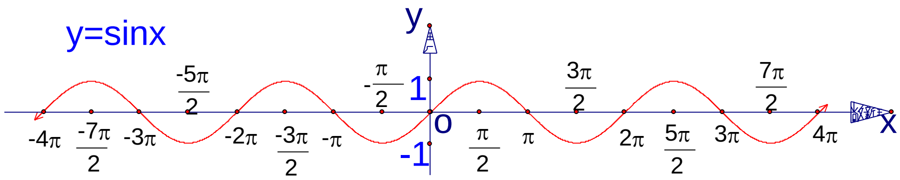
高一数学　精编教案

目　录

第 1 讲 正余弦函数的图像与性质

一、知识梳理

1、y=sinx 图像及性质



定义域：R

值域：$[-1,1]$

最小正周期：$T=2\pi$；

奇偶性：奇函数；

单调递增区间：$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right],k\in z$；

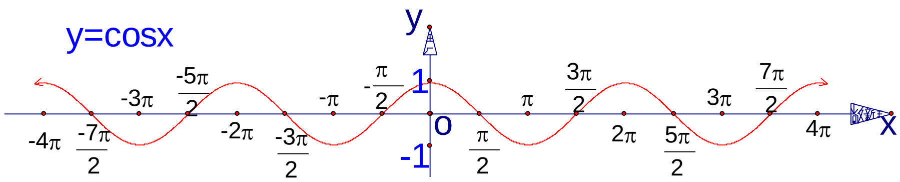
单调递减区间：$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right],k\in z$；

对称中心：（$k\pi,0$）；

对称轴：$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

最值：$x=2k\pi+\frac{\pi}{2},y_{\max}=1$；$x=2k\pi+\frac{3\pi}{2},y_{\min}=-1$

2、y =cosx 的图像及性质



定义域：R

值域：$[-1,1]$

最小正周期：$T=2\pi$；

奇偶性：偶函数；

单调递增区间：$[2k\pi-\pi,2k\pi]$；

单调递减区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi],k\in z$；

对称中心：（$k\pi+\frac{\pi}{2},0$）；

对称轴：$x=k\pi$

最值：$x=2k\pi,y_{\max}=1$；$x=2k\pi+\pi,y_{\min}=-1$

二、典型例题

A 组：

1.（1）用五点法画出 $y=\sin x-1\left(x\in\left[0,2\pi\right]\right)$ 的大致图像.

（2）用五点法画出 $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})\left(x\in R\right)$ 某一个周期内的图像;

2. 求下列函数的最大值和最小值，并求出取最大值和最小值时 x 的集合。

（1）$y=3\sin x$　　（2）$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

（3）$y=\dfrac{1}{3}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　（4）$y=2-3\cos x$

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{1+2\cos x}$　　（2）$y=\sqrt{2\sin x-1}$

4. 判断下列函数的奇偶性

（1）$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$　　（2）$y=\sin x+3\cos x$

B 组

5. 如果$\cos x=\dfrac{m^2+4}{4m}$有意义，则m的取值范围是________

6. 函数$y=\sqrt{\sin x-\sqrt{3}\cos x}$的定义域是________.

7. 求函数$y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$的值域

8. 函数$y=\sin^2 x+2\cos x$的值域是_________________.

9.求函数的定义域： $y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$.

10、若$\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0$恒成立，则实数$m$的取值范围是____________.

11. 求$y=1$与$y=\cos x\left(0\le x<2\pi\right)$所围成的一个封闭的平面图形的面积。

第 2 讲 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质

一、知识梳理

1、振幅变换:y=Asinx，x∈R(A>0 且 A≠1)的图象可以看作把正数曲线上的所有点的纵坐标伸长(A>1)或缩短(0<A<1)到原来的 A 倍得到的.它的值域[-A, A]　　最大值是 A, 最小值是-A．若 A<0 可先作 y=-Asinx 的图象 ，再以 x 轴为对称轴翻折. A 称为振幅.

2、周期变换:函数 y=sinωx, x∈R (ω>0 且 ω≠1)的图象，可看作把正弦曲线上所有点的横坐标缩短(ω>1)或伸长(0<ω<1)到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变）. 若 ω<0 则可用诱导公式将符号“提出”再作图. ω 决定了函数的周期.

3、相位变换: 函数 $y=\sin(x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$(其中 $\varphi\neq0$)的图象，可以看作把正弦曲线上所有点向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时＝平行移动｜φ｜个单位长度而得到. (用平移法注意讲清方向：“加左”“减右”)

4、上下平移变：函数 $y=\sin x+k(k\neq0)$ 的图像可看做是把函数 $y=\sin x$ 的图像上的所有的点向上（$k>0$）或向下（$k<0$）平移 $|k|$ 个单位而得到。

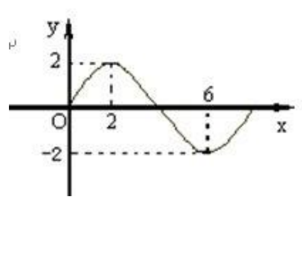
二、典型例题

A 组：

1.用“五点法”画函数 $y=5\sin(3x-\frac{\pi}{4})$ 的图像。

2.根据题 1 中 $y=5\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像写出 $y=5\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的对称轴、对称中心。

3．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图像如右图所示，则 $f(x)=$__________.

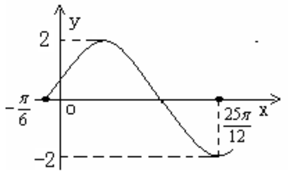


4. 函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像经过怎样的平移后可得 $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，沿 x 轴向_______平移_______个单位可得到。

5. 函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{4})$ 的图像的相邻两对称中心的距离是_______________

6. 函数 $y=3\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的图像是轴对称图形，它在 $[0,\pi)$ 中的对称轴是_________.

B 组：



7. 右图为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$， $x\in R$ 图像的一部分，则函数解析式应为____________.

8. 关于 x 的方程 $\sin x+\cos x=k$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有两个不同的实数解, 则实数 k 的范围是___.

9. 若直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的图像分别交于 M、N 两点，则 $|MN|$ 的最大值是_____________.

10. 把函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到的图象所表示的函数是_______________.

11. 若函数 $f(x)=\cos(x+\theta)(\theta\in\mathrm{R})$ 是偶函数, 则 $\theta=$_________________.

12. 设 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$，其图像最高点为 $D(2,\sqrt{2})$，最高点运动到相邻最低点时, 曲线经过点 $E(6,0)$，求 $f(x)$ 的解析式.

C 组：

13. 已知函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图象关于 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称，求 a 的值.

14. 要得到 $y=\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$ 的图像, 只需将 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的图像　　(　　　　)

A. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位　　　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位.

15. 已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 和 $g(x)=2\cos(2x+\varphi)+1$ 的图象的对称轴完全相同．若 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $f(x)$ 的取值范围是_________.

第 3 讲 正切函数的图像与性质

一、知识梳理

正切函数的性质：

1．定义域：$\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in z\right\}$，

2．值域：R

3．观察：当 x 从小于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k \in z)$，$x \longrightarrow k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x \longrightarrow \infty$

当 x 从大于 $\frac{\pi}{2}+k\pi(k \in z)$，$x \longrightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$\tan x \longrightarrow -\infty$.

4．周期性：$T=\pi$

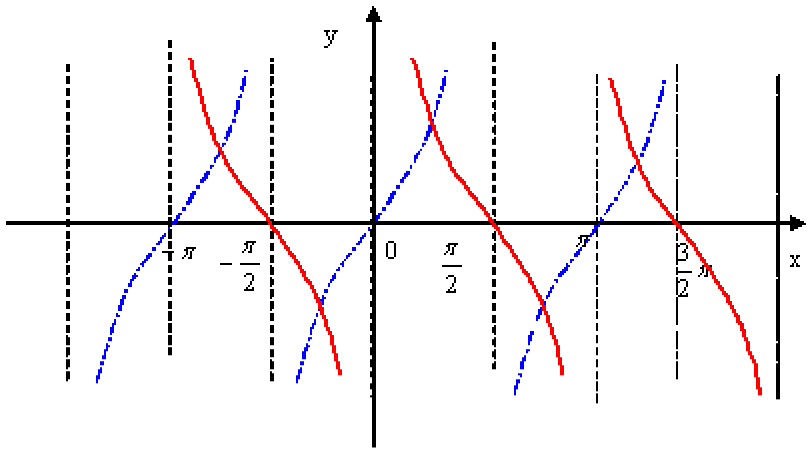
5．奇偶性：$\tan(-x)=-\tan x$ 奇函数.

6．单调性：在开区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right) k \in z$ 内，函数单调递增.

余切函数 y=cotx 的图象及其性质（要求学生了解）：

$y=\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$——即将 $y=\tan x$ 的图象，向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，

再以 x 轴为对称轴上下翻折，即得 $y=\cot x$ 的图象.



1．定义域：$x \in R 且 x \neq k\pi, k \in z$

2．值域：R，

3．当 $x \in \left(k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}\right) k \in z$ 时 $y>0$，当 $x \in \left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi\right) k \in z$ 时 $y<0$

4．周期：$T=\pi$

5．奇偶性：奇函数

6．单调性：在区间$\left(k\pi,(k+1)\pi\right)$上函数单调递减.

二、典型例题

A 组

1. 正切函数在其定义域上有最值吗?

2. 函数 y＝tan（ax＋$\frac{\pi}{6}$）（a≠0）的最小正周期为____________

3. 以下函数中，不是奇函数的是(　　)

A y＝sin$x$＋tan$x$　B y＝$x$tan$x$－1　C y＝$\frac{\sin x-\tan x}{1+\cos x}$　D y＝lg$\frac{-\tan x}{1+\tan x}$

4. 在下列函数中，同时满足的是(　　)

①在(0，$\frac{\pi}{2}$)上递增；②以 2π 为周期；③是奇函数

A　y＝tan$x$　　B　y＝cos$x$　　C　y＝tan$\frac{1}{2}x$　　D　y＝－tan$x$

5. 下列命题中正确的是(　　)

A．y＝cos$x$ 在第二象限是减函数　　B．y＝tan$x$ 在定义域内是增函数

C．y＝｜cos（2x＋$\frac{\pi}{3}$）｜的周期是$\frac{\pi}{2}$　D．y＝sin｜x｜是周期为 2π 的偶函数

6. 函数 y＝tan(2x＋$\frac{\pi}{4}$)的图象被平行直线________隔开，与 x 轴交点的坐标是_________与 y 轴交点的坐标是______，周期是_______，定义域的集合是_______，值域的集合是__，它是______函数.

