

第一讲 有理数的意义、数轴、绝对值

5.1 有理数的意义

1. 有理数 2. 整数是 $-3, 8, 69, 0$; 正数是 $8, 7\frac{1}{2}, 69, 32$; 负数是 $-3, -\frac{1}{6}, -1\frac{2}{5}, -3.1$; 有理数是 $8, -3, 7\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 69, 0, 0.32, -1\frac{2}{5}, -3.1$; 3. 有理数为 $-(-3), |-5|, 2.666\cdots, -1\frac{2}{7}, 50\%$; 非负数为 $-(-3), |-5|, 2.666\cdots, 50\%$; 4. 8848 表示珠穆朗玛峰高于海平面 8848 米、-155 表示吐鲁番盆地低于海平面 155 米 5. A 6. 可按整数和分数来分类, 也可以按正有理数和负有理数来分类 (略)

5.2 数轴

1. 原点、直线 2. 点 3. -3 4. $\pm 5\frac{1}{3}$ 5. $-\frac{2}{3}$ 6. $\times$ 7. $\times$ 8. D 9. $-4\frac{1}{2}, 0$ 10. -2.8
11. -9 12. $-\frac{12}{11}$ 13. $0, -1$ 14. 0 15. C 16. -1 17. A: $-2\frac{4}{5}$; B: $-1\frac{1}{5}$; C: $-\frac{3}{5}$; D: $\frac{2}{5}$; E: $1\frac{3}{5}$ 18. (1) 略 (2) 负有理数: $-\frac{1}{4}, -2.5, -2$; 非负有理数: $2, 0, 25\%, 2\frac{1}{2}$ (3) $2\frac{1}{2} > 2 > 25\% > 0 > -\frac{1}{4} > -2 > -2.5$ (4) 互为相反数有 3 对, 它们是 $2\frac{1}{2}$ 和 -2.5 ; 2 和 -2 ; 25% 和 $-\frac{1}{4}$

5.3 绝对值

1. $\times$ 2. $\times$ 3. $\sqrt{}$ 4. $\times$ 5. $\times$ 6. C 7. $>$ 8. $\pi - 1$ 9. 非正数 10. 511. 非负数 12. 略

第二讲 有理数的运算

5.4 有理数的加法

(一) 1. $\times$ 2. $\times$ 3. $\sqrt{}$ (二) 1. B、C 2. D (三) (1) $-\frac{5}{19}$ (2) 0.1 (3) $-2\frac{7}{12}$ (4) 5 (5) 0
(6) -3.9 (7) 1 (8) $3\frac{3}{5}$ (9) $\frac{2}{3}$ (10) $-7\frac{5}{6}$ (11) -10.3 (四) 1. $-\frac{1}{5}$ 2. -2 3. $3\frac{1}{30}$ 4. $-\frac{28}{15}$ 5. 2 6. -3 (五) (1) $\frac{1}{6}$ (2) $4\frac{5}{18}$ (3) $-\frac{6}{13}$ (4) $\frac{1}{3}$ (5) 8 (6) -4 (7) $5\frac{2}{3}$
(8) 0 (六) 1. $\pm 9, \pm 1.4$ 2. 无数个、 0 3. a、b 两个数异号 (因为 a、b 同为正, 则 c 就在 a、b 的右侧; a、b 同为负, 则 c 就在 a、b 的左侧)

5. 5 有理数的减法

1. -1、 $2\frac{1}{3}$ 2. $-14\frac{1}{2}$ 、2.5 3. $-\frac{5}{19}$ 、-2.25 4. 130 5. -5 6. > 7. < 8. = 9. $\times$ 10. $\checkmark$
11. $\times$ 12. $\checkmark$ 13. $\times$ 14. (1) $-\frac{33}{56}$ (2) 2.54 (3) $-9\frac{3}{7}$ (4) 4

5. 6 有理数的乘法

1. -101、 $-\frac{101}{3}$ 2. -1、 $\frac{1}{2500}$ 3. < 4. 正 5. 正或负 6. $-\frac{25}{3}$ 7. -1 8. $\pm\frac{4}{3}$ 9. D
10. B 11. B 12. (1) $-\frac{3}{10}$ (2) $-\frac{11}{2}$ (3) $-\frac{5}{3}$ (4) -1 (5) -3 (6) $\frac{1}{4}$ 13. (1) 10 (2) 82 (3) -26 (4)
 $125\frac{3}{5}$ (5) -1961 (6) 49.49 (7) 1 (8) $\frac{65}{144}$

5. 7 有理数的除法

1. $-\frac{2}{5}$ 、 $3\frac{1}{2}$ 2. $2\frac{1}{3}$ 、 $\frac{10}{23}$ 3. $\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{5}{23}$ 4. $-\frac{2}{5}$ 5. < 0、> 0 6. (1) -8 (2) $-\frac{1}{8}$ (3) -2 (4) $\frac{11}{2}$ (5) 6 (6)
 $\frac{4}{3}$ 7. (1) $\frac{57}{7}$ (2) -0.14 (3) -27.8

5. 8 有理数的乘方

1. (1) = (2) < (3) = (4) > (5) < (6) < 2. 2 3. ± 2 、2 4. 14844、-14844、148.44 5. 1 和 0 6. 大、8、0；大、
8、5 7. -2 8. (1) -20 (2) $-\frac{3}{32}$ (3) 17 (4) $-\frac{9}{8}$ (5) 1 (6) 55

第三讲 有理数的混合运算

5. 9 有理数的混合运算

- (一) (1) 10 (2) -8 (3) $-2\frac{5}{6}$ (4) 7 (5) $-9\frac{7}{9}$ (6) -0.75 (7) $-\frac{11}{5}$ (8) -1.8 (9) $\frac{32}{49}$
(10) -9 (11) 222 (12) 7.5 (13) $\frac{14}{13}$ (14) $\frac{7}{30}$ (15) $\frac{5}{8}$ (16) $-\frac{27}{8}$ (17) $\frac{25}{64}$ (18) -16
(19) -4 (20) -36 (21) $\frac{1}{8}$ (22) -216 (23) 0 (24) -24 (25) 54 (26) $-\frac{3}{4}$ (27) 1 (28) -61 (29)
-100 (30) 2 (二) (1) $-\frac{1}{12}$ (2) $-\frac{3}{8}$ (3) 16 (4) 9.1 (5) $11\frac{1}{4}$ (6) $6\frac{22}{45}$ (7) 43 (8) 0

$$(9) -\frac{9}{8} \quad (10) 11 \quad (三) (1) -5 \quad (2) 56.09 \quad (3) -1\frac{8}{27} \quad (4) -5 \quad (5) 180 \quad (6) 3 \quad (7) 0.0792$$

$$(8) -1\frac{1}{2} \quad (9) -\frac{16}{3} \quad (10) \frac{5}{12}$$

5.10 科学计数法

1. -5.876×10^7 、 -1.305×10^5 2. 1.9×10^5 人、 -3.905×10^6 元 3. $-1.048 \times 10^\circ \text{C}$;
 -2.34567×10^3 米 4. 1×10^6 5. 1×10^6 6. 4 7. 5.5×10^9 8. 9.37×10^5 9. -2.56×10^9 10.

