

暑假班高二数学[参考答案]

第1讲：初中平面向量衔接

1. C; 2. D; 3. A; 4. B; 5. B; 6. A; 7. $\frac{3}{2}$; 8. $2\vec{a}-\vec{b}$; 9. ± 1 ; 10. 1:2; 11. 3; 12. $\frac{4}{3}$;

13. $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; 14. $|\overrightarrow{BC}|_{\max} = \sqrt{41}, |\overrightarrow{BC}|_{\min} = \sqrt{5}$; 15. $k = \pm 2$;

【随堂练习】

1. ①; 2. D; 3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$; 4. 0; 5. (1) 略 (2) $k =$

± 1 .

6. B;

第2讲：向量的坐标及其表示

1. A; 2. D; 3. C; 4. C; 5. C; 6. C; 7. $\lambda_1\lambda_2 = 1$; 8. $\frac{\pi}{4}$; 9. (2, 5); 10. (-1, 2); 11. $\frac{1}{3}$; 12. $-\frac{21}{2}\vec{a} - 15\vec{b}$.

13. $x = -1$; 14. $x = \frac{35}{17}$, $y = \frac{3}{17}$; 15. $y = 2, \overrightarrow{PQ} = (-1, 1)$; 16. 略; 17.

$\vec{a} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \vec{b} = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}), \vec{c} = (2\sqrt{3}, -2)$.

【课后作业】

1. D; 2. D; 3. B; 4. C; 5. B; 6. (3, 5); 7. (-6, 19); 8. (7, 3); 9. 5; 10. (-1, 1) 或 (-3, 1); 11. 2; 12. $\sqrt{58}$, $-\frac{1}{3}$, 反向; 13. (0, 24), (9, 2).

第3讲：向量的数量积

1. C; 2. D; 3. D; 4. A; 5. A; 6. A; 7. $\frac{\pi}{3}$; 8. $\frac{7}{12}$; 9. 18; 10. -3; 11. 18 或 $\frac{9}{2}$; 12. $\frac{5}{2}$.

13. $\theta = \frac{2\pi}{3}, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{37}$; 14. $|\vec{a} + \vec{b}| = \frac{3}{2}, A = [-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, \frac{\sqrt{2}}{2} - 2]$.

15. $T = \pi$, 减区间 $[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}], k \in \mathbb{Z}$, $b = 3, c = 2$.

【随堂练习】

1. D; 2. C; 3. B; 4. D; 5. C; 6. D; 7. D; 8. $\frac{1}{2}$; 9. $\frac{\pi}{3}$; 10. 1; 11. $\frac{\pi}{4}$; 12. $\sqrt{2}$, 1;

第4讲：平面向量基本分解定理

1. D; 2. B; 3. A; 4. B; 5. A; 6. A; 7. 不共线,不共线; 8. $-\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{3}{10}\vec{b}$; 9. 0; 10. $\frac{2\pi}{3}$; 11. -1;

12. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 13. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$; 14. $\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{4}\vec{b}, \overrightarrow{AH}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$; 15. $\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$.

【课后作业】

1. A; 2. B; 3. A; 4. C; 5. B; 6. C; 7. D; 8. B; 9. A; 10. B; 11. C; 12. B;

第5讲：向量的应用

1. B; 2. C; 3. D; 4. -16; 5. $3\sqrt{2}$; 6. 4; 7. $\frac{5}{4}$; 8. -6; 9. $-\frac{4}{9}$; 10. $2\sqrt{2}$; 11. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$; 12. $\sqrt{13}$;

13. $\frac{\pi}{6}$; 14. $\frac{\pi}{2}$; 15. $k=f(t)=\frac{1}{4}(t^3-3t), t \neq 0$. 16. 略; 17. 14

【随堂练习】

1. D; 2. C; 3. D; 4. A; 5. $5\sqrt{3}$; 6. 5, 0; 7. 略; 8. 略。

第6讲：平面向量的综合提升与复习

1. $\frac{\pi}{4}$; 2. 钝角; 3. $\sqrt{3}$; 4. 10; 5. $\sqrt{2}$; 6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 7. $|\overrightarrow{BC}|=4\sqrt{2}, |\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{10}, t=-\frac{11}{5}$;

8. $k=f(t)=\frac{t^2-t-5}{t+2}, t \neq -2, k_{\min}=-3$; 9. -2; 10. $\sqrt{29}$; 11. C. 12. D; 13. B; 14. A; 15. C; 16. D; 17.