B 组

7. 作出函数 y＝｜tan$x$｜的图象，并观察函数的最小正周期和单调区间

8. 作出函数 y＝$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$的图象，并观察函数的周期

9. 函数 $y=\sin x+\tan x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$ 的值域为_________

10. 函数 $y=\cot x-\tan x$ 的周期为_____

11. 函数 $y=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ 的周期为_____

12. 函数 $y=\sqrt{-\sin x}+\sqrt{\tan x}$ 的定义域是(　　)

A $(2k+1)\pi\le x\le(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$　　B $(2k+1)\pi<x<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$

C $(2k+1)\pi\le x<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$　　D $(2k+1)\pi<x<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

13. 已知 $y=\tan^2 x-2\tan x+3$，求它的最小值

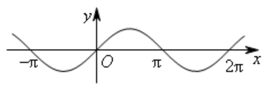
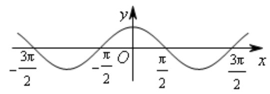
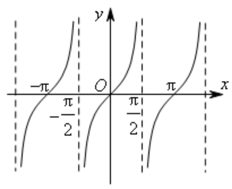
14. 求适合下列条件的 α 的集合：

（1）$\cot(\alpha+\frac{5\pi}{2})=\sqrt{3},\alpha\in(0,2\pi)$；

（2）$\cot(\alpha+\frac{5\pi}{2})\le\sqrt{3},\alpha\in(0,2\pi)$

第 4 讲 三角函数图像综合运用

一、知识梳理

		$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图像				
定义域		$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left\{x\left\lvert\, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$
值域		$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
最值及相应的 x		当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\max}=1$；	当 $x=2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\max}=1$；	既无最大值，也无最小值；
		当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\min}=-1$；	当 $x=2k\pi+\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\min}=-1$；	
奇偶性		奇函数	偶函数	奇函数
单调性 递增区间		$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）	$[2k\pi-\pi,2k\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$）	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）
单调性 递减区间		$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）	$[2k\pi,2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$）	无
周期性		最小正周期为 2π	最小正周期为 2π	最小正周期为 π
对称轴		$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$	$x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$	无
对称中心		$(k\pi,0)$（$k\in\mathbf{Z}$）	$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）	$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）

二、典型例题：

1、求下列函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{1}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1}$；　　（2） $y=\sqrt{-\sin x}+\sqrt{\tan x}$；

（3） $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$；　　（4） $y=\lg(2\cos x-\sqrt{3})$；

（5） $y=\dfrac{1}{\tan x-1}$；

2、求下列函数的值域：

（1） $y=\dfrac{3\sin x+1}{3\sin x+2}$；　　（2） $y=\dfrac{3\sin x+1}{\cos x+2}$；

（3） $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$，$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$；　　（4） $y=\cos x-\sin^2 x-\cos 2x+\dfrac{7}{4}$；

（5） $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$；　　（6） $y=x+\sqrt{4-x^2}$；

3、方程$\lg x=\sin x$的实数解的个数为______个；

4、已知函数$f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1$，

（1）求函数$f(x)$的最值以及相应的x的值组成的集合；

（2）求函数$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$上的值域。

5、设函数$f(x)=2a\sin^2 x-2\sqrt{3}a\sin x\cos x+a+b$（$a<b$）的定义域为$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，

值域为$[-5,1]$，求常数a、b的值。

6、判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=\sin\left(3x-\frac{5}{2}\pi\right)$；

（2）$y=|\sin x|$；

（3）$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$；

（4）$y=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$；

7、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega\neq 0$）是奇函数的充要条件是______________；

8、求下列函数的最小正周期：

（1） $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$；

（2）$y=2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-3$；

（3）$y=\dfrac{\cos 3x+\sin 3x}{\cos 3x-\sin 3x}$；

（4）$y=\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}$；

9、（1）函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)$ 的增区间为_______________；

（2）函数 $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的增区间为________________；

（3）函数 $y=2\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x$，$x\in[0,\pi]$ 的增区间为________________。

10、若 $f(x)=2\sin(\omega x)$（$\omega>0$）在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，则 ω 的取值范围是______；

11、给出以下命题：①正切函数 $y=\tan x$ 在其定义域上单调递增；②正弦函数 $y=\sin x$ 在第一象限单调递增；③函数 $y=\sin|x|$ 不是周期函数；④函数 $y=\cos|x|$ 不是周期函数；⑤函数 $y=|\sin x|$ 的最小正周期为 π；⑥函数 $y=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|$ 的最小正周期为 π；⑦函数 $y=|\tan x|$ 的最小正周期为 π。其中真命题的序号为______。

12、（1）函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的图像的对称轴为________，对称中心为________；

（2）若函数 $f(x)=\sin 2x+m\cos 2x$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称，则实数 $m=$______；

13、设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$（$-\pi<\varphi<0$）的图像的一条对称轴是 $x=\frac{\pi}{8}$，

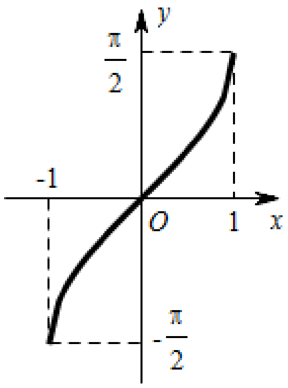
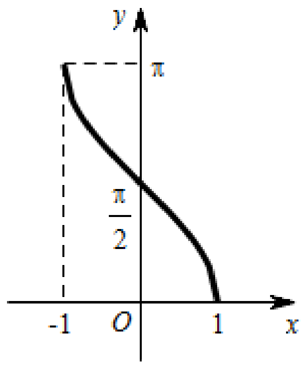
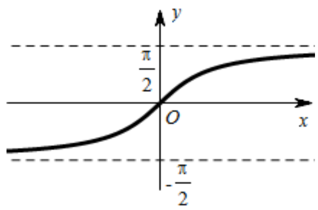
（1）求 φ 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（3）求函数 $f(x)$ 的最值，以及此时 x 的值组成的集合。

第 5 讲 反三角函数

一、知识梳理

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$
图像			
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	增函数	减函数	增函数
恒等式	$\sin(\arcsin x)=x$， $x\in[-1,1]$； $\arcsin(\sin x)=x$， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$； $\arcsin(-x)=-\arcsin x$ ，$x\in[-1,1]$；	$\cos(\arccos x)=x$， $x\in[-1,1]$； $\arccos(\cos x)=x$， $x\in[0,\pi]$； $\arccos(-x)$ $=\pi-\arccos x$， $x\in[-1,1]$；	$\tan(\arctan x)=x$， $x\in$ $\mathbf{R}$； $\arctan(\tan x)=x$， $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$； $\arctan(-x)=-\arctan x$ ， $x\in\mathbf{R}$。

一、反正弦函数：

函数 $y=\sin x$， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数叫做反正弦函数，

记作 $y=\arcsin x$， $x\in[-1,1]$。

【注】 1、反正弦函数 $y=\arcsin x$ 不是正弦函数 $y=\sin x$ （ $x\in\mathbf{R}$）的反函数；

2、$\arcsin x$ 表示一个角（弧度制），这个角的正弦值为 x。

二、反余弦函数：函数 $y=\cos x$， $x\in[0,\pi]$ 的反函数叫做反余弦函数，

记作 $y=\arccos x$， $x\in[-1,1]$。

三、反正切函数：函数 $y=\tan x$， $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数叫做反正切函数，

记作 $y=\arctan x$， $x\in\mathbf{R}$。

二、典型例题

1、已知 $\sin x=\frac{1}{3}$， $x\in[0,\pi]$，则 x = ________________；

变式练习：

（1）已知 $\cos x=\frac{1}{3}$， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 x = ________________；

（2）已知 $\cos x=-\frac{1}{3}$， $x\in[0,\pi]$，则 x = ________________；

（3）将函数 $f(x)=5\sin 2x-12\cos 2x$ 化为 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$， $\omega>0$， $0\le\varphi<2\pi$ ）的形式，则 φ 可用反正切函数值表示为 $\varphi=$ _________。

2、求函数 $y=\sin x$， $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数。

变式练习：求函数 $y=\cos x$， $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数。

3、（1）求函数 $y=\lg(1-4x^2)+\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$ 的定义域；

（2） 求函数 $y=\arcsin(1-x)+\arccos 2x$ 的值域；

变式练习：函数 $y=(\arccos x)^2-5\arccos x$，$x\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$ 的值域为______。

4、求值：$\sin\left(2\arcsin\dfrac{1}{3}+\arccos\dfrac{1}{5}\right)$。

变式练习：$\sin\left(\arcsin\dfrac{8}{17}-\arccos\dfrac{4}{5}\right)=$ _____ 。

三、巩固练习

1、函数 $y=\arcsin\left(x-2\right)$ 的定义域为__________________，值域为_____________.

2、函数 $y=\arccos x-\dfrac{\pi}{2}$，$x\in\left[-1,1\right]$ 的奇偶性为________________.

3、若 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos\left(x+\alpha\right)=1$ 的解，其中 $\alpha\in\left(0,2\pi\right)$，则 $\alpha=$_____________.

4、若 $t=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$，则 $\arccos t$ 的取值范围是_________________.

5、函数 $y=3\arccos\dfrac{1-2x}{4}$ 的反函数的最大值是____________，最小值是__________.

第 6 讲　最简三角方程

最简三角方程的解集，见下表：

方程		方程的解集
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert > 1$	
	$\lvert a\rvert = 1$	
	$\lvert a\rvert < 1$	
$\cos x = a$	$\lvert a\rvert > 1$	
	$\lvert a\rvert = 1$	
	$\lvert a\rvert < 1$	
$\tan x = a$		

例 1 求下列方程的解集.

（1） $2\cos x = \sqrt{2}$；　（2） $5\sin x + \sqrt{3} = 0$　（3） $3\tan^2 x - 1 = 0$

（4） $2\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$　（5） $\sin x - \cos x = 1$

例 2 解方程

（1） $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$　（2） $\sin^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$　（3） $\sin 5x = \sin x$.