(1) 100000000 (2) -4.8×10^8 (3) -3.72×10^8 (4) 6.25×10^{14} 11. 2^{22} 的个位数字是 4; 5^{101} 的
 个位数字是 5; 9^{99} 的个位数字是 9; 3^{2007} 的个位数字是 7 12. $-4 \times 1 \times (6-12) = 24$ 或
 $12 \times 1 \times (-4+6) = 24$; $1^5 \times 4 \times 6 = 24$

拓展题:

1、-43 2、1.5 3、 $-\frac{10}{13}$ 4、-56 5、 $13\frac{13}{18}$ 6、38

7、 $-\frac{64}{65}$ 8、11 9、 $-28\frac{13}{19}$ 10、0

第四讲 一元一次方程

1. 2 2. 16 3. $\frac{3}{2}$ 4. D 5. $2(2x+x)=20$

6. 进价, $600x$ 7. $6(x-2)=4(x+2)$

8. $x+(10\%+1)x+(1-5\%)x=120$

9. $a+a+2=6$ 10. $8x+4(50-x)=288$

11. C 12. D

13. $m=-2$ $-4x+3=-7$

14. 解: 方法一: 40 瓶啤酒瓶可换回钱为 $40 \times 0.5 = 20$ 元, 用 20 元钱可换回饮料 10 瓶, 10 个空瓶又可换回 2 瓶饮料, 加余下 2 瓶, 共 4 个空瓶又可换回一瓶饮料.

$10+2+1=13$ 瓶.....余一个空瓶

方法二: 设能换回 x 瓶饮料则 $\frac{10+x}{4}=x$, $x=3\frac{1}{3}$, 只能换 3 瓶, 共 13 瓶.

3.2 解一元一次方程（一）答案：

1. -18 2. 24 3. B 4. B

5. (1) 移项，得 $0.3x+2.7x-2x=1.2-1.2$ ，得 $x=0$

(2) $4x-5=20+12x$

移项，得 $4x-12x=25$

$$\text{即 } x = -\frac{25}{8}$$

6. 设两地距离为 x 千米，则有方程：

$$\frac{x}{2} - 24 = \frac{x}{3} + 24, \text{ 解得 } x=2448 \text{ (千米)}$$

7. 设桶重 x 千克，则油重 $(8-x)$ 千克

$$\text{列方程, } \frac{8-x}{2} + x = 4.5$$

解得 $x=1$ ，油重 $8-x=8-1=7$ (千克)

8. 设轨道=周期为 xh ，则得方程

$$x-8+x+2x=88 \text{ 解得 } x=24 \text{ (小时)}$$

轨道一周期为 16 小时，轨道二周期为 24 小时，轨道三周期为 48 小时.

第五讲 一元一次方程的应用

1. 3200 2. 125 元 3. A 4. C

5. 产品成本降低 x 元，得 $[510 \times (1-4\%) - (400-x)] \times (1+10\%) = (510-400)$ m,
 $x=10.4$ (元)

6. 设打 x 折，依题意得方程 $2190x+1 \times 10 \times 0.4 \times 365 = 1.1 \times 2190 + 0.55 \times 10 \times 365 \times 0.4$,
 $x=0.8$ ，至少打 8 折.

7. 设第一次购进的 m 盘录音带，第二次购进 $2m$ 盘录音带，

$$\text{得 } \frac{k}{3}(m+2m) = (m \times \frac{16}{3} + 2m \times \frac{21}{4}) \cdot (1+20\%), k=19.$$

8. (1) 用一盏节能灯的费用是 $(49+0.0045x)$ 元，用一盏白炽灯的费用是 $(18+0.02x)$ 元.

(2) ①由题意, 得 $49+0.0045x=18+0.02x$, 解得 $x=2000$. 所以当照明时间是 2000 小时, 两种灯的费用一样多;

②取特殊值 $x=1500$ 小时, 则用一盏节能灯的费用是 $49+0.0045 \times 1500=55.75$ (元).

用一盏白炽灯的费用是 $18+0.02 \times 1500=48$ (元).

所以当照明时间小于 2000 小时时, 选用白炽灯费用低; 取特殊值 $x=2500$ 小时,

则用一盏节能灯的费用是 $49+0.0045 \times 2500=60.25$ (元).

用一盏白炽灯的费用是 $18+0.02 \times 2500=68$ (元).

所以当照明时间超过 2000 小时时, 选用节能灯费用低.

(3) 分下列三种情况讨论:

①如果选用两盏节能灯, 则费用是 $98+0.0045 \times 3000=111.5$ (元);

②如果选用两盏白炽灯, 则费用是 $36+0.02 \times 3000=96$ (元);

③如果选用一盏节能灯和一盏白炽灯, 由 (2) 可知, 当照明时间大于 2000 小时时, 用节能灯比白炽灯费用低, 所以节能灯用足 2800 小时, 费用最低, 费用是 $67+0.0045 \times 2800+0.02 \times 200=83.6$ (元).

综上所述, 应各选用一盏灯, 且节能灯使用 2800 小时, 白炽灯使用 200 小时时, 费用最低.

第六讲：一元一次不等式（组）

1. $a > 0$; (2) $x + y < 0$; (3) $5 + x < 3x$.
2. $>$; $<$; $\geq$; $\leq$.
3. $<$; $<$.
4. $-(2x-3) > 0$; (2) $(a+b)^2 \leq 100$; (3) $\frac{1}{4}x + 5x \geq 0$; (4) $\frac{1}{3}x + 4 \leq 8$.
5. $x > 2$; (2) $x < 18$; (3) $x < -\frac{9}{5}$; (4) $x > -\frac{1}{2}$.
6. $2m > 3m$; (2) $-\frac{2}{3}m + 3 < -\frac{2}{3}n + 3$; (3) $-3x^2 + 2x + 1 > -3x^2 + 2x - 3$.
7. 3 不是不等式的解; -3 是不等式的解
8. 略
9. 答案有无数个, 例如 $2x \geq -4$; (2) 答案有无数个, 例如 $-4 \leq 2x < 2$.
10. C

11. (1) 4; (2) 0, 1, 2, 3, 4 .

12. $x \leq 5$; $x \geq 5$.

13. $x \geq 0$; (2) $x > \frac{8}{5}$; (3) $x \leq \frac{4}{19}$

14. 0、1、2、3.