C; 18. C; 19. B; 20. C; 21. C; 22. B; 23. (1, 5); 25. $\frac{5}{2}$; 26. $\sqrt{6}$; 27. -25; 28. -4; 29. $\frac{\sqrt{65}}{5}$; 30. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; 31. [-6, 2];

32. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; 33. -1 或 3, 2 或 $2\sqrt{5}$; 34. $\sqrt{7}$, 30°

35. $m=-\frac{\pi}{12}, n=1$;

第7讲：阶段测试(平面向量)

1. $10, (-8, 6)$; 2. -1 ; 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4. 5 ; 5. 7 ; 6. 正三角形; 7. $\frac{\pi}{3}$; 8. $\frac{\pi}{3}$;
9. 1 ; 10. -3 ; 11. $x > -\frac{10}{3}$; 12. 1 ; 13. $\frac{1}{5}\vec{m} + \frac{2}{5}\vec{n}$; 14. $-\frac{1}{2}$; 15. -5 ; 16. 2 ;
17. $\vec{BG} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$; 18. 菱形; 19. $4:3$; 20. $-\frac{4}{3}$; 21. $\frac{3}{4}$; 22. $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 23. $\frac{8}{15}$;
24. $-\frac{4}{7}$; 25. 2 .

第8讲：矩阵的概念及矩阵的运算

1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$.

第9讲：二阶行列式与三阶行列式

知识梳理：

5. (1) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

(2) 交换矩阵的两行；以一个非零数 k 乘矩阵的某一行；把矩阵的某一行乘以一个数 k 后加到另一行

典型例题：

1. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 3m & -m & 2m+3 \end{pmatrix}$

第10讲：数学归纳法及其应用

1. 证明：(i) 当 $n=1$ 时，左边 $= 1^2 = 1$ ，右边 $= \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$ ，等式成立；

(ii) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

则当 $n=k+1$ 时，左边 $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]
\end{aligned}$$

=右边, 即当 $n=k+1$ 时等式也成立.

.由(i),(ii)可知, $n \in N^*$ 时, 等式成立.

2. 略; 3. C; 4. C; 5. $1+2+3+\cdots+k+1$;

6. (1) $\because S_n = n^2 a_n$, $\therefore a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
 $= (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$$

$$\therefore a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{10}, a_5 = \frac{1}{15},$$

(2) 猜测 $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$; 下面用数学归纳法证

①当 $n=1$ 时, 结论显然成立.

②假设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $a_k = \frac{2}{k(k+1)}$

$$\begin{aligned}
\text{则当 } n=k+1 \text{ 时, } a_{k+1} &= \frac{k}{k+2} a_k \\
&= \frac{k}{k+2} \times \frac{2}{k(k+1)} \\
&= \frac{2}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

故当 $n=k+1$ 时结论也成立.

由①、②可知, 对于任意的 $n \in N^*$, 都有 $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

课后练习:

1. $1+2+3+4$; 2. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}; a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \quad n \in N^*$

3. $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$

4. $(2k+2)+(2k+3)$ 5. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

6. $1-4+9-16+\cdots+(-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n+1} \cdot (1+2+3+\cdots+n)$

7. 1) $a_2 - 2a_1 = \frac{3}{2}$
 $a_2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$
 $a_3 - 2a_2 = \frac{4}{6}$
 $a_3 = \frac{23}{3}$
 $a_4 = \frac{63}{4}$