（4） $\sin x - \cos x + \sin 2x = 1$

例 3（1）关于 x 的方程 $2\cos x-1=k(2\cos x+1)$ 有实数解,求 k 的取值范围 .

（2）若方程 $\cos 2x-2\sin x+m-1=0$ 存在实数解，求 m 的取值范围 .

（3）已知关于 x 的方程 $\sin 2x+a(\sin x+\cos x)+2=0$ 有实数根，求实数 a 的取值范围.

例 4 已知 α 、β 是方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=m$ 在 $(0,2\pi)$ 上的两相异实根，试求:
（1） m 的取值范围；（2） $\alpha+\beta$ 的值。

例 5 方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x-m=0$ （1）若方程有解，求实数 m 的值；

（2）讨论方程在区间 $[0,2\pi]$ 上解的个数；

（3）当 $x\in[0,\pi]$ 时，方程有两个不同的解 α、β，求实数 m 的范围。

思考： $\alpha+\beta$ 的值？

作业与练习

【A 组】

1.用反三角函数表示下列各式中的 x： $\cos x=-\dfrac{1}{3}, x\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$。

2.求方程 $3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ 的解集

3.已知 $2\sin\left(5x-15°\right)-\sqrt{3}=0$，求符合条件的锐角 x 。

【B 组】

1、 $2\sin x=1, x\in\left[-\pi,\pi\right]$的解集是__________ .

2、 $2\sin^2 x-5\cos x-4=0$ 的解集是__________ .

3. $\sin 2x=\sin 5x$ 的解集是 ______________________

4. $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=1, x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right]$的解集是____________

5、k 取怎样的整数时，方程 $(k+1)\sin^2 x-4\cos x+3k-5=0$ 有实数解？求出此时的解 .

6、已知定义在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称，当 $x\geq\dfrac{\pi}{4}$ 时，函数 $f(x)=\sin x$，（1）求 $f(-\dfrac{\pi}{2}), f(-\dfrac{\pi}{4})$ 的值； （2）求 $y=f(x)$ 的函数表达式； （3）如果关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有解，那么将方程取 a 的某一确定值时所得的所有解的和记为 M_a，求 M_a 的所有可能的值及相应的 a 的取值范围 .

7、$\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$ 的解集是________________

8、方程 $|\sin x|+|\cos x|=\sqrt{2}$ 的解集为________________________ .

【C 组】

1、已知方程 $\cos^2 x-|\sin x|+1=0$ 在 $(-\pi,\pi)$ 中的所有解为_____________ .

2、若方程 $\cos 2x-4\sin x+a-1=0$ 有实数解，求实数 a 的取值范围。

3、若关于 x 的方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=m$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个相异实根，求实数 m 的取值范围 .

4.已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$,其中常数 $\omega>0$;

(1)若 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增,求 ω 的取值范围;

(2)令 $\omega=2$,将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位,再向上平移 1 个单位,得到函数 $y=g(x)$ 的图像,区间 $[a,b]$($a,b\in R$ 且 $a<b$)满足: $y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少含有 30 个零点,在所有满足上述条件的 $[a,b]$ 中,求 $b-a$ 的最小值.

5.设常数 $a\in R$ ，函数 $f(x)=a\sin 2x+2\cos^2 x$.

(1)若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值;

(2)若 $f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}+1$，求方程 $f(x)=1-\sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的解 .

第 8 讲 三角比的综合运用（1）——三角恒等式

一、填空

1．终边与第三象限的角平分线重合的角的集合是______________

2．已知角α的顶点为坐标原点，始边为x轴正半轴，终边过点$P(-1,3)$，则$\cos 2\alpha$的值为_______________．

3．已知扇形的周长为 20cm,则扇形最大面积为_________cm^2

4. 已知$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)=$__________.

5．若$\theta\in[\dfrac{5}{4}\pi,\dfrac{3}{2}\pi]$，则$\sqrt{1-\sin 2\theta}-\sqrt{1+\sin 2\theta}$可化简为___________.

6．已知$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{5}$，则$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$的值为____________.

7．若锐角α,β满足$(1+\sqrt{3}\tan\alpha)(1+\sqrt{3}\tan\beta)=4$，则$\alpha+\beta=$________ .

8． 已知$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=\dfrac{1}{4-m},a\in R$，则$m$的取值范围是_____________

9.若$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则$\sin x\cos x+\sin x+\cos x$的最大值是_____________.

10.若角α的终边落在直线$x+y=0$上，则$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=$____________.

11.若$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0,\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则$\cos(\alpha-\beta)$的值是____________.

12．已知$x+y=1(x>0,y>0)$，求$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}$的最小值。请仔细阅读下列解法，并在填空处回答指定问题：解：$\because x+y=1(x>0,y>0),\therefore$ 令 $x=\cos^2\theta,y=\sin^2\theta$ （其中（1）____________，

（2）____________），则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{2}{\sin^2\theta}=\tan^2\theta+2\cot^2\theta+3\geq 2\sqrt{2}+3$，此时，当（3）________________________时，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}$取得最小值$2\sqrt{2}+3$。

注意：请在（1）处填入运用了什么数学方法，（2）处填入θ的一个取值范围，（3）处填x, y的取值。

二、选择

13. 已知点$P\left(\tan\alpha, \cos\alpha\right)$在第三象限，则角$\alpha$的终边在（　）

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

14. $\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$可以化简为(　)

A．$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$　B．$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$　C．$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$　D．$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

15. 已知$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(0，\frac{\pi}{4}\right)$，则$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=$（　）

A．$\frac{-3}{5}$　B．$\frac{3}{5}$　C．$-\frac{6}{5}$　D．$\frac{6}{5}$

16. 在ΔABC中，若$\cos A\cos B>\sin A\sin B$，则$\Delta ABC$的形状为（　）

A．锐角三角形　B．直角三角形　C．钝角三角形　D．等比三角形

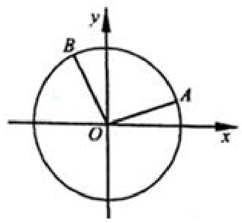
三、简答

17.已知关于x的方程$2x^2-\left(\sqrt{3}+1\right)x+m=0$的两根为$\sin\theta$和$\cos\theta$，且$\theta\in\left(0,2\pi\right)$.求:

（1）$\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$的值（2）$m$的值；（3）方程的两根及此时$\theta$的值

18. 如图，在平面直角坐标系xOy中，以x轴正半轴为始边的锐角α和钝角β的终边分别与单位圆交于点A, B，若点A的横坐标是$\frac{3\sqrt{10}}{10}$，点B的纵坐标是$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求$\cos(\alpha-\beta)$的值；（2）求$\alpha+\beta$的值.



19．已知$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}, x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.

(1)求$\sin x$的值;

(2)求$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

20.已知锐角△ABC中，sin（$A+B$）$=\frac{3}{5}$，sin（$A-B$）$=\frac{1}{5}$。

（1）求证：$\tan A=2\tan B$;

（2）设$AB=3$，求AB边上的高。

21.若$\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0$对$\theta\in$R 恒成立，求实数 m 的取值范围。

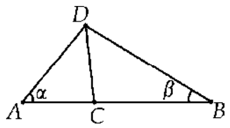
第 9 讲 三角比综合运用（2）——解斜三角形

例 1 在ΔABC中，$a=7$，$b=8$，$\cos B=-\dfrac{1}{7}$．(1)求$\angle A$；(2)求AC边上的高．

例 2 如图，某公司要在A、B两地连线上的定点C处建造广告牌CD，其中D为顶端，AC长35米，CB长80米．设点A、B在同一水平面上，从A和B看D的仰角分别为α和β．

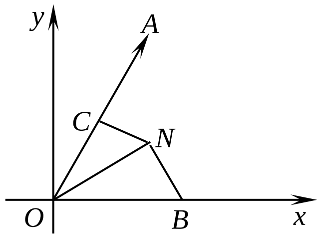
(1) 设计中CD是铅垂方向．若要求$\alpha\geq 2\beta$，问CD的长至多为多少(结果精确到0.01米)？

(2) 施工完成后，CD与铅垂方向有偏差．现在实测得$\alpha=38.12°$，$\beta=18.45°$，求CD的长（结果精确到0.01米）．



例 3 设ΔABC的内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边长分别为a、b、c，且$a^2+b^2-c^2=2ab\sin 2C$，求角C的值。

例 4 如图，一客轮从 O 地出发，沿北偏东 30° 的 OA 方向航行，一小时后发现一乘客发病并立即发出求救信号。在距离 O 地 $40\sqrt{3}\,km$，北偏东 60° 的小岛 N 上有一医生。现出动离 O 地正东方向 $80\,km$ 的 B 处一艘快艇赶往 N 处载上医生全速追赶客轮。已知快艇的速度为 $40\,km/h$，客轮的速度为 $\dfrac{40}{3}\,km/h$。从发现乘客发病到快艇追上客轮，最少经过几个小时？



例 5．已知 A、B、C 是 ΔABC 的三个内角， $y=\cot A+\dfrac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)}$。

（1）若 ΔABC 是正三角形，求 y 的值；

（2）若任意交换 ΔABC 中两个角的位置， y 的值是否变化？证明你的结论；

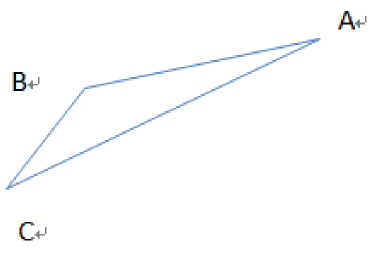
（3）若 ΔABC 中有一内角为 45°，求 y 的最小值。

例 6 如图，游客从某旅游景区景点 A 处下山至 C 处有两种路径：一种是从 A 沿直线步行至 C；另一种是先从 A 沿索道乘缆车到 B，然后从 B 沿直线步行到 C。现有甲，乙两位游客从 A 处下山，甲沿 AC 匀速步行，速度为 50m/min.在甲出发 2min 后，乙从 A 乘缆车到 B，在 B 处停留 1min 后，，再匀速步行到 C.假设缆车匀速直线运动的速度为 130m/min，山路 AC 的长为 1260m，经测量 $\cos A=\frac{12}{13}$,$\cos C = \frac{3}{5}$.