第八讲：一元一次不等式组

1. (1) $x \geq 2$; (2) $x < -2$; (3) $-2 < x \leq 2$; (4) 无解; (5) $1 \leq x \leq 2$.

2. $x > b$.

3. $x \geq \frac{2}{3}$; (2) $4 \leq x < 6$; (3) $-\frac{7}{3} \leq x < \frac{11}{3}$.

4. $x < 2$; (2) $0 < x \leq \frac{8}{3}$; (3) $-1 < x < 1$.

5. 整数解为-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

6. $a \leq 3$.

7. $x \geq -\frac{5}{4}$; (2) 无解 (3) $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{1}{2}$

8. $\frac{5}{3} < x < 6$; (2) $1 < x \leq 6$; (3) $x > 17$.

9. (1) $x > 5$; (2) $-10 \leq x \leq 0$.

10. $a \leq 2$.

第九讲：一元一次不等式（组）的应用

1. 4.

2. (1) $x \leq \frac{36}{17}$; (2) $x \leq -\frac{2}{3}$.

3. 16.

4. m 为 1 或 2 或 3.

5. 4 人.

6. 不少于 60 千克.

7. 10 条.

8. 设旅行社收的费用为 y 元, 学生数有 x 人, 根据题意得:

$$y_{\text{甲}} = 240 + 240 \times 50\% \times x = 120x + 240, \quad y_{\text{乙}} = (x+1) \times 240 \times 60\% = 144x + 144$$

当 $y_{\text{甲}} = y_{\text{乙}}$ 时, 解得 $x = 4$, 即当学生数为 4 时, 两家旅行社收费一样

多； 所以可得：当 $x > 4$ 时， $y_{\text{甲}} < y_{\text{乙}}$ ；当 $x < 4$ 时， $y_{\text{甲}} > y_{\text{乙}}$ 。

因此学生数多于 4 人时，选甲旅行社；当学生数少于 4 人时，选乙旅行社。

9. $2 < x < 3$.

10. 0、1、2.

11. $-4 < x < \frac{45}{13}$, $x > 5$

12. $x \geq 90$.

13. 在 33% 到 42%

14. 11.

第十讲：一次方程组及其解法

1. (2)(4)

2. 不是 (2) 不是 (3) 不是.

3. $a = \frac{5}{2}$, $b = -2$

4. 略

5. $k = 4$.

6. $\frac{4}{11}$.

7. 2.

8. 不是；(2) 是.

9. $3x - y = 5$; $y = 3x - 5$; $5x + 3y = 9$.

10. x ; 最小公倍数.

11. 一定；不一定.

12. $x = \frac{5}{2}$ $y = 4$, $x = 3$ $y = -2$, $m = 1$ $n = 3$

13. $x = 5$ $y = 2$, $x = 4$ $y = 3$, $x = -3$ $y = 4$

14. $x = \frac{1}{2}$ $y = -2$

15. $x = \frac{16}{3}$ $y = 5$, $x = 3$ $y = 2$

16. $x = \frac{3}{4}$ $y = \frac{1}{4}$, $x = 3$ $y = -2$

17. x ; y 、 z .

18. $x = 3$ $y = 2$ $z = 10$, $x = 6$ $y = 3$ $z = 1$

19. $x = 6$ $y = 3$ $z = 2$

20. $x = \frac{4}{3}$ $y = 1$ $z = -4$, $x = 5$ $y = -10$ $z = -3$

第十一讲：一次方程组的应用

1. **【答案】** $\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x + 4y = 50 \end{cases}$.
2. **【答案】** $\begin{cases} x + y = 568 \\ y - x = 5 \end{cases}$.
3. B
4. 略
5. 一共有 5 辆车，共 240 名学生.
6. 安排 35 人加工甲种零件，安排 16 人加工乙种零件.
7. 六年级（1）班有 32 人没有参加天文小组，（2）班有 36 人没有参加天文小组.
8. 山上牧童赶羊 20 只，山下牧童赶羊 12 只.
9. 第一个容器 24 升，第二个容器 72 升.
10. 甲现在的年龄是 42 岁，乙现在的年龄是 23 岁.
11. 水流速度为 2 千米/时，船在静水中的速度为 10 千米/时.
12. 竖式无盖纸盒做 200 只，横式无盖纸盒 400 只.
13. 加工零件 77 个，规定时间为 8 小时.
14. 甲每天做 20 个零件，乙每天做 30 个零件
15. 去年收入 20000 元，去年支出 15000 元.
16. 这个三位数为 275 .
17. 1 元纸币有 8 张， 5 元纸币有 2 张，10 元纸币有 2 张.
18. 甲应加工 5 天，乙应加工 4 天，丙应加工 1 天.
19. 甲组植树 25 株，乙组植树 10 株，丙组植树 15 株
20. 该队胜 6 场，平 2 场，负 3 场.

第十二讲 线段的大小比较与画线段的和、差、倍

知识精要

一、直线、射线、线段

1、概念：

①在直线的基础上定义射线、线段：

(1) 直线上的一点和这点一旁的部分叫射线，这个点叫做射线的端点。

(2) 直线上两点和中间的部分叫线段，这两个点叫线段的端点。

② 在线段的基础上定义直线、射线：

(3) 把线段向一方无限延伸所形成的图形叫射线，

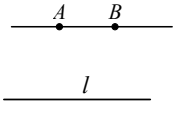
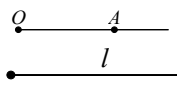
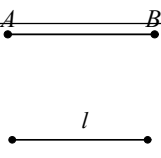
(4) 把线段向两方无限延伸所形成的图形是直线。

2、两个重要公理：

① 经过两点有且只有一条直线，也称为“两点确定一条直线”。

② 两点之间的连线中，线段最短，简称“两点之间，线段最短”。

表示方法：

类型	图示	用两个大写字母表示	用一个小写字母表示	端点	延长线及反向延长线
直线		直线 AB/直线 BA 字母无顺序	直线 l	0 个	无
射线		射线 OA 第一个字母表示端点	射线 l	1 个	有反向延长线
线段		线段 AB/线段 BA 字母无顺序	线段 l	2 个	两者都有

3、线段的大小比较的方法：①度量法，②叠合法。

4、中点：把线段分成两条相等的线段的点叫做这条线段的中点。

二、线段的和、差、倍、分计算

1. 线段上有 1 个点。如线段 AB 上有一点 M



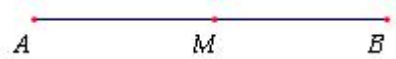
和: $AB = \underline{\quad AM \quad} + \underline{\quad MB \quad}$

差: $AM = \underline{\quad AB \quad} - \underline{\quad MB \quad}$ $BM = \underline{\quad AB \quad} - \underline{\quad AM \quad}$

