ 2n+1 & 2n+3 & 2n+5 & \cdots & 4n-1\\ 4n+1 & 4n+3 & 4n+5 & \cdots & 6n-1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2n(n-1)+1 & 2n(n-1)+3 & 2n(n-1)+5 & \cdots & 2n^2-1\end{pmatrix}$$

任取A_n中的一个元素，记为x_1；划去x_1所在的行和列，将剩下的元素按原来的位置关系组成$n-1$阶方阵A_{n-1}，任取A_{n-1}中的一个元素，记为x_2；划去x_2所在的行和列，…；将最后剩下的一个元素记为x_n. 记$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^3+1}=$__________.

二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

12．“$\{a_n\}$既是等差数列又是等比数列”是“$\{a_n\}$是常数列”的　　　　（　　）

A．充分非必要条件．　B．必要不充分条件．　C．充要条件．　D．既不充分也不必要条件．

13．在ΔABC中，若$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$，则$\Delta ABC$是　　　　（　　）

A.锐角三角形.　B.直角三角形.　C.钝角三角形.　D.等边三角形.

14．在函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象上有点列 $\left\{x_n,y_n\right\}$，若数列 $\left\{x_n\right\}$ 是等差数列，数列 $\left\{y_n\right\}$ 是等比数列，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的解析式可能为　　　　　　　　　　　　（　　）

A．$f\left(x\right)=2x+1$．　　B．$f\left(x\right)=4x^2$．　　C．$f\left(x\right)=\log_2 x$．　　D．$f\left(x\right)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$．

15．已知 O 为平面上一定点，A,B,C 是平面上不共线的三个点，动点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线所在直线上. 给出下列命题：①$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$；

②$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\overrightarrow{AB}\sin B+\overrightarrow{AC}\sin C\right)$；③$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\sin C}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\sin B}\right)$；

④$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\sin C+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\sin B\right)$，其中正确的个数是　　　　　（　　）

A. 1　　　　　B. 2　　　　　C. 3　　　　　D. 4

三、**解答题**（本大题共计 55 分）

16.（本题 6 分）

已知向量 $\overrightarrow{m}=\left(1,-\sqrt{3}\right)$，$\vec{n}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 求向量 $\overrightarrow{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角.

17.（本题 7 分）

已知 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列，若矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{a_1}\\ a_5 & a_6\end{pmatrix}$ 满足 $AB=\begin{pmatrix}6 & 10\end{pmatrix}$，求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式.

18.（本题 8 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A\left(1,1\right),B\left(0,5\right),C\left(-3,9\right)$.

（1）求以线段 AB 、 AC 为邻边的平行四边形两条对角线的长；

（2）设实数 t 满足 $\left(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}\right)//\overrightarrow{BC}$ ，求 t 的值.

19. （本题 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 a_n 是 S_n 与 2 的等差中项，

（1）计算 a_1,a_2,a_3 ，并猜测 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

（2）用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

20.（本题 12 分）

设 ΔABC 是锐角三角形，a,b,c 分别是内角 A,B,C 所对边长，规定 $f\left(A,B\right)$ 满足：

$$f\left(A,B\right)=\begin{vmatrix}\sin A+\sin B & \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+B\right) & \sin A-\sin B\end{vmatrix}.$$

（1）若 $f\left(A,B\right)=0$ ，求角 A 的值；

（2）在（1）的条件下，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12,a=2\sqrt{7}$ ，求 b,c 的值.

21.（本题 12 分）

对于函数 $y=f\left(x\right),x\in D$．若存在 $x_1,x_2\in D$，对任意的 $x\in D$，都有 $f\left(x_1\right)\le f\left(x\right)\le f\left(x_2\right)$，则称函数 $f\left(x\right)$ 为“Width 函数”，其中 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)$ 称为函数 $f\left(x\right)$ 在 D 上的“Width”．

（1）判断函数 $f\left(x\right)=\sqrt{5+4x-x^2}$，$g\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$ 是否为“Width 函数”？

如果是，写出其“Width”；

（2）已知 $\vec{a}=\left(x,2-y\right),\vec{b}=\left(y-1,2^{n-1}\right)$（$x\in Z$，$n$ 为正整数），且 $\vec{a}\perp\vec{b}$．记 y 关于 x 的函数的“Width”为 b_n；

（3）在（2）的条件下，是否存在正数 t，使得 $\log_2\dfrac{256}{b_{n+1}}+\log_2\dfrac{256}{b_{n+2}}+\cdots+\log_2\dfrac{256}{b_{2n}}<t-\dfrac{22}{t}$ 对一切正整数 n 都成立？若存在，求出实数 t 的取值范围；若不存在，请说明理由.