(1) 求索道 AB 的长

(2) 问乙出发多少分钟后，乙在缆车上与甲的距离最短？

(3) 为使两位游客在 C 处互相等待的时间不超过 3 分钟，乙步行的速度应控制在什么范围内？



练习：

【A 组】

1. 在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c， $a=2\sqrt{3},B=\dfrac{\pi}{4},c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，则$A=$______；

2. ΔABC中， $\tan A=\dfrac{1}{2},\tan B=\dfrac{1}{3}$，最长边为 1，则最短边长为______；

3. ΔABC中， $\cos B=\dfrac{4}{5}$， $\sin C=\dfrac{5}{13}$，则$\cos A$=_____.

4. ΔABC中，若$a\cdot\cos A=b\cdot\cos B$，则$\Delta ABC$的形状是______

5. 在ΔABC中， 已知$S_{\Delta ABC}=15,\ ab=60,\ \sin A=\cos B$， 求$A,B$的大小.

【B 组】

6. 在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c，

若$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)=3\sin A\sin B$，则$C$=______；

7. 在A为顶角的等腰ΔABC中，

① 已知$\sin A=\dfrac{3}{5}$，则$\cos B$=_______ ； ② 已知$\sin B=\dfrac{3}{5}$，则$\sin A$=_____；

8. 已知在ΔABC中，三角形三边长之比为$\sqrt{7}:2:1$，求最大的内角.

9. ΔABC中，已知$a=\sqrt{17}$， $b=\sqrt{13}$， $S_{\Delta ABC}=5$，则$\angle C$= ______

10. ΔABC中，已知$a=3,c=3\sqrt{3},\angle A=30^\circ$，则$b$=______；

11. $\triangle ABC$中，角ABC的对边分别为a、b、c, 若$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$, 则角$B$=___；

12. 某人要制作一个三角形，要求它的三条高的长度分别为$\dfrac{1}{13},\dfrac{1}{11},\dfrac{1}{5}$，则此人能（ ）

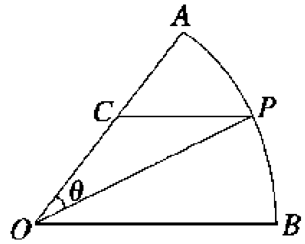
（A）不能作出这样的三角形　　（B）作出一个锐角三角形

（C）作出一个直角三角形　　（D）作出一个钝角三角形

13. 已知$\triangle ABC$中， $A>B>C,A=2C,b=4,a^2-c^2=\dfrac{64}{5}$，求$a$、$c$的值。

14. 三角形的两边之和为 6， 这两边的夹角为120°， 则这个三角形的面积 S 的最大值为______；

15. ΔABC中，三边a、b、c成等差数列，求b边所对角B的取值范围。



16. 在ΔABC中，求证：A＞B 则$sin A > sin B$成立；

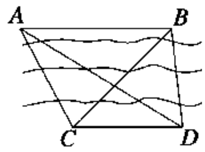
17. 如图所示，扇形 AOB，圆心角 AOB 等于 60°，半径为 2，在弧 AB 上有一动点 P，过 P 引平行于 OB 的直线和 OA 交于点 C，设∠AOP=θ，求△POC 面积的最大值及此时θ的值.

18. 设 A、B、C 为ΔABC的三内角，且方程$(\sin A - \sin B)x^2 + (\sin C - \sin A)x + \sin B - \sin C = 0$ 有两个相等的实数根，求B的取值范围。

19. 下列判断中不正确的结论的序号是________.

①ΔABC中，$a = 7, b = 14, A = 30^\circ$,有两解；②$\Delta ABC$中，$a = 30, b = 25, A = 150^\circ$，有一解；③$\Delta ABC$中，$a = 6, b = 9, A = 45^\circ$，有两解；④$\Delta ABC$中，$b = 9, c = 10, B = 60^\circ$，无解

20.要测量对岸 A、B 两点之间的距离，选取相距 $\sqrt{3}$ km 的 C、D 两点，并测得∠ACB=75°，∠BCD=45°，∠ADC=30°，∠ADB=45°，求 A、B 之间的距离.



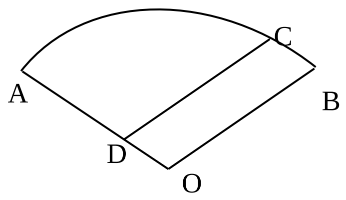
【C 组】

21. 在$\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC边上的高等于$\frac{1}{3}BC$，则$\cos A=$（　　）

A．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

22. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$的平分线交AC于点D，且$BD=1$，则$4a+c$的最小值为_____.

23.如图，某住宅小区的平面图呈圆心角为120°的扇形AOB。小区的两个出入口设置在点A及点C处，且小区里有一条平行于BO的小路CD。已知某人从C沿CD走到D用了 10 分钟，从D沿DA走到A用了 6 分钟。若此人步行的速度为每分钟 50 米，求该扇形的半径OA的长（精确到 1 米）



第 10 讲　三角函数综合复习（2）

【A 组】

1．设θ为第二象限角，若$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$，则$\sin\theta+\cos\theta=$___.

2．函数 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})-2\sqrt{2}\sin^2 x$ 的最小正周期是________________.

3．已知$\alpha\in R,\sin\alpha+2\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，则$\tan 2\alpha=$___________

4．设α为锐角，若$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，则$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)$的值为____.

5．在△ABC 中，角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c，且 a＝1，B＝45°，$S_{\triangle ABC}$＝2，则 b＝________.

【B 组】

6．方程 3sin$x$＝1＋cos2x 在区间[0，2π]上的解为________.

7．已知△ABC 的三边长分别为 3、5、7，则该三角形的外接圆半径等于________.

8．已知$\sin\theta=\dfrac{1-a}{1+a},\cos\theta=\dfrac{3a-1}{1+a}$若$\theta$是第二象限角，求实数$a$的值_______.

9．在△ABC 中，若∠C＝3∠B，则 $\dfrac{c}{b}$ 的取值范围为________.

10. 函数 y＝sin^2x＋2cosx 的定义域为$[-\dfrac{2\pi}{3},\alpha]$，值域为$[-\dfrac{1}{4},2]$，则 α 的取值范围是________.

11．若函数 f(x)＝$sin\dfrac{x+\varphi}{3}$(φ∈[0，2π])是偶函数，则 φ＝________.

12．记$\cos(-80°)=k$，那么$\tan 100°=$　　　　　　　　　　　　　　(　　)

13．若函数 y＝cos2x 与函数 y＝sin(x＋φ)在区间$[0，\dfrac{\pi}{2}]$上的单调性相同，则 φ 的一个值是(　　)

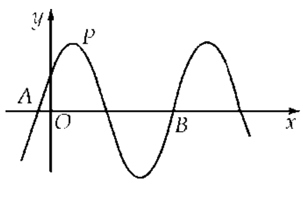
A.$\dfrac{\pi}{6}$　B.$\dfrac{\pi}{4}$　C.$\dfrac{\pi}{3}$　D.$\dfrac{\pi}{2}$

14．设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则“$x\sin^2 x<1$”是“$x\sin x<1$”的　　　（　　）

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　　　D.既不充分也不必要条件

15．函数 y＝sin(πx＋φ)(φ>0)的部分图像如图所示，设 P 是图像的最高点，A、B 是图像与 x 轴的交点，则 tan∠APB 的值是(　　)



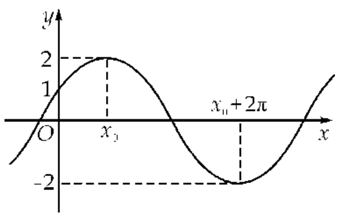
A．2　B．4　C．8　D．不确定

16．已知函数 $f(\mathrm{x})=2\cos 2x+\sin^2 x-4\cos x$ 。

（Ⅰ）求 $f=(\frac{\pi}{3})$ 的值；（Ⅱ）求 $f(\mathrm{x})$ 的最大值和最小值。

17. 在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知 $\sin A+\sin C=p\cdot\sin B(p>0)$，且 $ac=\frac{1}{4}b^2$.(1)当 $p=\frac{5}{4}$，$b=1$ 时，求 a，c 的值；(2)若 B 为锐角，求实数 p 的取值范围．

18．已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ $(A>0，\omega>0，-\frac{\pi}{2}<\phi<0)$的图像与 y 轴的交点为(0，1)，它在 y 轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为$(x_0，2)$和$(x_0+2\pi，-2)$.

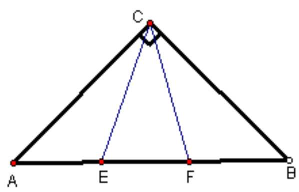


(1)求函数 $f(x)$的解析式；

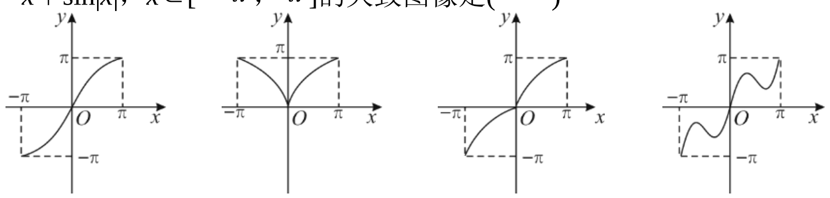
(2)若锐角 θ 满足 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，求 $f(2\theta)$的值．

19．E，F 是等腰直角△ABC 斜边 AB 上的三等分点，则 $\tan\angle ECF=$（　　）

（A）$\frac{16}{27}$　　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$



20．函数 $y=x+\sin|x|$，$x\in[-\pi,\ \pi]$的大致图像是(　　)

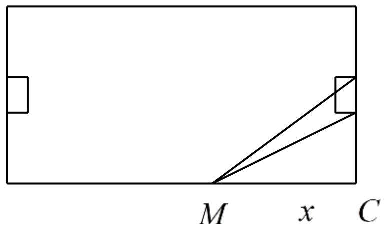


（A）　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

【C 组】

21．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}cos\dfrac{\pi x}{2},-1\le x\le 1\\ x^2-1,|x|>1\end{cases}$，则关于 x 的方程 $f^2(x)-3f(x)+2=0$ 的实根的个数是___

22.设足球场宽 65 米，球门宽 7 米，当足球运动员沿边路带球突破，距底线多远处射球门，对球门所张的角最大？（保留两位小数）



23.设 $a>0$，函数 $f(x)=x+2(1-x)\sin(ax), x\in\left(0,1\right)$，若函数 $y=2x-1$ 与 $y=f(x)$ 的图像有且仅有两个不同的公共点，则 a 的取值范围_______

24.　已知函数 $f\left(x\right)=\left(a+2\cos^2 x\right)\cos\left(2x+\theta\right)$ 为奇函数，且 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，其中

$a\in R,\ \theta\in\left(0,\ \pi\right)$.