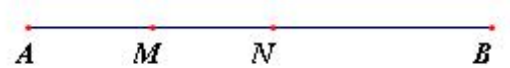
特别: 当 M 是线段的中点时。

倍: $AB = \underline{\quad 2 \quad} AM = \underline{\quad 2 \quad} BM$

分: $AM = \underline{\quad \frac{1}{2} \quad} AB$ $BM = \underline{\quad \frac{1}{2} \quad} AB$



2. 线段上有 2 个点。如点 M、N 是线段 AB 上的两个点。



和: $AB = \underline{\quad AM \quad} + \underline{\quad MN \quad} + \underline{\quad BN \quad}$;

$AN = \underline{\quad AM \quad} + \underline{\quad MN \quad}$; $MB = \underline{\quad MN \quad} + \underline{\quad BN \quad}$

差: $AM = AB - \underline{\quad BM \quad}$; $AM = AN - \underline{\quad MN \quad}$;

$MN = AB - \underline{\quad AM \quad} - \underline{\quad BN \quad}$; $MN = AN - \underline{\quad AM \quad}$

$MN = MB - \underline{\quad BN \quad}$; $NB = AB - \underline{\quad AN \quad}$; $NB = MB - \underline{\quad MN \quad}$ 。

热身练习

一、判断题:

- 1、A、B、C 是直线 l 三个点, 那么直线 AB、直线 BC 和直线 CA 表示的都是直线 l 。(☒)
- 2、O、A、B 三点顺次在同一条直线上, 那么射线 OA 和射线 AB 是相同的射线。(☐)
- 3、线段 AD 是 A、D 两点的距离。(☒)
- 4、若 C 为线段 AB 延长上一点, 则 $AC > AB$ 。(☒)
- 5、经过三点中的每两个, 共可以画三条直线。(☐)
- 6、射线 AP 和射线 PA 是同一条射线。(☐)
- 7、连结两点的线段, 叫做这两点间的距离。(☒)

二、选择题

- 1、下列说法正确的是 (A)

A. 直线上一点和这点一旁的部分叫做射线

- B. 直线是射线的 2 倍
 C. 射线 AB 与射线 BA 是同一条射线
 D. 过两点 P 、 Q 可画出两条射线

2、下列说法正确的是 (B)

- A. 两点之间的连线中, 直线最短
 B. 若 P 是线段 AB 的中点, 则 $AP=BP$
 C. 若 $AP=BP$, 则 P 是线段 AB 的中点
 D. 两点之间的线段叫做者两点之间的距离

3、如果线段 $AB=5\text{cm}$, 线段 $BC=4\text{cm}$, 那么 A , C 两点之间的距离是 (C)

- A. 9cm B. 1cm C. 1cm 或 9cm D. 以上答案都不对

4、在直线 L 上依次取三点 M , N , P , 已知 $MN=5$, $NP=3$, Q 是线段 MP 的中点, 则线段 QN 的长度是 (A)

- A. 1 B. 1.5 C. 2.5 D. 4

5、已知点 C 是线段 AB 上的一点, M , N 分别是线段 AC , BC 的中点, 则下列结论正确的是 (C)

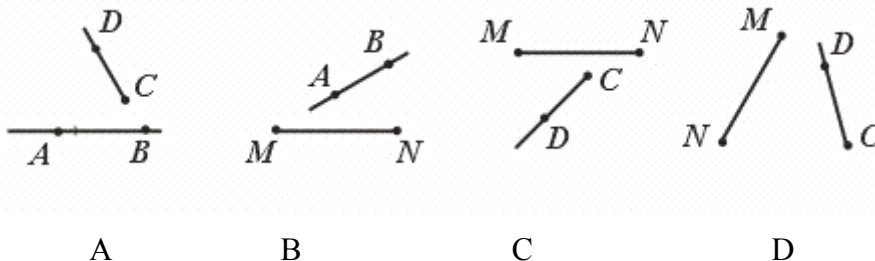
- A. $MC=\frac{1}{2}AB$ B. $NC=\frac{1}{2}AB$ C. $MN=\frac{1}{2}AB$ D. $AM=\frac{1}{2}AB$

6、如图, B 、 C 、 D 是射线 AM 上的一个点, 则图中的射线有 (B)

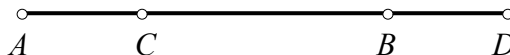


- A. 6 条 B. 5 条 C. 4 条 D. 1 条

7、下列四组图形 (其中 AB 是直线, CD 是射线, MN 是线段) 中, 能相交的一组是 (B)

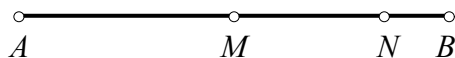


8、如图, 由 $AB=CD$, 可得 AC 与 BD 的大小关系是 (C)



- A. $AC>BD$ B. $AC<BD$ C. $AC=BD$ D. 不能确定

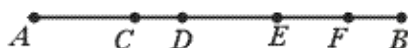
- 9、如图， M 是线段 AB 的中点， N 是线段 AB 上一点， $AB=2a$ ， $NB=b$ ，下列说法中错误的是（ D ）



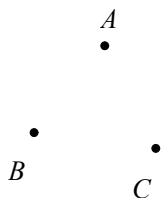
- A. $AM=a$ B. $AN=2a-b$ C. $MN=a-b$ D. $MN=\frac{1}{2}a$

三、填空题

- 1、过平面内的三个点中的每两个画直线，最少可画 1 条直线，最多可画 3 条直线。
2、如图，线段 AB 上有 C 、 D 、 E 、 F 四个点，则图中共有 15 条线段。

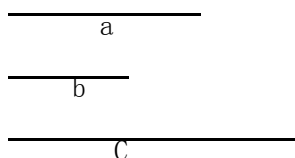


- 3、线段 $AB=6$ cm， $BC=4$ cm，则线段 AC 的长是 10 或 2。
4、点 A 在直线 l 上，我们也说直线 l 过点 A ，我们说连结 AB ，就是画出 以 A 、 B 为端点的线段。
5、延长线段 AB 到 C ，使 AC 的长是 AB 的 4 倍，则 AB 与 BC 的长度的比是 1: 3。
6、如图，已知 M 、 N 是线段 AB 上的两点，且 $MN=NB$ ，则点 N 是线段 MB 的中点， $AM=AB-\underline{2}MN$ ， $NB=\frac{1}{2}(\underline{AB}-\underline{AM})$ 。
7、如图所示根据要求作图：(1)连结 AB ；(2)作射线 AC ；(3)作直线 BC 。