2) $a_n = f(n) = \frac{n \cdot 2^n - 1}{n}$

证明: ① 当 $n=1$ 时 $a_1 = f(1) = \frac{1 \cdot 2^1 - 1}{1} = 1$
 ② 假设 $n=k$ 时成立.
 $\therefore a_k = f(k) = \frac{k \cdot 2^k - 1}{k}$
 当 $n=k+1$ 时:
 $a_{k+1} - 2a_k = \frac{k+3}{(k+1)(k+2)}$
 $a_{k+1} = \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} + 2 \cdot \frac{k \cdot 2^k - 1}{k}$
 $= \frac{(k+3)k + 2k(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)k}$
 $= \frac{(k+1)2^{k+1} - 1}{k+1}$
 $\therefore a_{k+1} = f(k+1)$
 $\therefore \sim$

第 11 讲: 数列的极限

1. (1) 0; (2) 3; (3) $\frac{2}{3}$; (4) 0; 2. (1) 2; (2) $\frac{7}{5}$; 3. (1) 5; (2) $-\frac{2}{3}$; 4. 1;

5. (1) $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{9}$

(2) 当 $a=1$ 时, 原式 $=0$; 当 $|a|>1$ 时, 原式 $=-1$; 当 $|a|<1$ 时, 原式 $=1$

(3) $-4 < a < 2$

6. (4) (6);

7. (1) 周长是由无穷多个半圆弧长之和组成的, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \pi \cdot 1 + \pi \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \frac{1}{4} + \dots = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi.$$

(2) 所求图形的面积是由大半圆面积减去无穷多个小半圆面积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}.$$

8. (1) 略 (2) $\frac{3\pi l^2}{32}$

第 12 讲: 无穷等比数列各项和

1. $\frac{4}{3}$; 2. 2;

3. (1) $(0, \frac{8}{3})$ (2) $(0, \frac{2}{5}) \cup (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

(3) 当 $a_1 > 0$ 时, $q \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$; 当 $a_1 < 0$ 时, $q \in (\frac{1}{4}, 1)$

4. 由题意可得: $b_n b_{n+1} = \frac{1}{3^n}$, $b_n + b_{n+1} = a_n$,

$$\therefore b_1 b_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{又 } b_1 = 2,$$

$$\therefore b_2 = \frac{1}{6}.$$

$$\text{当 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 时, } \frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore b_n = \begin{cases} 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\text{由 } b_n + b_{n+1} = a_n \text{ 得: } a_n = \begin{cases} \frac{13}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{\frac{13}{6}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2}.$$

13. 阶段性测试

一、填空题（每题 3 分，共 33 分）

1. 100. 2. 1. 3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 4. -8. 5. $\vec{a}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 6. -1.
7. -3. 8. $-\frac{1}{4}$ 9. $\frac{1}{2}$. 10. 5195 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3 + 1} = 1$

二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

12. (A) 13. (B) 14. (D) 15. (C)

三、解答题（本大题共计 55 分）

16. 向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角 $\frac{2\pi}{3}$

17. $a_n = 2n - 3$

18. (本题 8 分)

解: (1) $\vec{AB} = (-1, 4)$, $\vec{AC} = (-4, 8) \Rightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = (-5, 12)$, $\vec{AB} - \vec{AC} = (3, -4)$,

$$\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC}| = 13, |\vec{AB} - \vec{AC}| = 5,$$

$$(2) (\vec{AB} - t\vec{OC}) // \vec{BC}, (\vec{AB} - t\vec{OC}) = (3t - 1, 4 - 9t), \vec{BC} = (-3, 4)$$

$$\Rightarrow 4(3t - 1) = -3(4 - 9t) \Rightarrow t = \frac{8}{15}$$

19. (本题 10 分)

(1) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8$, 猜测 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2^n (n \in N^*)$;

(2) (略)

20. (本题 12 分)

$$(1) \text{ 若 } f(A, B) = \sin^2 A - \sin^2 B - \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + B\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 A - \sin^2 B - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos B - \cos\frac{\pi}{3}\sin B\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos B + \cos\frac{\pi}{3}\sin B\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 A - \sin^2 B - \left(\frac{3}{4}\cos^2 B - \frac{1}{4}\sin^2 B\right) = 0 \Rightarrow \sin^2 A = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \text{ 在 (1) 的条件下, } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 \Rightarrow c \cdot b \cos A = 12 \Rightarrow bc = 24, a = 2\sqrt{7}$$

$$a = 2\sqrt{7} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow b^2 + c^2 = 52 \Rightarrow b = 4, c = 6 \text{ 或 } b = 6, c = 4$$

21. (本题 12 分)

对于函数 $y = f(x), x \in D$. 若存在 $x_1, x_2 \in D$, 对任意的 $x \in D$, 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 为 “Width 函数”, 其中 $f(x_2) - f(x_1)$ 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的 “Width”.