第 14 讲　数列的递推和求和

一、填空题

1、在等差数列$\{a_n\}$中，$a_n \neq 0$，当$n \geq 2$时，$a_{n-1} - a_n^2 + a_{n+1} = 0$，$S_n$为$\{a_n\}$的前$n$项和，若$S_{2k-1} = 46$，则$k =$________

2、数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$，则$\{a_n\}$的前 60 项和等于_______

3、 设数列$\{a_n\}$($n \in \mathbf{N}^*$)是等差数列. 若a_2和a_{2012}是方程$4x^2 - 8x + 3 = 0$的两根，则数列$\{a_n\}$的前2013 项的和$S_{2013} =$__________

4、等差数列$\{a_n\}$中，$a_6 + a_7 + a_8 = 12$，则该数列的前13项和$S_{13} =$__________.

5、若S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且$\frac{S_8}{8} = \frac{S_6}{6} + 10$，则$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^2} =$________

6、若数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n$（$n \in N^*$），则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的各项和为________

7、在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1 + a_3 + a_5 = 9,\ a_2 + a_4 + a_6 = 15,$ 则数列$\{a_n\}$的前 10 项的和等于____

8、在等差数列$\{a_n\}$（$n \in N^*$）中，已知公差$d = 2$，$a_{2007} = 2007$，则$a_{2016} =$________

9、若数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 1$（$n \in N^*$），则数列$\left\{\frac{1}{1 + a_n}\right\}$的各项和为_____.

10、设数列$\{a_n\}$满足当$a_n > n^2$（$n \in N^*$）成立时，总可以推出$a_{n+1} > (n+1)^2$成立．下列四个命题：

（1）若$a_3 \leq 9$，则$a_4 \leq 16$.

（2）若$a_3 = 10$，则$a_5 > 25$.

（3）若$a_5 \leq 25$，则$a_4 \leq 16$.

（4）若$a_n \geq (n+1)^2$，则$a_{n+1} > n^2$.

其中正确的命题是_________..（填写你认为正确的所有命题序号）

11、对一切实数x，令$[x]$为不大于x的最大整数，则函数$f(x) = [x]$称为取整函数．若$a_n = f\left(\frac{n}{10}\right)$，$n \in \mathbf{N}^*$，$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则$\frac{S_{2009}}{2010} =$_______

12、设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$a_1 a_2 a_3 = 64,$ 且$S_{2n} = 5(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1})$，$(n \in N^*)$则$a_n =$______.

二、选择题

13、等差数列$\{a_n\}$中，已知$3a_5 = 7a_{10}$，且$a_1 < 0$，则数列$\{a_n\}$前n项和S_n（$n \in N^*$）中最小的是（　　　）

(A) S_7或S_8　　(B) S_{12}　　(C) S_{13}　　(D) S_{14}

14、已知数列$a_n = n \cdot \sin\frac{n\pi}{2}$，则$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = \cdots\cdots\cdots\cdots$（　　　）.

$A. -48$；　$B. -50$；　$C. -52$；　$D. -49$

15、数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=\cos\frac{2n\pi}{3}(n\in N^*)$，若数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_{2013}$的值为　　　　　　　　　　　　　**[答]**（　　）

（A）2013　　　（B）671　　　（C）-671　　　（D）$-\frac{671}{2}$

16、已知函数$f(x)$是定义在R上的单调增函数且为奇函数，数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_{1007}>0$，则$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2012})+f(a_{2013})$的值……（　　）.

A.恒为正数　　　B.恒为负数　　　C.恒为0　　　D.可正可负

三、解答题

17、已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}-2^n$ $(n\in N^*)$.

（1）设$b_n=\frac{a_n-2^n}{3^n}$，证明：数列$\{b_n\}$为等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

18、设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{n+1}=pS_n+q$（$n\in\mathbf{N}^*$，p、q为常数），$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=q-3p$.

（1）求p、q的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

19、已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_1>1$，且$6S_n=a_n^2+3a_n+2$ ($n\in\mathbf{N}^*$).

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases}a_n,n为偶数\\2^{a_n},n为奇数\end{cases}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求$T_n$；

第 15 讲　数列与函数不等式

1、已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=\dfrac{2}{n^2-4n+5}$,则数列$\left\{a_n\right\}$的最大项是第_______项

2、已知数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列且$a_n=n^2+\lambda n$,则实数λ的取值范围是_______

3、若不等式$\left(-1\right)^n a<3+\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n+1}$对任意自然数$n$恒成立，则实数$a$的取值范围是_______

4、若$\{a_n\}$为等比数列，$a_n>0$，且$a_{2018}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则$\dfrac{1}{a_{2017}}+\dfrac{2}{a_{2019}}$的最小值为________.