答：略

- 8、已知线段 a ， b ， c ，画出线段 CD ，使 $CD=a+2b-\frac{1}{2}c$ 。



答：略

- 9、平面上有三个点，经过两点画一条直线，则可以画几条直线？四个点呢？

【解析】1 条或 3 条./1 条 4 条或 6 条

10、已知线段 AB，在 AB 的延长线上取一点 C，使 BC=AB，再在 AB 的反向延长线上取一点 D，使 DA=2AB，线段 DB 等于线段 BA 的几倍？线段 CA 是线段 DB 的几分之几？比较线段 AD 和线段 AC 的大小。

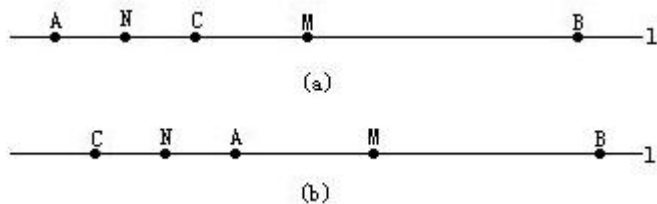
答： $DB = 3AB$ ， $CA = \frac{2}{3}AB$ ， $AD = AC$

11、如图，M 为线段 AB 的中点，且线段 AN=8cm，NB=2cm，则线段 AB= 10CM，MN= 3CM。



精解名题

例 1、在直线 l 上取 A，B 两点，使 AB=10 厘米，再在 l 上取一点 C，使 AC=2 厘米，M，N 分别是 AB，AC 中点．求 MN 的长度．



分析： 因为是在直线上取 C 点，因此有两种情形：C 点在 A 点的右侧或 C 点在 A 点的左侧．

解： 若 C 点在 A 点的右侧(即在线段 AB 上)．因为 AC=2 厘米，N 为 AC 中点，所以 AN=1 厘米；又 AB=10 厘米，M 为 AB 中点，所以 AM=5 厘米．则

$$MN = AM - AN = 5 - 1 = 4 \text{ (厘米)}.$$

若 C 点在 A 点的左侧(即在线段 BA 延长线上)，此时

$$MN = NA + AM = 1 + 5 = 6 \text{ (厘米)}.$$

例 2、(1) 如图 1，已知 A,B 在直线 l 的两侧，在 l 上求一点 P，使 PA+PB 最小；

(2) 如图 2, 已知 A, B 在直线的同侧, 在 l 上求一点 P , 使 $PA+PB$ 最小;

(3) 如图 3, 有一个正方体的盒子 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 在盒子内的顶点 A 处有一只蜘蛛, 而在对角的顶点 C_1 处有一只苍蝇。蜘蛛应沿着什么路径爬行, 才能在最短的时间内捕捉到苍蝇? (假设苍蝇在 C_1 处不动)

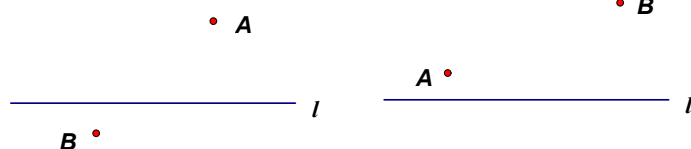


图1



图2

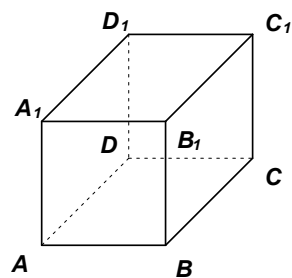


图3

【解析】(1) 如图 1-1, 连接 A, B , AB 与 l 的交点即为所求的 P 点, 利用“两点之间线段最短”, 教师不妨可在其他出处取一点 P' , 显然 $AP'+BP' > AB$.

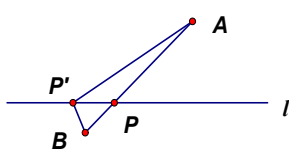


图1-1

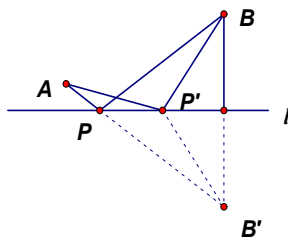


图2-1

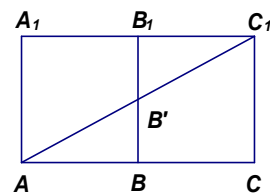
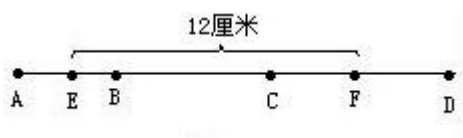


图3-1

(2) 如图 2-1, 作 B 关于 l 的对称点 B' , 连接 AB' 交 l 于点 P , 即为所求的点! 教师可以另取任意一点 P' , 向学生说明为什么这样的情况下符合提议!

(3) 把盒面展开, 使包含点 A 和 C_1 的两个盒面在同一平面内, 如图 3-1 是其中的一种, 根据两点之间线段最短, 只要连接 AC_1 即可, 设 AC_1 与 BB_1 交于点 B' , 则 $AB'+B'C$ 就是最短路线.

例 3、已知: $AB:BC:CD=2:3:4$, E, F 分别是 AB 和 CD 的中点, 且 $EF=12$ 厘米(cm), 求 AD 的长?



分析 线段 EF 是线段 AD 的一部分，题设给出了 EF 的长度，只要知道线段 EF 占全线段 AD 的份额，就可求出 AD 的长了。

解 因为 $AB:BC:CD=2:3:4$ ，E 是 AB 中点，F 是 CD 中点，将线段 AD 9 等分 ($9=2+3+4$) 且设每一份为一个单位，则 $AB=2$ ， $BC=3$ ， $CD=4$ ， $EB=1$ ， $CF=2$ 。从而 $EF=EB+BC+CF=1+3+2=6$ ，

即 EF 占 AD 全长的 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ 。所以

线段 AD 的长 $=12 \div \frac{2}{3} = 12 \times \frac{3}{2} = 18$ (厘米)。

备选例题

例 1、如图， $AB=4BC$ ，D 是 AC 的中点，那么

$$AC = (AB) - (BC) = 4BC - BC = 3BC;$$

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}BC;$$

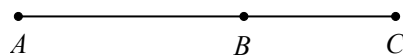
$$DB = (AB) - (AD) = 4BC - \frac{3}{2}BC = \frac{5}{2}BC;$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{(\frac{3}{2})BC}{(\frac{5}{2})BC} = \frac{(3)}{(5)}$$

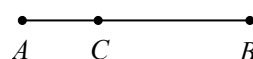


例 2、已知：A，B，C，D 四点共线，若 $AB=3\text{cm}$ ， $BC=2\text{cm}$ ， $CD=4\text{cm}$ ，画出图形，求 AD 长。

【解析】根据 A，B，C，D 四点共线， $AB=3\text{cm}$ ， $BC=2\text{cm}$ ，(先取前两个重要条件画图分析)可得下面两种情况(画图)：