(1) 判断函数 $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 是否为 “Width 函数”?

如果是, 写出其 “Width”;

(2) 已知 $\vec{a} = (x, 2-y), \vec{b} = (y-1, 2^{n-1})$ ($x \in Z, n$ 为正整数), 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$. 记 y 关于 x 的函数的“Width”为 b_n ; 求 $\{b_n\}$ 的通项公式

(3) 在 (2) 的条件下, 是否存在正数 t , 使得 $\log_2 \frac{256}{b_{n+1}} + \log_2 \frac{256}{b_{n+2}} + \dots + \log_2 \frac{256}{b_{2n}} < t - \frac{22}{t}$ 对一切正整数 n 都成立? 若存在, 求出实数 t 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

(1) 函数 $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2} = \sqrt{9-(x-2)^2} \Rightarrow f(-1) = f(5) \leq f(x) \leq f(2)$,

$\Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 D 上的“Width”为 3

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 不是为“Width 函数”, 因为 $g(x) \neq 0 < g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \leq 1 = g(0)$

(2) 已知 $\vec{a} = (x, 2-y), \vec{b} = (y-1, 2^{n-1}) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x(y-1) + (2-y)2^{n-1} = 0 \Rightarrow y = \frac{2^n - x}{2^{n-1} - x}$

$y = f(x) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - x} + 1 \Rightarrow f(2^{n-1} + 1) \leq f(x) \leq f(2^{n-1} - 1) \Rightarrow b_n = (2^{n-1} + 1) - (1 - 2^{n-1}) = 2^n$

$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$

(3) $\log_2 \frac{256}{b_{n+1}} + \log_2 \frac{256}{b_{n+2}} + \dots + \log_2 \frac{256}{b_{2n}} < t - \frac{22}{t}$

$$\Leftrightarrow 8n - (n+1+n+2+n+3+\dots+2n) < t - \frac{22}{t} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}n^2 + \frac{17}{2}n < t - \frac{22}{t}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}n^2 + \frac{17}{2}n\right)_{\max} < t - \frac{22}{t} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}n^2 + \frac{17}{2}n\right)_{\max} = 12 < t - \frac{22}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 12t - 22}{t} > 0 \Leftrightarrow t \in (6 - \sqrt{58}, 0) \cup (6 + \sqrt{58}, +\infty)$$

14. 数列的递推和求和

一、填空题

1、12. 2、1830. 3、2013. 4、52. 5、5. 6、2.

7、80. 8、2025 9、1. 10、(2)(3)(4); 11、100 12、 4^{n-1}

二、选择题

13、(C) 14、(B) 15、(D) 16、(A).

三、解答题

17、解: (1) $\because b_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+1} - 2^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n - 2^n}{3^n} = \frac{3a_n + 3^{n+1} - 2^n - 2^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n - 2^n}{3^n} = 1$

$\therefore \{b_n\}$ 为等差数列. 又 $b_1 = 0$, $\therefore b_n = n - 1$. $\therefore a_n = (n - 1) \cdot 3^n + 2^n$.

(2) 设 $T_n = 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + \dots + (n - 1) \cdot 3^n$, 则

$$3T_n = 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + \dots + (n - 1) \cdot 3^{n+1}.$$

$$\therefore -2T_n = 3^2 + \dots + 3^n - (n - 1) \cdot 3^{n+1} = \frac{9(1 - 3^{n-1})}{1 - 3} - (n - 1) \cdot 3^{n+1}$$

$$\therefore T_n = \frac{9-3^{n+1}}{4} + \frac{(n-1) \cdot 3^{n+1}}{2} = \frac{(2n-3) \cdot 3^{n+1} + 9}{4}.$$

$$\therefore S_n = T_n + (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) = \frac{(2n-3)3^{n+1} + 2^{n+3} + 1}{4}.$$

18、(1) 由题意, 得 $\begin{cases} S_2 = pa_1 + q \\ S_3 = pS_2 + q \end{cases}$, (2 分)

即 $\begin{cases} 3 = 2p + q \\ 3 + q - 3p = 3p + q \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$.