5、已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=\lg\left(100\sin^{n\text{-}1}\dfrac{\pi}{4}\right)$,则前$n$项和最大项是第_______项

6、设$f\left(n\right)=2+2^4+2^7+\cdots+2^{3n+10}\left(n\in N^*\right)$,则$f\left(n\right)=$________

7、已知各项皆为正数的等比数列$\left\{a_n\right\}$（$n\in N^*$），满足$a_7=a_6+2a_5$，若存在两项a_m、a_n使得$\sqrt{a_m a_n}=4a_1$，则$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}$的最小值为__________

8、在由正整数构成的无穷数列$\left\{a_n\right\}$中，对任意的$n\in N^*$, 都有$a_n\le a_{n+1}$, 且对任意的$k\in N^*$，数列$\left\{a_n\right\}$中恰有k个k，则$a_{2016}=$_________.

9、已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{2018}\overrightarrow{OC}$,且$A,B,C$三点共线(该直线不过$O$点),则$S_{2018}=$________

10、设函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3^x+\sqrt{3}}$,利用课本推导等差数列前$n$项和公式的方法，可求得

$f\left(-5\right)+f\left(-4\right)+f\left(-3\right)+\cdots f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)+\cdots f\left(5\right)+f\left(6\right)=$______

11、已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n\text{-}1}\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n\text{-}1}\text{-}1\right)$,则数列$\left\{a_n\right\}$的最大项与最小项分别为

____

12、已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=\dfrac{an}{bn+1}$,其中a,b为正常数,则a_n,a_{n+1}的大小关系为______

13、已知$\vec{i}$和$\vec{j}$是互相垂直的单位向量，向量$\overrightarrow{a_n}$满足：$\vec{i}\cdot\overrightarrow{a_n}=n$，$\vec{j}\cdot\overrightarrow{a_n}=2n+1$，$n\in \mathrm{N}^*$，设$\theta_n$为$\vec{i}$和$\overrightarrow{a_n}$的夹角，则　（B）

A．θ_n随着n的增大而增大；　B．θ_n随着n的增大而减小；

C．随着n的增大，θ_n先增大后减小；　D．随着n的增大，θ_n先减小后增大.

14、已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=\dfrac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}\left(n\in N^*\right)$,则数列$\left\{a_n\right\}$的前50项中最小项和最大项是（　　）

$(A)a_1,a_{50}$　　$(B)a_1,a_8$　　$(C)a_8,a_9$　　$(D)a_9,a_{50}$

15、已知方程$\left(x^2-2x+m\right)\left(x^2-2x+n\right)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列.

则$|m-n|$等于 (　　)

$(A)1$　　$(B)\frac{3}{4}$　　$(C)\frac{1}{2}$　　$(D)\frac{3}{8}$

16、已知正数数列$\{a_n\}$是公比不等于 1 的等比数列，且$\lg a_1+\lg a_{2019}=0$，若$f(x)=\frac{2}{1+x^2}$，则

$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2019})=$ （　　）.

A．2018　　B．4036

C．2019　　D．4038

17、(本题满分10分，第1小题4分、第2小题6分)

已知数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$，

（1）求$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）当$n\geq 2$时，$a_{n+1}+\frac{\lambda}{a_n}\geq\lambda$恒成立，求$\lambda$的取值范围.

18、(本题满分 20 分，第 1 小题 4 分，第 2 小题 8 分，第 3 小题 8 分)

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且点(n,S_n)（$n\in\mathrm{N}^*$）在函数$y=2^{x+1}-2$的图象上.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设数列$\{b_n\}$满足：$b_1=0$，$b_{n+1}+b_n=a_n$，求$\{b_n\}$的通项公式;

（3）在第（2）问的条件下，若对于任意的$n\in\mathrm{N}^*$，不等式$b_n<\lambda b_{n+1}$恒成立，求实数λ的取值范围.

19、设数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，已知向量$\vec{a}=\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{n\pi}{3},1\right)$,

$\vec{b}=\left(a_n,\cos\frac{n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right)$, $\left(n\in N^*\right)$满足$\vec{a}//\vec{b}$。（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（2）求S_{30}；(3) 设$b_n=na_n$,求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和T_n

20、 已知点（1，$\frac{1}{3}$）是函数$f(x)=a^x(a>0,$ 且$a\neq 1$）的图象上一点，等比数列$\{a_n\}$的前n项和为$f(n)-c$,数列$\{b_n\}$ $(b_n>0)$的首项为c，且前n项和S_n满足：

$S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$ （$n\geq 2$）.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$前n项和为T_n，问$T_n>\frac{1000}{2009}$的最小正整数n是多少?

第 16 讲　暑期总结复习

一、填空题

1．行列式$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}$的第 2 行第 3 列元素的余子式的值为________代数余子式为______.