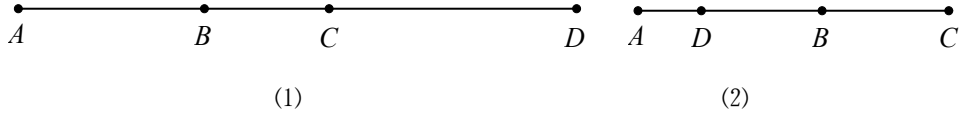
情况 1



情况 2

再参看条件 $CD=4\text{cm}$ ，

对于第一种情况可以得到下面两种可能：



对于第二种情况可以得到下面两种可能：



所以共有四种可能！

如图(1) $AD = 3 + 2 + 4 = 9$ ； 如图(2) $AD = 3 + 2 - 4 = 1$ ；

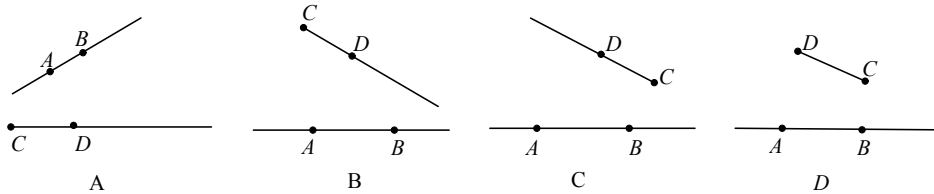
如图(3) $AD = 4 - (3 - 2) = 3$ ； 如图(4) $AD = (3 - 2) + 4 = 5$ 。

巩固练习

1、下列叙述正确的是（ C ）

- A. 可以画一条长 5cm 的直线
- B. 一根拉紧的线是一条直线
- C. 直线 AB 经过 C 点
- D. 直线 AB 与直线 BA 是不同的直线

2、根据直线、射线、线段各自的性质，如下图，能够相交的是（ B ）



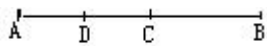
3、已知平面上任意四点 A 、 B 、 C 、 D 过其中每两点画一条直线，最多可以画（ D ）

- A. 6 条 B. 4 条 C. 1 条 D. 6 条，4 条或 1 条

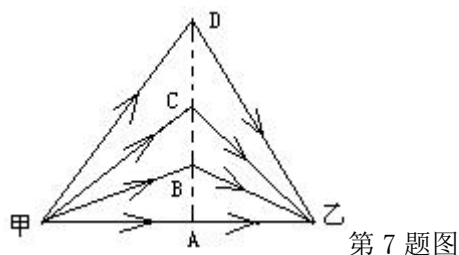
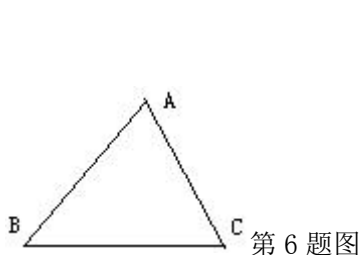
4、线段 AB 上有点 C ，点 C 使 $AC:CB=2:3$ ，点 M 和点 N 分别是线段 AC 和线段 CB 的中点，若 $MN=4$ ，则 AB 的长是（ B ）

- A. 6； B. 8； C. 10； D. 12

5、如图， $BC=4$ cm， $BD=7$ cm， D 是 AC 的中点，则 $AC=$ 6 cm， $AB=$ 10 cm



6、如图，三条线段中，最长的是线段 BC，最短的是线段 AC。



7、如图，从甲地到乙地有四条道路，其中最短的路线是 A，最长的路线是 D。

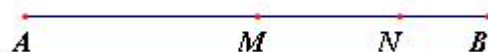
8、如图，点 M、N 是线段 AB 上的两个点，则不同的线段有： AM、MN、NB、MB、AN、AB。

9、如图 上，且线段 $BC=2\text{cm}$ ，则线段 $AC=$ 6CM；

如图二，点 C 在线段 AB 的延长线，且线段 $BC=2\text{cm}$ ，则线段 $AC=$ 10 cm。



10、如图，M 是线段 AB 的中点，线段 $AM=10\text{cm}$ ， $NB=2\text{cm}$ ，则线段 $MN=$ 8 cm。



11、读句画图：如图，A、B、C、D 在同一平面内。

(1) 过点 A 和点 D 作直线；

(2) 画射线 CD；

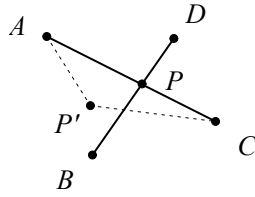
(3) 连结 AB；(4) 连结 BC，并反向延长 BC。



答：略



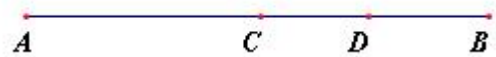
12、如图，A、B、C、D 为 4 个居民小区，现要在四边形 ABCD 内建一个购物中心，试问应把购物中心建在何处，才能使 4 个居民小区到购物中心的距离之和最小，说明理由。



【解析】应该建在 AC ， BD 的交点 P 上，如图所示．首先我们使购物中心到 A 和 C 的距离之和最小，那么购物中心就应该建在线段 AC 的某点处．这是因为如果点 P 不在 AC 上，根据两点之间，线段最短，可以知道 $P'A + P'C > AC$ ．同时我们也能看出，购物中心建在线段 AC 上的任意一点，都可以保证购物中心到 A ， C 距离之和最小．同理，购物中心若到 B ， D 之和距离最小，也必须建在线段 BD 上，这样购物中心就必须建在 AC ， BD 的交点 P 上．

13、如图， C 为线段 AB 的中点， D 在线段 CB 上， $DA=8$ ， $DB=6$ ，求 CD 的长。

解：因为 $DA=8$ ， $DB=6$



所以 $AB = \underline{AD} + \underline{DB} = \underline{8} + \underline{6} = \underline{14}$

因为 C 为线段 AB 的中点

所以 $AC = \frac{1}{2} \underline{AB} = \frac{1}{2} \times \underline{14} = \underline{7}$

所以 $CD = \underline{BC} - \underline{BD} = \underline{7} - \underline{6} = \underline{1}$

14、如图， C 为线段 AB 的中点，线段 $AB=12\text{cm}$ ， $CD=2\text{cm}$. 求线段 DB 的长。



答：4cm

15、如图， M 是线段 AB 的中点，点 C 在线段 AB 上，且 $AC=4\text{ cm}$ ， N 是 AC 的中点， $MN=3\text{ cm}$ ，求线段 CM 和 AB 的长．