(2) 由 (1) 知, $S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 2$ ①

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{1}{2}S_{n-1} + 2$ ②

①-②, 得 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ ($n \geq 2$), 又 $a_2 = \frac{1}{2}a_1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

19、解: (1) $n=1$ 时, $6a_1 = a_1^2 + 3a_1 + 2$, 且 $a_1 > 1$, 解得 $a_1 = 2$

$n \geq 2$ 时, $6S_n = a_n^2 + 3a_n + 2$, $6S_{n-1} = a_{n-1}^2 + 3a_{n-1} + 2$, 两式相减得:

$$6a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 3a_n - 3a_{n-1} \text{ 即 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 3) = 0, \because a_n + a_{n-1} > 0,$$

$\therefore a_n - a_{n-1} = 3$, $\therefore \{a_n\}$ 为等差数列, $a_n = 3n - 1$.

(2) $b_n = \begin{cases} 3n-1, n \text{ 为偶数} \\ 2^{3n-1}, n \text{ 为奇数} \end{cases}$, $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

当 n 为偶数时, $T_n = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_n)$

$$= \frac{4(1-8^n)}{1-64} + \frac{\frac{n}{2}(5+3n-1)}{2} = \frac{4}{63}(8^n - 1) + \frac{n(3n+4)}{4},$$

当 n 为奇数时, $T_n = (b_1 + b_3 + \cdots + b_n) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-1})$

$$= \frac{4(1-8^{n+1})}{1-64} + \frac{\frac{n-1}{2}(5+3n-4)}{2} = \frac{4}{63}(8^{n+1} - 1) + \frac{(n-1)(3n+1)}{4}.$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} \frac{4}{63}(8^n - 1) + \frac{n(3n+4)}{4}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{63}(8^{n+1} - 1) + \frac{(n-1)(3n+1)}{4}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

15、数列与函数不等式

1、 2. 2、 $\lambda > -3$ 3、 $a \in [-3, 2)$ 4、 4. 5、 14. 6、 $f(n) = \frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$

7、 $\frac{3}{2}$. 8、63. 9、 $S_{2018}=1009$ 10、 $2\sqrt{3}$ 11、 $(a_n)_{max}=0, (a_n)_{min}=-\frac{63}{256}$, 12、 $a_n < a_{n+1}$

13、(B) 14、(C) 15、(C) 16、(C)

17、解：(1) $Q S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 2 \quad (n \geq 2)$

当 $n=1$ 时也成立, $a_1 = 1$

$\therefore a_n = 3n - 2$

(2) $a_{n+1} + \frac{\lambda}{a_n} \geq \lambda \Rightarrow 3n+1 + \frac{\lambda}{3n-2} \geq \lambda \Rightarrow \frac{(3n+1)(3n-2)}{3(n-1)} \geq \lambda$

设 $b_n = \frac{(3n+1)(3n-2)}{3(n-1)}$

$b_{n+1} - b_n = \frac{(3n+1)(3n+4)}{3n} - \frac{(3n+1)(3n-2)}{3(n-1)} = \frac{(3n+1)(3n-4)}{3n(n-1)} > 0$

$\therefore b_n$ 的最小值为 $b_2 = \frac{28}{3}$, $\therefore \lambda \leq \frac{28}{3}$.

18、解：(1) 由题意可知, $S_n = 2^{n+1} - 2$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) = 2^n$,2 分

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2^{1+1} - 2 = 2$ 也满足上式,1 分

所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$1 分

(2) 解法一:

由 (1) 可知 $b_{n+1} + b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 即 $b_{k+1} + b_k = 2^k (k \in \mathbf{N}^*)$.