2．记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$a_1=\dfrac{1}{2},S_4=20$，则$S_6=$____________.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n+3n^2+\cdots+2018n^{2018}}{n^{2018}+2n^{2017}+\cdots+2017n+2018}=$____________.

4．规定矩阵$A^3=A\cdot A\cdot A$，若矩阵$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 x 的值是_____________.

5．已知等比数列$\{a_n\}$的首项为 1，公比为$q(q>0)$，它的前 n 项和为S_n，且$T_n=\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$=____________________.

6．用数学归纳法证明“当 $n\in N^*$时，$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{5n-1}$是 31 的倍数”时，第二步中从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时需增添的项是____________________.

7．若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=1$，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角大小为_____.

8．试将式子：$-c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}+f\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix}-k\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}$写成三阶行列式的形式是________________

9．若$\vec{a}=(-1,k),\vec{b}=(k,-2)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则$k=$________，$\overrightarrow{b_0}=$____________

10．已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$都是公差为 1 的等差数列，其首项分别为a_1,b_1，且$a_1=1,b_1=4,a_1,b_1\in N^*$设$c_n=a_{b_n}$，则数列$\{c_n\}$的前 10 项和等于_________.

11.已知平面向量$\vec{a}=(2,4),\vec{b}=(-1,2)$，若$\vec{c}=\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$，则 $|\vec{c}|$=___________.

二、选择题

12．下列等式中错误的是（　　）

（A）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$　　（B）$\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

（C）$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$　　（D）$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

13．对无穷数列$\{a_n+b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$存在，则下列说法中正确的个数是（　　）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$一定存在，（2）$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$一定存在，（3）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$、$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$一定都存在.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

14．使数列$10^{\frac{1}{11}},10^{\frac{2}{11}},10^{\frac{3}{11}},\cdots,10^{\frac{n}{11}}$的前 n 项积大于$10^5$的自然数 n 的最小值为（　　）

（A）8　　（B）9　　（C）10　　（D）11

15．设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，令$T_n=\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$，称$T_n$为数列$a_1$，$a_2$，……，$a_n$的“regular number”，已知数列$a_1$，$a_2$，……，$a_{1008}$的“regular number”为 2018，那么数列 2，a_1，a_2，……，a_{1009}的“regular number”为（　　）

（A）2014　　（B）2016　　（C）2018　　（D）2019

三、解答题

16．用行列式解关于 x、y 的方程组$\begin{cases}(\lambda-1)x+4y=1\\3x+2y=2\end{cases}$，并讨论方程组解的情况。

17．数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+3a_n}$，$(n\in N)$.

（1）计算a_2，a_3，a_4；（2）猜测a_n并用数学归纳法证明；

（3）设$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{S_n}$的值.

18．已知向量$\vec{a}$＝(sinϑ，1)，$\vec{b}$＝(1，-cosϑ)，$-\dfrac{\pi}{2}<\vartheta<\dfrac{\pi}{2}$.

（1）若$\vec{a}\perp\vec{b}$，求ϑ；（2）求$|\vec{a}+\vec{b}|$的最大值.

19．定义$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$为向量$\overrightarrow{OP_n}=(x_n,y_n)$到$\overrightarrow{OP_{n+1}}=(x_{n+1},y_{n+1})$的一个矩阵变换，n$\in N^*$，设向量$\overrightarrow{OP_1}$=（1，0），$\overrightarrow{OP_2}$=（1，$\sqrt{3}$），O为坐标原点.

（1）求$\triangle OP_1P_2$的面积；

（2）求实数a,b的值；

（3）设$\overrightarrow{OP_{n+1}}$在$\overrightarrow{OP_n}$的方向上的投影构成数列$\{a_n\}$，求$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$.

20．设正数数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,对于 t>0, 有$\sqrt{tS_n}=\dfrac{a_n+t}{2}$成立，

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式。（2）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{S_n}}{a_n}<t$，求$t$的取值范围.

21. 在直角坐标平面内，$\vec{i}$、$\vec{j}$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向同向的单位向量，$\overrightarrow{OB_1}=a\cdot\vec{i}+2\vec{j}\quad(a\in R)$，对任意正整数 n，$\overrightarrow{B_nB_{n+1}}=51\cdot\vec{i}+3\cdot 2^{n-1}\vec{j}$.

(1) 若实数 $a=-39$，求 $\left|\overrightarrow{OB_2}\right|$；

(2) 设 $\overrightarrow{OB_n}=x_n\cdot\vec{i}+y_n\cdot\vec{j}$ ，试写出 x_n 和 y_n 的表达式；

(3) 在（2）的基础上，求最大整数 a 的值，使得对任意正整数 n，都有 $x_n<y_n$ 成立 .