解： $CM=1\text{cm}$ $AB=10\text{cm}$

第十四讲 长方体的概念

【知识梳理】

1. 长方体的元素及特征：

(1) 元素：长方体有六个面，八个顶点，十二条棱。

(2) 特征：①长方体的每个面都是长方形；

②长方体的十二条棱可以分成三组，三组分别是长方体的长、宽、高，每组中的四条棱的长度相等；

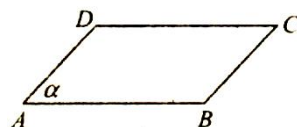
③长方体的六个面可以分成三组，每组中的两个面的形状和大小都相等。

2. 长方体直观图的画法：

(1) 平面的概念及表示：

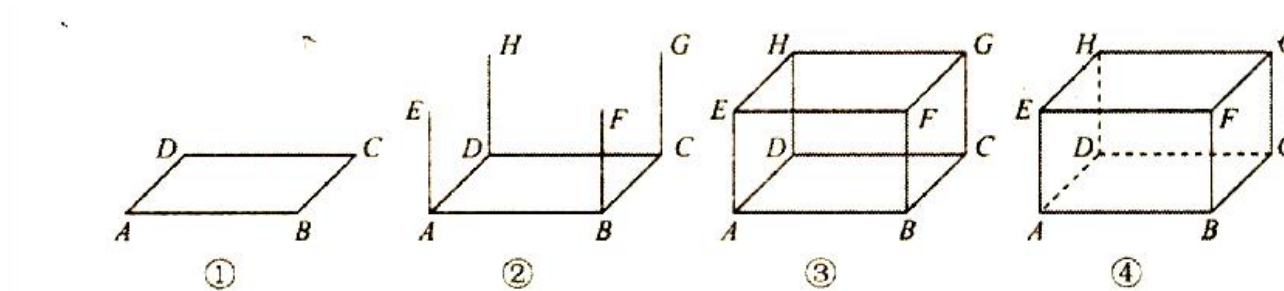
①概念：在数学中，平面是平的，无边无沿，我们可以画一个平行四边形来表示它，把水平放置的平面画成一边是水平位置，另一面是水平线所夹的角为 45° 的平行四边形。

②表示：平面可以用平行四边形的顶点字母表示，记作平面 $ABCD$ ；也可以在表示平面的平行四边形的一个角上写上小写的字母 α ，将平面记作平面 α （如右图所示）。



(2) 长方体的直观画法：

斜二侧画法：水平放置的长方体直观图画法的基本步骤：



第一步：画平行四边形 $ABCD$ ，使 AB 等于长方体的长， AD 等于长方体宽的一半， $\angle BAD = 45^\circ$ （图①）；

第二步：过 A 、 B 分别画 AB 的垂线 AE 、 BF ，过 C 、 D 分别画 CD 的垂线 CG 、 DH ，使它们的长度都等于长方体的高（图②）；

第三步：顺次联结 $EFGH$ （图③）；

第四步：将被遮住的线段改为虚线（隐藏线）表示（图④）；

这样长方体的直观图就画成了。长方体通常表示为：长方体 $ABCD-EFGH$ 。它的六个面通常分别表示为：平面 $ABCD$ 、平面 $ABFE$ 、平面 $BCGF$ 等。

3. 长方体中棱与棱位置关系的认识：（如上图④长方体 $ABCD-EFGH$ 所示）

(1) 相交：如果直线 AB 与直线 BC 在同一平面内，具有唯一公共点，那么称这两条直线的位置关系为相交，读作：直线 AB 与直线 BC 相交。

(2) 平行：如果直线 AB 与直线 CD 在同一平面内，但没有公共点，那么称这两条直线的位置关系为平行，记作 $AB \parallel CD$ ，读作：直线 AB 与直线 CD 平行。

(3) 异面：如果直线 AB 与直线 EH 既不平行也不相交，那么称这两条直线的位置关系为异面，读作：直线 AB 与直线 EH 异面。

【典型例题讲解】

题型一：概念理解题

【例 1】(1)长方体有____个面，每个面都是____，相对的两个面____和____都相同。

(2)长方体有____条棱，如果按棱的长短分组，并把长度相等的棱作为一组，那么长方体的棱最多可以分成____组，每组有____条棱。

(3)长方形有____个顶点，如果在长方体的表面上，将每两个顶点联结成线段，按这些线段的长短分组，并把长度相等的线段作为一组，那么最多可以分成____组。

(4)长方体____是正方体，正方体____是长方体。(填“一定”、“不一定”或“一定不”)

【分析】理解及应用长方体的元素及特征。长方体有六个面，八个顶点，十二条棱。①长方体的每个面都是长方形，特殊情况下可以为正方形；②长方体的十二条棱可以分成三组，三组分别是长方体的长、宽、高，每组中的四条棱的长度相等；③长方体的六个面可以分成三组，每组中的两个面的形状和大小都相等。

【解析】(1) 6, 长方形，形状，大小；(2) 12, 3, 4；(3) 8；6；(4) 不一定，一定。

【例 2】在右图所示的长方体中，

(1)从正面看，看不见的棱有_____。

(2)与棱 EH 相等的棱有_____。

(3)与平面 $BCGF$ 相对的平面有_____。

(4)位于水平位置的平面有_____。

【分析】能从图中认识长方体各元素，初步找出其相应的位置及大小关系。要清楚图中的虚线表示被遮住的线段（隐藏线）。

【解析】(1) EH 、 DH 、 GH ；

(2) AD 、 BC 、 FG ；

(3) 平面 $ADHE$ ；

(4) 平面 $ABCD$ 和平面 $EFGH$ 。

【例 3】下面各种平面中，可以看作水平面的是()。

A. 光滑的镜面

B. 玻璃幕墙

C. 长方体的各个面

D. 斜置的杯中的液面

【分析】本题考查水平面与平面的概念，注意二者之间的区别。水平面是平面，但平面不一定是水平面，现实生活中，镜面、墙面一般是直立的，不是水平面；长方体的六个面不可能都水平放置，所以也不可能是水平面；只有杯子里的液面。无论杯子如何放置，液面都是水平面。

【答案】D。

【例 4】如图，在长方体 $ABCD-EFGH$ 中。

(1)哪些棱与棱 AE 平行？

(2)哪些棱与棱 BC 相交？

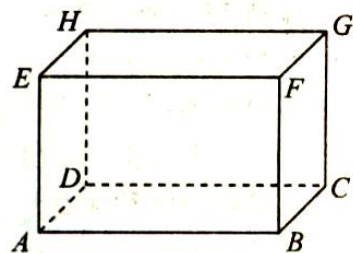
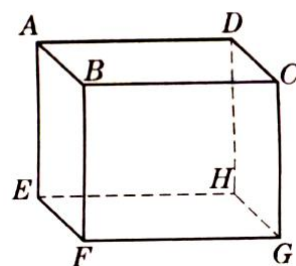
(3)哪些棱与棱 DH 的位置关系为异面？