当 $k=1$ 时, $b_2 + b_1 = 2^1$,①

当 $k=2$ 时, $b_3 + b_2 = 2^2$, 所以 $-b_3 - b_2 = -2^2$,②

当 $k=3$ 时, $b_4 + b_3 = 2^3$,③

当 $k=4$ 时, $b_5 + b_4 = 2^4$, 所以 $-b_5 - b_4 = -2^4$,④

.....

当 $k=n-1$ 时 (n 为偶数), $b_n + b_{n-1} = 2^{n-1}$, 所以 $-b_n - b_{n-1} = -2^{n-1}$ $n-1$

以上 $n-1$ 个式子相加, 得 $b_n + b_1 = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{n-1}$

$$= \frac{2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} = \frac{2(1 + 2^{n-1})}{3} = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}.$$

又 $b_1 = 0$, 所以, 当 n 为偶数时, $b_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}$.

同理, 当 n 为奇数时, $-b_n + b_1 = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots - 2^{n-1} = \frac{2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} = \frac{2 - 2^n}{3},$

所以, 当 n 为奇数时, $b_n = \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}$4 分

19、设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知向量 $\vec{a} = \left(\cos \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{n\pi}{3}, 1 \right)$,

$\vec{b} = \left(a_n, \cos \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \right), (n \in N^*)$ 满足 $\vec{a} // \vec{b}$ 。(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 求 S_{30} ; (3) 设 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

解: (1) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow a_n = \cos \frac{2n\pi}{3}$

(2) 数列 $\{a_n\}: -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \dots$ 周期为 3 的周期数列 $S_{30} = 0$

(3) $b_n = na_n = n \cos \frac{2n\pi}{3}, (k \in N^*)$

当 $n = 3k$ 时, $b_{3k-2} + b_{3k-1} + b_{3k} = (3k-2)\left(-\frac{1}{2}\right) + (3k-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + (3k) \cdot 1 = \frac{3}{2}$

$\therefore T_n = T_{3k} = \frac{3}{2}k = \frac{n}{2}$

当 $n = 3k-1$ 时 $\therefore T_n = T_{3k-1} = T_{3k} - b_{3k} = \frac{3}{2}k - 3k \times 1 = \frac{3}{2} \times \frac{n+1}{3} - 3 \times \frac{n+1}{3} = -\frac{n+1}{2}$

当 $n = 3k-2$ 时 $\therefore T_n = T_{3k-2} = T_{3k} - b_{3k} - b_{3k-1} = \frac{3}{2}k - 3k \times 1 - (3k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{2} \times \frac{n+2}{3} - 3 \times \frac{n+2}{3} + \frac{1}{2}(n+1) = -\frac{1}{2}$

故 $T_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & n = 3k, k \in N^* \\ -\frac{n+1}{2} & n = 3k-1, k \in N^* \\ -\frac{1}{2} & n = 3k-2, k \in N^* \end{cases}$

20、已知点 $(1, \frac{1}{3})$ 是函数 $f(x) = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图象上一点, 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n) - c$, 数列 $\{b_n\} (b_n > 0)$ 的首项为 c , 且前 n 项和 S_n 满足:

$S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n+1}} \quad (n \geq 2)$.

(1) $a_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n, b_n = 2n-1$

(2) $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} \right)$

$T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) > \frac{1000}{2009} \Rightarrow n > 111.11 \Rightarrow (n)_{\min} = 112$

16 暑期总结复习

一、填空题

1. -4, 4 2. 48 3. 2018. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \begin{cases} 1 & 0 < q \leq 1 \\ q & q > 1 \end{cases}$

$$6. 2^{5k} + 2^{5k+1} + 2^{5k+2} + 2^{5k+3} + 2^{5k+4} \quad 7. \frac{3\pi}{4} \quad 8. \begin{vmatrix} a & d & g \\ c & f & k \\ b & e & h \end{vmatrix} \quad 9. k = \pm\sqrt{2}, \quad \vec{b}_0 = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$10. 85 \quad 11. 8\sqrt{2}$$