（1）　求 $a,\ \theta$ 的值；（2）若 $f\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)=-\dfrac{2}{5},\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

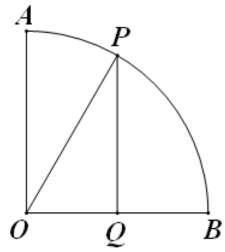
25．已知△ABC 中，三边长 a，b，c 满足 $a^2-a-2b-2c=0$，$a+2b-2c+3=0$，则这个三角形最大角的大小为________.

第 11 讲　三角函数综合复习（2）

1. 函数 $y=2\cos(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图像对称轴为________________对称中心为____________

2. 函数 $y=\left(\sin x+\cos x\right)^2$ 的最小正周期是____________.

3. 如图，扇形 OAB 的半径为 1，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，若 P 为弧 AB 上异于 A,B 的点，且 PQ 交 OB 于点 Q，当 ΔPOQ 的面积大于 $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 时，$\angle POQ$ 的大小范围为________



4. 设函数 $f(x)=\sin\omega x$（$0<\omega<2$），将 $f(x)$ 图像向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 单位后所得函数图像的对称轴与原函数图像的对称轴重合，则 $\omega=$____________.

5. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $\log_a(\sin x-\cos x)=0$，则 $\sin^8 x+\cos^8 x=$________

6. 已知函数 $y=\sin x$ 的定义域是 $\left[a,b\right]$，值域是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，则 $b-a$ 的最大值是__________.

7. 已知函数 $f(x)=\arcsin(2x+1)$，则 $f^{-1}(\frac{\pi}{6})=$________

8. 现将函数 $y=\sec x, x\in(0,\pi)$ 的反函数定义为正反割函数，记为：$y=arc\sec x$．则 $arc\sec(-4)=$_______.（请保留两位小数）

9. 若函数 $f\left(x\right)=sinwxcoswx+\sqrt{3}cos^2wx$ 的图像关于直线 $x=\frac{p}{3}$ 对称，则正数 w 的最小值为_____________.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin 2\left(x+\varphi\right)\left(\varphi>0\right)$ 是偶函数，则 φ 的最小值是______.

11. 函数 $y=|\sin x+\arcsin x|$ 的最大值为________

12. 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})$（$\omega>0$，$A>0$），$x\in[0,2\pi]$，若 $f(x)$ 恰有 4 个零点，则下述结论中：① 若 $f(x_0)\geq f(x)$ 恒成立，则 x_0 的值有且仅有 2 个；② $f(x)$ 在 $[0,\frac{8\pi}{19}]$ 上单调递增；③ 存在 ω 和 x_1，使得 $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_1+\frac{\pi}{2})$ 对任意 $x\in[0,2\pi]$ 恒成立；④ “$A\geq 1$”是“方程 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 在 $[0,2\pi]$ 内恰有五个解”的必要条件；
所有正确结论的编号是_______

二、选择题

1. 将函数 $y=\sin(4x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图像上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，再向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，得到的函数图像的一条对称轴的方程为（　　）

（A） $x=-\dfrac{\pi}{12}$　　(B) $x=\dfrac{\pi}{16}$　　（C） $x=\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $x=\dfrac{\pi}{2}$

2. 将函数 $f(x)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图像向下平移 1 个单位，得到 $g(x)$ 的图像，若 $g(x_1)\cdot g(x_2)=9$，其中 $x_1,x_2\in[0,4\pi]$，则 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的最大值为（　　）

（A） 9　　(B) $\dfrac{37}{5}$　　（C） 3　　(D) 1

3. 下列关于函数 $y=\sin x$ 与 $y=\arcsin x$ 的命题中正确的是（　　）.

（A）它们互为反函数　　(B) 都是增函数

(C) 都是周期函数　　(D) 都是奇函数

4. “$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$”是“$\sin(\arcsin x)=x$”的（　　）条件.

（A）充分非必要.　　（B）必要非充分.　　（C）充要.　　（D）既非充分又非必要.

5. 设函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，若对于任意 $\alpha\in\left[-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{2}\right]$, 在区间 $[0,m]$ 上总存在唯一确定的 β，使得 $f(\alpha)+f(\beta)=0,$ 则 m 的最小值为（　　）

（A） $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　（C） $\dfrac{7\pi}{6}$　　(D) π

6. 对于 ΔABC, 若存在 $\Delta A_1B_1C_1$，满足 $\dfrac{\cos A}{\sin A_1}=\dfrac{\cos B}{\sin B_1}=\dfrac{\cos C}{\cos C_1}=1$，则称 ΔABC 为“V类三角形”.“V类三角形”一定满足（　　）

（A）有一个内角为 $30°$　(B) 有一个内角为 $45°$

（C）有一个内角为 $60°$　(D) 有一个内角为 $75°$

7. 某港口某天 0 时至 24 时的水深 y (米)随时间 x (时)变化曲线近似满足如下函数模型：$y=0.5\sin(\omega\pi x+\dfrac{\pi}{6})+3.24$. 若该港口在该天 0 时至 24 时内，有且只有 3 个时刻水深为 3 米，则该港口该天水最深的时刻不可能为(　　)

（A） 16 时　　(B) 17 时　　（C） 18 时　　(D) 19 时

三、解答题

1. 函数 $f(x)=A\sin(wx+\phi)(w>0,-\pi<\phi<0)$ 在一个周期内的图像经过 $B\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$，$C\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right)$，

$D\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$三点，求函数的表达式.

2. 已知函数 $f(x)=\sin x\cos(\dfrac{\pi}{2}+x)+\sqrt{3}\sin x\cos x$

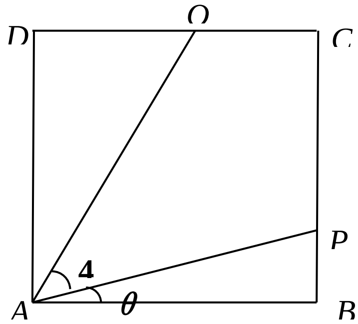
（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及对称中心；

（2）若 $f(x)=\alpha$ 在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上有两个解 x_1,x_2，求α 的取值范围及 x_1+x_2 的值。

3. 如图，某广场有一块边长为$1(hm)$ 的正方形区域 $ABCD$，在点 A 处装有一个可转动的摄像头，其能够捕捉到图像的角 $\angle PAQ$ 始终为 $45°$（其中点 P，Q 分别在边 BC，CD 上）设 $\angle PAB=\theta$，记 $\tan\theta=t$.

（1）用 t 表示的 PQ 长度，并研究△CPQ 的周长 l 是否为定值？

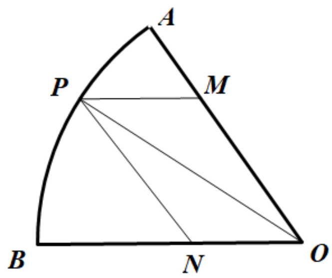
（2）问摄像头能捕捉到正方形 $ABCD$ 内部区域的面积 S 至多为多少 hm^2？



4. 某居民小区为解决业主停车难的问题，拟对小区内一块扇形空地 AOB 进行改建。如图所示，平行四边形 $OMPN$ 区域为停车场，其余部分建成绿地，点 P 在围墙 AB 弧上，点 M 和点 N 分别在道路 OA 与道路 OB 上，且 $OA=60$ 米，$\angle AOB=60^\circ$，设 $\angle POB=\theta$。

（1）求停车场面积 S 关于 θ 的函数关系式，并指出 θ 的取值范围；

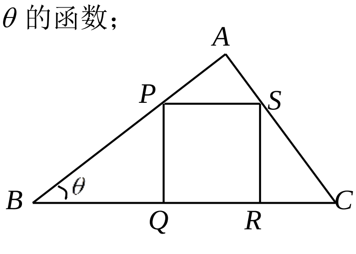
（2）当 θ 为何值时，停车场面积 S 最大，并求出最大值（精确到 0.1 平方米）



5.如图所示，直角 ΔABC 中，$AB=a$（a 为常数），$\angle A=90^\circ$, $\angle ABC=\theta$，$PQRS$ 是其内接正方形，它的一边在斜边 BC 上。

（1）将 ΔABC 的面积 S_1 与正方形 $PQRS$ 的面积 S_2 分别表示为 θ 的函数；

（2）求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最小值及取得最小值时相应的 θ 值。



第 12 讲 数列的概念

[知识概要]

1.数列的概念

(1)按照一定次序排列的一列数叫做数列，它可以看作是定义域在正整数或其子集上的函数值序列；

(2)数列的通项公式与递推公式

数列$\{a_n\}$的第 n 项，也叫做数列的通项，如果数列的通项a_n与项数 n 之间的对应关系可以用一个公式表示，就把这个公式叫做这个数列的通项公式，即$a_n = f(n)$，例如$a_n = 3n-1, n \in N^*$；

如果已知数列$\{a_n\}$的第 1 项(或前 n 项)，且任一项a_n与它的前一项a_{n-1}(或前 n 项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式，例如$\begin{cases} a_1 = 2, n = 1, \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$

(3)数列的前 n 项和：设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，即$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$，如果$S_n$与项数之间的对应关系可以用一个公式表示，就把这个公式叫做这个数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式，显然有$a_n = \begin{cases} S_1, n = 1, \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$.

(4)数列的最大项和最小项

若存在常数$m \in N^*$，使$a_n \geq a_m$对任意$n \in N^*$都成立，那么a_m是数列$\{a_n\}$的最小项；

若存在常数$m \in N^*$，使$a_n \leq a_m$对任意$n \in N^*$都成立，那么a_m是数列$\{a_n\}$的最大项.

(7)周期数列

若对任意$n\in N^*$，存在常数$T\in N^*$，使得$a_{n+T}=a_n$成立，则称数列$\{a_n\}$为周期数列，常数 T 称为数列$\{a_n\}$的周期.

2.数列的分类

(1)按数列的项数分类

有穷数列：一个数列如果只含有有限个项.

无穷数列：一个数列如果任何一项的后面都有跟随者的项.

(2)按数列的单调性分类

单调递增数列：给定数列$\{a_n\}$，如果对于任意$n=1,2,3,\cdots$，恒有$a_n<a_{n+1}$；

单调递减数列：给定数列$\{a_n\}$，如果对于任意$n=1,2,3,\cdots$，恒有$a_n>a_{n+1}$；

常数列：每一项都相等的数列叫做常数列.

3.数列的表示法

(1)图像法：数列可以用一群孤立的点表示

(2)列表法：通过列表的方法给出项数与项的对应关系

(3)解析法：通过通项公式或递推关系给出.

[典型例题]

1.写出数列$9,99,999,\cdots$的一个通项公式：____________________.

2.数列：$1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0,\cdots$的一个通项公式为：_______________.

3.数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为：$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2n-1},n\text{为奇数},\\3n-1,n\text{为偶数}\end{cases}$，则它的前 4 项为_______________.

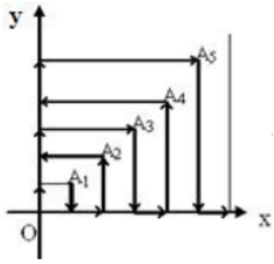
4.数列$\frac{1}{3},-1,\frac{9}{5},-3,\frac{25}{7},-\frac{9}{2},\cdots$的通项公式为_______________.

5.已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}+\left(-1\right)^n,n\geq 2$，且$a_1=1$，则$\frac{a_5}{a_3}=$____________.

6.若数列$\left\{a_n\right\}$满足，对任意$n\in\mathbb{N}^*$，都有$a_{n+6}+a_{n+4}+a_{n+2}=0$，若$a_1=1,a_2=2$，则$a_{2018}=$_______.

7.已知数列$\{a_n\}$通项公式为$a_n=\dfrac{n-1}{n-\sqrt{5}}$，则$\{a_n\}$最大项为____________.

8.一个例子在第 1 秒内从原点运动到点(0,1)，然后再按图所示，在与x,y轴垂直的方向上来回运动，且每秒移动 1 个单位，则第 31 秒时，该粒子所处位置为____________.



9.已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n,n\in\mathbf{N}^*$，$a_1=2$，则$a_n=$____________.

10.在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3,a_2=-3$，且$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，则$a_{2016}=$____________.

11.数列$\{a_n\}$中，$a_1=3,a_{n+1}=a_n^2$，则此数列的通项公式为____________.

12. 已知数列$-1,1,-1,1,\cdots$；$\{(-1)^n,n\in\mathbf{N}^*\}$；$\left\{\tan\dfrac{2n+1}{4}\pi,n\in\mathbf{N}^*\right\}$；$\left\{\sin\dfrac{2n+1}{2}\pi,n\in\mathbf{N}^*\right\}$，其中可确定为同一数列的有____________个.

13.若数列$\{a_n\}$前 8 项的值各异，且$a_{n+8}=a_n$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$都成立，则下列数列中可取遍$\{a_n\}$的前 8 项值的数列为(　　)

A. $\{a_{2k+1}\}$；B. $\{a_{3k+1}\}$；C. $\{a_{4k+1}\}$；D. $\{a_{6k+1}\}$.

14.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\log_{\frac{1}{10}}\dfrac{1}{n}$，则此数列为(　　)

A. 递增数列；B. 递减数列；C. 摆动数列；D. 常数数列.

15.下列各式中，可以作为数列$\{a_n\}$的递推公式的是(　　)

A. $a_n=2a_{n-1}-1$；B. $\begin{cases}a_1=a,\\a_{n+2}=2a_n+1\end{cases}$；C. $\begin{cases}a_1=a,\\a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\end{cases}$；D. $\begin{cases}a_1=a,\\a_2=b,\\a_{n+2}=2a_n+1\end{cases}$.

16.在数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$，若$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1},n\geq 2$，则下列各不等式成立的是(　　)

A. $a_2\cdot a_4\leq a_3^2$；B. $a_2\cdot a_4<a_3^2$；C. $a_2\cdot a_4\geq a_3^2$；D. $a_2\cdot a_4>a_3^2$.

17.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n^2+2n+17}{n}$，求数列$\{a_n\}$中的最小值，并求出最小值所在的项.

18.已知 $f\left(x\right)=10^{x}-10^{-x}$，数列$\left\{a_n\right\}$满足 $f\left(\lg a_n\right)=2n$，

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；(2)证明数列$\left\{a_n\right\}$为单调数列.

19.数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=a>0,a_{n+1}=f\left(a_n\right),n\in\mathbb{N}^*$，其中 $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{1+x}$，

(1)求 a_2,a_3,a_4；(2)猜想$\left\{a_n\right\}$的一个通项公式.

20.数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_{n+1}-4a_n+4a_{n-1}=0,n\geq 2$，其中 $a_1=1,a_2=4$，令 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，

(1)写出确定$\left\{b_n\right\}$的 b_n 与 b_{n-1} 的递推关系；(2)计算 b_1,b_2,b_3，并猜想数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式.

21.已知数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，且对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，都有 $a_{n+1}-a_n=1$，

(1)写出数列的前 5 项及通项公式；

(2)若 $f\left(n\right)=\dfrac{1}{n+a_1}+\dfrac{1}{n+a_2}+\dfrac{1}{n+a_3}+\cdots+\dfrac{1}{n+a_n}\geq a$ 对 $n\geq 2,n\in\mathbb{N}^*$ 恒成立，求实数 a 的最大值.

第 13 讲 等差数列

[知识概要]

1.等差数列的定义

如果数列$\{a_n\}$从第 2 项起每一项与它的前一项的差等于同一个常数 d，即对一切$n\in N^*$，均有$a_{n+1}-a_n=d$成立，这个数列称为等差数列，常数 d 称为等差数列的公差.

2.通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$.

当$d\neq 0$时，通项公式是关于 n 的一次函数，单调性取决于公差 d 的符号.

变式：$a_n=a_m+(n-m)d,d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

3.等差中项

$A=\dfrac{a+b}{2}$称为实数 a、b 的等差中项，两数的等差中项总是唯一存在的.

4.前 n 项和公式

$S_n=\dfrac{1}{2}n(a_1+a_n)$，或$S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$.

当$d\neq 0$时，前 n 项和公式是关于 n 的没有常数项的二次函数，即形如$S_n=An^2+Bn$，以此研究等差数列常可达事倍功半之效.

变式：$S_n=\dfrac{1}{2}n(a_k+a_{n+1-k})$或$S_n=n\cdot a_{中}$

5.等差数列的判定方法

(1)定义法：若$a_{n+1}-a_n=d$(常数)，则数列$\{a_n\}$是等差数列.

(2)等差中项法：若$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，则数列$\{a_n\}$是等差数列.

(3)通项公式法：若$a_n=kn+b$，则数列$\{a_n\}$是等差数列，且公差$d=k$.

(4)前 n 项和公式法：若$S_n=An^2+Bn$，则数列$\{a_n\}$是等差数列，且公差$d=2A$.

6.常用性质

(1)等距和性质，若$m+n=p+q(m,n,p,q\in N^*)$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$，特别地，若

$m+n=2p$，则 $a_m+a_n=2a_p$.

(2)线性组合性质，若数列$\{a_n\},\{b_n\}$都是等差数列，那么$\{k_1a_n+k_2b_n\}$也是等差数列.

(3)子数列性质，$\{a_{kn+b}\}$也是等差数列，公差为kd，例如子数列$\{a_{5n+2}\}$是以公差为$5d$ 的等差数列.　　(4)片段和性质，$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$是等差数列，公差为$m^2d$.

[典型例题]

1.在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_7+a_{25}=-6$，则必能求出该数列中的第________项，其值为________.

2.若$a,b,\lg 6,2\lg 2+\lg 3$，这四个数成等差数列，则$a=$________，$b=$________.

3.若$\left\{a_n\right\}$是以d为公差的等差数列，则数列$\left\{a_{3n+2}\right\}$的公差为____________.

4.在-9 和 3 之间插入n个数，使这$n+2$个数组成公差为 2 的等差数列，则$n=$________.

5.已知等差数列$\left\{a_n\right\}$中，a_3,a_{15}是方程$x^2-6x-1=0$两根，则$a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}=$________.

6.在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，若$a_1=23$，公差$d\in$□，且$a_6>0,a_7<0$，则$d=$____________.

7.设等差数列$\left\{a_n\right\}$公差为-2，若$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=50$，那么$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=$________.

8.在各项均为整数的等差数列$\left\{a_n\right\}$中，公差$d=-3$，并且有$S_{11}<0<S_{10}$，则$a_1=$____________.

9.在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$S_4=1,S_8=4$，则$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=$____________.

10.已知$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$都是等差数列,且$a_1=5,b_1=15,a_{100}+b_{100}=100$,则数列$\left\{a_n+b_n\right\}$前 100 项之和等于____________.

11.已知等差数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_3^2+a_8^2+2a_3a_8=9$,且$a_n<0$,则其前10项之和为____________.

12.等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=200,a_{51}+a_{52}+a_{53}+\cdots+a_{100}=2700$，则$a_1=$______.

13.已知数列$\left\{a_n\right\}$前n项和为S_n，则$S_n=an^2+bn(a\neq 0)$是$\left\{a_n\right\}$为等差数列的(　　)条件

A. 充分非必要；B. 必要非充分；C. 充要；D. 非充分非必要.

14.设数列$\{a_n\}$为等差数列，若前前n项和为S_n，仅在$n=9$时取到最大值，则(　　)

A. $a_1>0,a_9=0$；B. $a_1<0,a_9>0$；C. $a_9>0,a_{10}<0$；D. $a_9>0,a_{10}=0$.

15.设数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2=-6,a_8=6,S_n$是数列$\{a_n\}$前n项和，则(　　)

A. $S_4<S_5$；B. $S_4=S_5$；C. $S_6<S_5$；D. $S_6=S_5$.

16.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_{n+1}=a_n+2n,n\in\mathbb{N}^*$，则$a_{100}=$(　　)

A. 9900；B. 9902；C. 9904；D. 10100.

17.已知一个共有n项的等差数列前 4 项和为 26，末 4 项和为 110，且所有项之和为 187，求n.

18.已知等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，等差数列$\{b_n\}$前n项和为T_n，满足$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n+3}{5n+3}$，求$\dfrac{a_9}{b_9}$的值.

19.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-40,a_{13}=-16$，求$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{40}|$的值.