二、选择题

$$12. (C)$$

$$13. (A)$$

$$14. (C)$$

$$15. (C)$$

三、解答题

$$16. \text{解: } D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-7), \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda-5.$$

$$\lambda \neq 7 \text{ 时, 方程组有唯一解: } \begin{cases} x = \frac{-3}{\lambda-7} \\ y = \frac{2\lambda-5}{\lambda-7} \end{cases} \quad \lambda=7 \text{ 时, 方程组有无解:}$$

$$17. \text{解: (1) } a_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{2}{9}, \quad a_3 = \frac{2}{15}, \quad a_4 = \frac{2}{21}, \quad (2) \text{ 猜测 } a_n = \frac{2}{6n-3} (n \in N^*),$$

$$(3) \text{ 设 } S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}(3+9+15+21+\cdots+(6n-3)) = \frac{3}{2}n^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{S_n} = \frac{2}{3}$$

$$18. \text{解: (1) } \theta = \frac{\pi}{4}; \quad (2) |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\sin\theta+1)^2 + (1-\cos\theta)^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|_{\max} = \sqrt{5}$$

$$19. \text{解: (1) } S_{\triangle OP_1P_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2) \text{ 实数 } a=1, b=-\sqrt{3};$$

$$(3) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \sqrt{3}y_n \\ y_{n+1} = \sqrt{3}x_n + y_n \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{OP_{n+1}}| = 2|\overrightarrow{OP_n}|$$

$$a_n = \frac{|\overrightarrow{OP_{n+1}}| \cdot |\overrightarrow{OP_n}|}{|\overrightarrow{OP_n}|^2} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |\overrightarrow{OP_n}|, \quad a_1=1, \quad a_n=2^{n-1} \Rightarrow S_n=2^n-1$$

$$20. \text{解: (1) } a_n = (2n-1)t (n \in N^*). \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{S_n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{t}}{(2n-1)t} = \frac{\sqrt{t}}{t} < t \Rightarrow 1 < t.$$

$$21. \text{在直角坐标平面内, } \vec{i}, \vec{j} \text{ 分别是与 } x \text{ 轴、} y \text{ 轴正方向同向的单位向量, } \overrightarrow{OB_1} = a \cdot \vec{i} + 2\vec{j} \quad (a \in R),$$

$$\text{对任意正整数 } n, \quad \overrightarrow{B_n B_{n+1}} = 51 \cdot \vec{i} + 3 \cdot 2^{n-1} \vec{j}.$$

$$(1) \text{ 若实数 } a = -39, \text{ 求 } |\overrightarrow{OB_2}|;$$

$$(2) \text{ 设 } \overrightarrow{OB_n} = x_n \cdot \vec{i} + y_n \cdot \vec{j}, \text{ 试写出 } x_n \text{ 和 } y_n \text{ 的表达式;}$$

$$(3) \text{ 在 (2) 的基础上, 求最大整数 } a \text{ 的值, 使得对任意正整数 } n, \text{ 都有 } x_n < y_n \text{ 成立.}$$

解: (1) 若实数 $a = -39$, 求 $|\overrightarrow{OB_2}| = 13$

$$(2) \text{ 设 } \overrightarrow{OB_n} = x_n \cdot \vec{i} + y_n \cdot \vec{j} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2B_3} + \cdots + \overrightarrow{B_{n-1}B_n}$$

$$x_n = a + 51(n-1), \quad y_n = 2 + 3 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + 3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{n-1} - 1$$

$$(3) \quad x_n < y_n \Leftrightarrow a + 51(n-1) < 3 \times 2^{n-1} - 1 \Leftrightarrow a - 50 < 3 \times 2^{n-1} - 51n = a_n$$

$$\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow 2^n \geq 17 \Leftrightarrow n \geq 5 \\ a_n \leq a_{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} \leq 17 \Leftrightarrow n \leq 5 \end{cases} \quad a_{\min} = -110$$

$$\therefore n = 5 \text{ 时, } (a_n)_{\min} = -159 \Rightarrow a - 50 < -159 \Rightarrow a < -109$$