20.在区间[100,200]内，既不能被 7 整除，也不能被 5 整除的所有数之和.

21.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=10,S_{10}>0,S_{11}<0$，

(1)求公差d的取值范围；(2)当n为何值时，S_n取得最大值.

第 14 讲 等比数列

[知识概要]

1.等比数列：对一切 $n\in N^*$，均有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0)$ 成立，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，非零常数 q 称为等比数列的公比.

2.通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$，是关于 q 的指数型函数，变式 $a_n=a_mq^{n-m},q=\sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}}$

3.等比中项：$G=\pm\sqrt{ab}$ 称为非零实数 a、b 的等比中项.

4.前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1,q=1,\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq 1\end{cases}$

5.等比数列的判定方法

(1)定义法：若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0),n\in N^*\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等比数列.

(2)等比中项法：若 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geq 2),a_n\neq 0\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等比数列.

(3)通项公式法：若 $a_n=kt^n(n\in N^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=kt,q=t$.

(4)前 n 项和公式法：若 $S_n=A\cdot B^n-A\Rightarrow\{a_n\}$ 是等比数列，且公比 $q=B\neq 1$.

6.常用性质——$\{a_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列

(1)等距积性质：若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in N^*)$,则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ ；若 $m+n=2p$,则 $a_m\cdot a_n=a_p^2$.

(2)若 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别是公比为 q_1,q_2 的等比数列，则 $\{a_nb_n\}$ 也是等比数列，公比为 $q_1\cdot q_2$.

(3)子数列性质：$a_n,a_{n+k},a_{n+2k},\cdots$ 是等比数列，公比为 q^k；若 $\{k_n\}$ 是由正整数构成的等差数列，则 $\{a_{k_n}\}$ 也构成等比数列.

(4)片段和性质：$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$ 是等比数列，公比为 q^m .

[典型例题]

1.在等比数列中，已知首项为$\dfrac{9}{8}$，末项为$\dfrac{1}{3}$，公比为$\dfrac{2}{3}$，则项数为________.

2.若$\sqrt{3},x,y,18\sqrt{2}$四个数成等比数列，则$x=$___________，$y=$____________.

3.等比数列$\{a_n\}$中，a_5,a_9是方程$7x^2-18x+7=0$两根，则$a_7=$__________.

4.在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_5=-16,a_8=8$，则$a_{11}=$___________.

5.设数列$\{a_n\}$为等比数列，若$a_6=3$，则$a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$的值为___________.

6.已知$x-1,2x+2,3x+3$是一个等比数列前 3 项，则其第 4 项为________.

7.已知数列$\{a_n\}$通项公式为$a_n=2^{n-1}+2n-1$，则它的前 10 项之和为___________.

8.在等比数列$\{a_n\}$中，$S_3=2,S_6=6$，则$S_9=$________.

9.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=10,a_3=20$，$S_n\geq155$，则n的取值范围是__________.

10.已知等比数列的公比$q=\dfrac{1}{2}$，且$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$，则$S_{100}=$________.

11.某单位 12 月产量是同年 1 月产量的 m 倍，那么该单位辞年的月平均增长率是________.

12.若$\{a_n\}$是首项为 2，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，S_n为其前n项和，用S_n表示$S_{n+1}=$___________.

13.在等比数列$\{a_n\}$中，公比$q=2,S_{99}=77$，则$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=$(　　)

A. 11；B. 33；C. 44；D. 55.

14.在等比数列$\{a_n\}$中，若对于任意的自然数$n\in\mathbb{N}^*$，都有$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$，则$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=$(　　)

A. 4^n-1；B. $\dfrac{1}{3}\left(4^n-1\right)$；C. $\dfrac{1}{3}\left(2^n-1\right)^2$；D. $\left(2^n-1\right)^2$.

15.等比数列$\{a_n\}$中，首项$a_1=2006$，公比$q=\dfrac{1}{2}$，设P_n表示数列$\{a_n\}$前n项的积，则P_n中最大为　（　　　）　A. P_{13}；B. P_{12}；C. P_{11}；D. P_{10}.

16.等比数列$\{a_n\}$中，首项$a_1=2006$，公比$q=-\dfrac{1}{2}$，设P_n表示数列$\{a_n\}$前n项的积，则P_n中最大为(　　)　A. P_{13}；B. P_{12}；C. P_{11}；D. P_{10}.

17.在等比数列$\{a_n\}$中，若$S_3S_5-S_4^2=-16$，$a_2a_4=32$，求S_4.

18.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1000,q=\dfrac{1}{10}$，又设$b_n=\dfrac{1}{n}\left(\lg a_1+\lg a_2+\lg a_3+\cdots+\lg a_n\right)$，求数列$\left\{b_n\right\}$前$n$项和的最大值.

19.已知数列$\{a_n\}$满足条件，$a_1=1,a_2=r,r>0$，且$\left\{a_n\cdot a_{n+1}\right\}$是公比为$q,q>0$的等比数列，设$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$，求数列$\left\{b_n\right\}$前$n$项和$S_n$.

20.已知数列$\{a_n\}$中，S_n是它的前n项和，并且$S_{n+1}=4a_n+2,n\in\mathbb{N}^*$，$a_1=1$，

(1)设$b_n=a_{n+1}-2a_n,n\in\mathbb{N}^*$，求证：$\left\{b_n\right\}$为等比数列；

(2)设$c_n=\dfrac{a_n}{2^n},n\in\mathbb{N}^*$，求证：$\{a_n\}$为等差数列.

21.已知S_n为数列$\{a_n\}$前n项和，且$S_n=1-a_n$，

(1)求证：数列$\{a_n\}$为等比数列；(2)求a_n.

第 16 讲 数列的通项

[知识梳理]

1.递归关系：在数列中或其他数学量的序列中，若任何一项可以由前若干项按某一关系式来确定，则该关系式称为递归关系，发现与分析递归关系，对于研究各种序列及算法设计，常有重要作用.

2.递推数列：由递归关系确定的数列称为递推数列，也称递归数列.

[典型例题]

1.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=4a_{n-1}+3, n\geq 2 \end{cases}$，则$a_n=$____________.

2.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=5, \\ a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}+18, n\geq 2 \end{cases}$，则$a_n=$____________.

3.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=a_{n-1}+n, n\geq 2 \end{cases}$，则$a_n=$____________.

4.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=2^{n-1}\cdot a_{n-1}, n\geq 2 \end{cases}$，则$a_n=$____________.

5.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{2a_{n-1}+1}{1-2a_n}, n\geq 2 \end{cases}$，则$a_n=$____________.

6.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=3, \\ a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+1} \end{cases}$，则$a_n=$____________.

7.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=1, \\ (a_{n+1}+a_n-1)^2=4a_{n+1}a_n \end{cases}$，则$a_n=$____________.

8.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=4, \\ a_{n+1}=2a_n^2 \end{cases}$，则$a_n=$____________.

9.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=4, \\ a_{n+1}=a_n^{\frac{n}{n+1}} \end{cases}$，则$a_n=$____________.

10.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=2, \\ a_{n+1}=3a_n+3^n \end{cases}$，则$a_n=$________.

11.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=1, \\ a_{n+1}=8a_n+3^n \end{cases}$，则$a_n=$________.

12.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=2, a_2=6, \\ a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}, n\ge 3 \end{cases}$，则$a_n=$________.

13.在数列$\{a_n\}$中，$a_n=n^2-9n-100$，最小项是(　　)

A. 第 4 项；　B. 第 5 项；　C. 第 6 项；　D. 第 4 项或第 5 项.

14.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n=\frac{5}{2}n^2-\frac{1}{2}n, n\in N^*$，现从前 m 项：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$中抽出一项(不是$a_1,a_m$)，余下各项的算术平均数为 37，则抽出的是(　　)

A. 第 6 项；　B. 第 8 项；　C. 第 12 项；　D. 第 15 项.

15.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2, a_{n+1}=a_n+\ln(1+\frac{1}{n})$，则$a_n=$(　　)

A. $2+\ln n$；　B. $2+(n-1)\ln n$；　C. $2+n\ln n$；　D. $1+n+\ln n$.

16.已知$\{a_n\}$是公比为$q, q\ne 1$的等比数列，则数列$\left\{2^{a_n}\right\}$，$\left\{a_n^2\right\}$，$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$，$\left\{2a_n\right\}$中，是等比数列的个数为(　　)　　　A. 1；B. 2；C. 3；D. 4

17.在数列$\{a_n\}$中，$\begin{cases} a_1=0, \\ a_n=\frac{1}{4}(a_{n-1}+3), n\ge 2 \end{cases}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

18. 设数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{5}{6}$，以$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$为系数的一元二次方程$a_{n-1}x^2-a_nx+1=0, n\ge 2$都有根$\alpha,\beta$满足$3\alpha-\alpha\cdot\beta+3\beta=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

19.在数列$\{a_n\},\{b_n\}$中，$a_1=1,b_1=-1$，且$a_{n+1}=8a_n-6b_n,b_{n+1}=6a_n-4b_n$，求$a_n,b_n$.

20.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，点$(n,\dfrac{S_n}{n})$在直线$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{2}$上，数列$\{b_n\}$满足$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0,n\in N^*$，且$b_3=11$，前 9 项和为 153，

(1)求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；(2)设$c_n=\dfrac{3}{(2a_n-11)(2b_n-1)}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和$T_n$.

21.已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_{n+1}=2^n a_n,n\in N^*$

(1)求a_n；

(2)若$b_n=\log_2(\dfrac{a_n}{4^n})$，求数列$\{b_n\}$的最小项；

(3)数列$\{c_n\}$的前 n 项和为b_n，求数列$\{|c_n|\}$的前 n 项T_n.

第 17 讲 数列的前 n 项和

[知识概要]

数列求和是对数列知识的精彩演绎，它几乎涵盖了数列中所有的知识、思想、策略和技巧，所以必须掌握数列求和的基本方法.

[典型例题]

1.数列$1\times3,3\times5,5\times7,\cdots,(2n-1)(2n+1)$的前 n 项和$S_n=$____________.

2.数列$1\frac{1}{2},2\frac{1}{4},3\frac{1}{8},4\frac{1}{16},\cdots,n\frac{1}{2^n}$的前 n 项和$S_n=$____________.

3.数列$1,1+2,1+2+2^2,\cdots,1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$的前 n 项和$S_n=$____________.

4.已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\begin{cases}2n+3,n=2k-1,k\in N^*\\4^n,n=2k,k\in N^*\end{cases}$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n$

=__________.

5.已知$a_n=\frac{1}{3}(2n+1)$，则$T_n=a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\cdots+(-1)^{n+1}a_na_{n+1}=$__________.

6.已知$a_n=\begin{cases}-2n+3,1\le n\le10,\\2^{n-1},n\ge11\end{cases}$，则$a_1+a_2+\cdots+a_n=$__________.

7.求和$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{3n-2}{2^n}=$_________.

8.计算$S_n=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1}=$____________.

9. 设 $f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，则 $f(-2015)+f(-2014)+\cdots+f(0)+\cdots f(2015)+f(2016)$

=__________.

10.数列$\frac{1}{1\times3},\frac{1}{3\times5},\cdots,\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\cdots$的前 n 项和为________

11.计算$S_n=\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots+\frac{1}{2n\cdot(2n+2)}=$____________

12.已知数列$\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\}$的前 n 项的和$S_n=9$，则 n 的值为________.

13.已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其公差为-2，且a_7是a_3与a_9的等比中项，S_n为$\{a_n\}$的前 n 项和，$n\in\mathbb{N}^*$，则$S_{10}=(\quad)$　　A. -110；B. -90；C. 90；D. 110.

14.已知数列$\{a_n\}$为等比数列，S_n是它的前 n 项和，若$a_2a_3=2a_1$，且a_4与$2a_7$的等差中项为$\dfrac{5}{4}$，则$S_5=(\quad)$　　A. 35；B. 33；C. 31：D. 29.

15.设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上恒不为零的函数，对任意实数 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$，若$a_1=\dfrac{1}{2},a_n=f(n),n\in\mathbb{N}^*$，则数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$的取值范围是(　　)　　A. $\left[\dfrac{1}{2},2\right)$；B. $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$；C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$；D. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

16.设$m\in\mathbb{N}^*,\log_2 m$的整数部分用$F(m)$表示，则$F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(1024)$的值是(　　)　　A. 8204；B. 8192；C. 9218；D. 以上都不对.

17.已知一个等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=25-5n$，求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和T_n.

18.数列$\{a_n\}$中，$a_1=8,a_4=2$，且满足$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,n\in N^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$G_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，求$G_n$；

(3)设$b_n=\dfrac{1}{n(12-a_n)},n\in N^*,T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，是否存在最大的正整数 m，使得对任意$n\in N^*$，均有$T_n>\dfrac{m}{32}$成立，若存在，求出 m 的值，若不存在，说明理由.

19.等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，已知对任意的$n\in N^*$，点(n,S_n)均在函数

$y=b^x+r(b>0,b\neq 1)$的图像上，

(1)求 r 的值；(2)当$b=2$时，记$b_n=\dfrac{n+1}{4a_n},n\in N^*$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n$.

20.设S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_n=(-1)^n a_n-\dfrac{1}{2^n},n\in N^*$.

(1)求a_3；(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

21.设正项等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{1}{2}$，前 n 项和为S_n，且$1024S_{30}-1025S_{20}+S_{10}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项；(2)求$\{nS_n\}$的前 n 项和T_n.

第 18 讲 期末综合复习

1. -8 和 2 的等差中项的值是____________.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$（$n\in \mathbf{N}^*$）中，$a_2=-1$，$a_5=-\dfrac{11}{2}$，则该等差数列的公差的值是________.

3. 已知等比数列$\{b_n\}$（$n\in \mathbf{N}^*$）中，$b_3=-8$，$b_6=64$，则该等比数列的公比的值是_________.

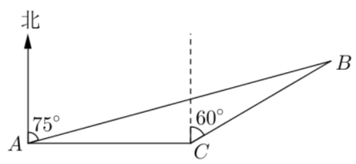
4. 方程$2\sin x+1=0$ 的解集是____________.

5. 已知$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，则$\tan(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$的值是____________.

6. 化简：$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos(2\pi-\beta)-\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)\sin(\pi+\beta)=$____________.(要求将结果写出某个角的三角比)

7. 已知扇形的圆心角$\alpha=\dfrac{\pi}{18}$，扇形的面积为π，则该扇形的弧长的值是_________.

8. 某海岛中有一个小岛B（如图所示），其周围 3.8 海里内布满暗礁（3.8 海里及以外无暗礁），一大型渔船从该海域的A处出发由西向东直线航行，在A处望见小岛B位于北偏东 $75°$，渔船继续航行 8 海里到达C处，此时望见小岛B位于北偏东 $60°$，若渔船不改变航向继续前进，试问渔船有没有触礁的危险？__（填写“有“、“无”、“无法判断”三者之一）



9. 已知函数$f(x)=-\cos^2 x+2a\sin x+b$，$x\in \mathbf{R}$（常数$a,b\in \mathbf{R}$），若当且仅当$\sin x=a$时，函数$f(x)$取得最大值 1，则实数$b$的数值为____________.

10. 数列$\{a_n\}$（$n\in \mathbf{N}^*$）满足：$a_1=\dfrac{3}{5}$，$a_n=\begin{cases}2a_{n-1} & 0<a_{n-1}<0.5\\ 1-a_{n-1} & a_{n-1}\ge 0.5\end{cases}$（$n\ge 2$），则$a_{59}=$____________.

11. 观察下列等式：

（1）$\dfrac{\cos 3°}{\sin 48°}+\dfrac{\cos 87°}{\sin 132°}=\sqrt{2}$；（2）$\dfrac{\cos(-13°)}{\sin 32°}+\dfrac{\cos 103°}{\sin 148°}=\sqrt{2}$；

（3）$\dfrac{\cos 13°}{\sin 58°}+\dfrac{\cos 77°}{\sin 122°}=\sqrt{2}$；（4）$\dfrac{\cos 121°}{\sin 166°}+\dfrac{\cos(-31°)}{\sin 14°}=\sqrt{2}$；……

请你根据给定等式的共同特征，并接着写出一个具有这个共同特征的等式（要求与已知等式不重复），这个等式可以是____________（答案不唯一）

12. 已知公式$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$，$\theta \in \mathbf{R}$，借助这个公式，我们可以求函数

$f(x) = 4x^3 - 3x - 2$（$x \in [0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}]$）的值域，则该函数的值域是.

13. 已知角A、B是△ABC的内角，则“$A<B$”是“$\sin A < \sin B$”的（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

14. 在△ABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，如果$\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{\tan A}{\tan B}$，则△$ABC$的形状是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 等腰直角三角形

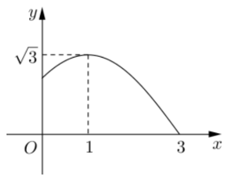
C. 等腰三角形或直角三角形　　D. 直角三角形

15. 要得到函数$y = 2\sin(2x + \dfrac{\pi}{5})$的图像，只需要将函数$y = 2\sin(2x - \dfrac{\pi}{5})$的图像（　　）

A. 向右平移$\dfrac{2}{5}\pi$个长度单位　　B. 向左平移$\dfrac{2}{5}\pi$个长度单位

C. 向右平移$\dfrac{\pi}{5}$个长度单位　　D. 向左平移$\dfrac{\pi}{5}$个长度单位

16. 已知函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$，$x \in \mathbf{R}$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的部分图像如图所示，则$A$、$\omega$、$\varphi$的一个数值可以是（　　）



A. $\begin{cases} A = \sqrt{3} \\ \omega = \dfrac{\pi}{4} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$　　B. $\begin{cases} A = \sqrt{3} \\ \omega = \dfrac{1}{2} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$　　C. $\begin{cases} A = \sqrt{3} \\ \omega = \dfrac{1}{4} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$　　D. $\begin{cases} A = \sqrt{3} \\ \omega = \dfrac{\pi}{4} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

17. 已知S_n是等差数列$\{a_n\}$（$n \in \mathbf{N}^*$）的前n项和，且$a_3 = 5$，$a_{16} = 31$.

（1）求通项公式a_n；（2）若$S_k = a_{841}$，求正整数k的值.

18. 已知集合$X = \{2,3,4,6,8,15,17\}$，数列$\{a_n\}$（$n \in \mathbf{N}^*$）是公比为q（$q>1$）的等比数列，且等比数列的前三项满足$a_1, a_2, a_3 \in X$.

（1）求通项公式a_n；

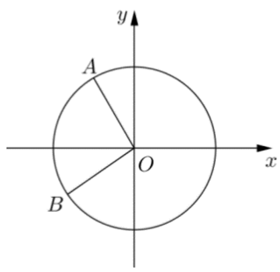
（2）若 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，记 $A=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$，试用等比数列求和公式化简 A（用含 n 的式子表示）.

19. 已知 A、B、C 是△ABC 的内角，且 $AC=5$，$AB=6$.

（1）若 $\cos B=\dfrac{9}{16}$，求△ABC 的外接圆的面积；

（2）若 $BC=x$，且△ABC 为钝角三角形，求正实数 x 的取值范围.

20. 已知角 α、$2\alpha-\beta$ 的顶点在平面直角坐标系的原点，始边与 x 轴正半轴重合，且角 α 的终边与单位圆（圆心在原点，半径为 1 的圆）的交点 A 位于第二象限，角 $2\alpha-\beta$ 的终边和单位圆的交点 B 位于第三象限，若点 A 的横坐标为 $x_A=-\dfrac{3}{5}$，点 B 的纵坐标为 $y_B=-\dfrac{5}{13}$，



(1)求 $\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$ 的值；

(2)若 $0<\beta<\pi$，求 β 的值.（结果用反三角函数值表示）

21. 已知函数 $f(x)=\cos 2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$， $x\in\mathbf{R}$.

（1）把 $f(x)$ 表示为 $A\sin(\omega x+\varphi)+B$ （ $A>0$， $\omega>0$， $0<\varphi<\pi$ ）的形式，并写出函数 $f(x)$ 的最小正周期、值域；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（3）定义：对于任意实数 x_1、 x_2， $\max\{x_1,x_2\}=\begin{cases} x_1 & x_1\ge x_2 \\ x_2 & x_2>x_1 \end{cases}$，设 $g(x)=\max\{\sqrt{3}a\sin x,a\cos x\}$， $x\in\mathbf{R}$ （常数 $a>0$ ），若对于任意 $x_1\in\mathbf{R}$，总存在 $x_2\in\mathbf{R}$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.