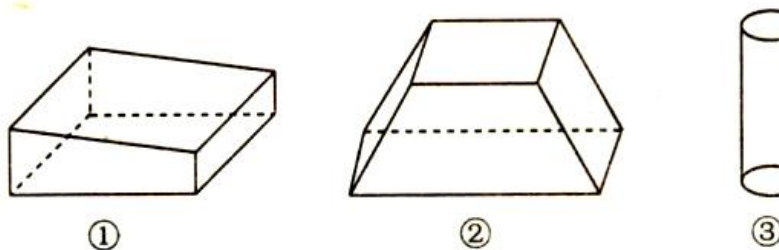
【分析】认识长方体中棱与棱的各种位置关系：相交、平行和异面。如果两条直线在同一平面内，具有唯一公共点，那么称这两条直线的位置关系为相交。如果两条直线在同一平面内，但没有公共点，那么称这两条直线的位置关系为平行。如果两条直线既不平行也不相交，那么称这两条直线的位置关系为异面。

【解析】(1) BF 、 CG 、 DH ；(2) AB 、 BC 、 CD 、 CB ；(3) AE 、 BF 、 CG 、 DH 。

借题发挥】

1. 如下图所示图形中，哪些是长方体？





【答案】④

2. 填空：如图所示，在长方体中，与棱 AE 相等的棱是_____，与面 $ABCD$ 相对的面是_____。从点 E 出发的棱有_____条。它们是_____。

【答案】 1. DH 、 CG 、 BF ；面 $EFGH$ ；3； EA 、 EF 、 EH 2.

3. 判断题：（正确的用“√”表示，错误的用“×”表示）

- (1)两条不重合的直线，如果不相交，那么一定平行。 ()
- (2)在两个不同平面上的直线一定是异面直线。 ()
- (3)在长方体中，与某棱平行的棱共有 4 条。 ()
- (4)在长方体中，与某棱相交的棱共有 4 条。 ()
- (5)在长方体中，与某棱的位置关系与异面的棱总有 4 条。 ()

【答案】× (2)× (3)× (4)√ (5)√

题型二：画图题

【例 5】画一个长方体，使它的长、宽、高分别等于 4 厘米、3 厘米、2 厘米。

【分析】考查长方体的直观画法：斜二侧画法的步骤。

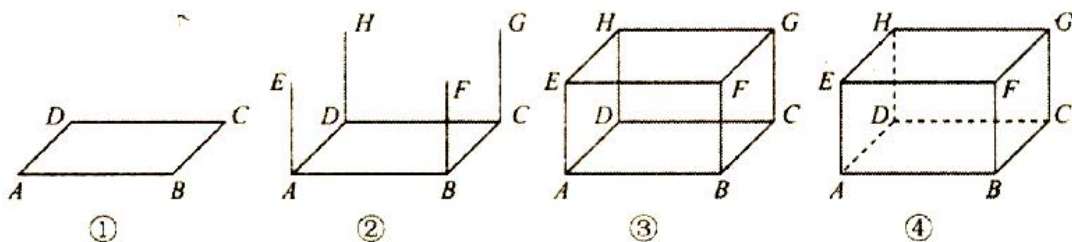
【解析】步骤：第一步：画平行四边形 $ABCD$ ，使 $AB = 4cm$ ， AD 等于长方体宽的一半，即 $AD = 1.5cm$ ， $\angle BAD = 45^\circ$ （图①）；

第二步：过 A 、 B 分别画 AB 的垂线 AE 、 BF ，过 C 、 D 分别画 CD 的垂线 CG 、 DH ，使它们的长度都等于长方体的高，即 $AE = 2cm$ （图②）；

第三步：顺次联结 $EFGH$ （图③）；

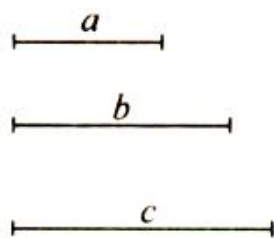
第四步：将被遮住的线段改为虚线（隐藏线）表示（图④）；

这样长、宽、高分别等于 4 厘米、3 厘米、2 厘米长方体 $ABCD - EFGH$ 的直观图就画成了。

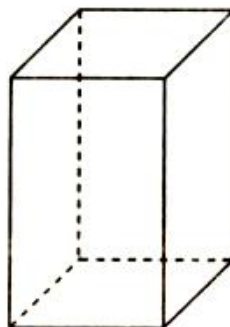


【例 6】如图①所示，已知线段 a 、 b 、 c ，画一个长为 a ，宽为 b ，高为 c 的长方体直观图。

【解析】用斜二侧画长方体时要注意三点：(1)长方体直观图中宽是等于已知宽的二分之一；(2)长方体中三个面都是线段联结，另外三个面被遮住的线段改用虚线表示；(3)长方体中有两个面是长方形，另四个面是平行四边形。



①



②

【解】画出的直观图如图②所示

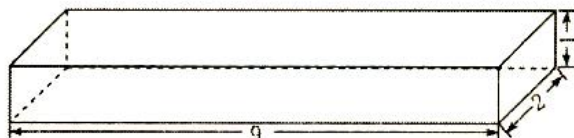
【借题发挥】

1. 画一个长方体，使它的长、宽、高分别等于 5 厘米、4 厘米、2 厘米.

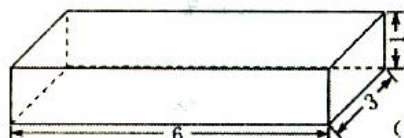
【答案】略.

2. 一个长方体的体积是 18 厘米^3 ，其长、宽、高均为整数厘米，且都不相等，（其中长 > 宽 > 高），画出这个长方体.

【答案】因为 $18 = 1 \times 2 \times 9 = 1 \times 3 \times 6$ ，则所画的长方体的长，宽，高分别是 9 厘米，2 厘米，1 厘米或 6 厘米，3 厘米，1 厘米，画出图形分别如图 8-1-8 ①、②所示.



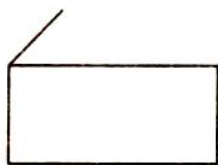
①



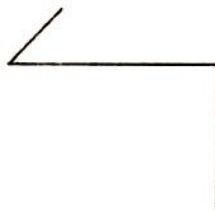
②

（图中单位：厘米）

【例 6】如图所示，补画下面的图形，使它们成为长方体的直观图.



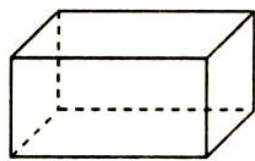
①



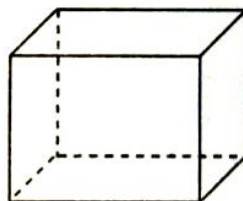
②

【分析】补画长方体时要想清楚补画的面是画长方形还是平行四边形，补画的棱是画线段还是画虚线段，一般我们先把一个面画完整，再画上其他面.

【解】补画的图形如图所示.



①



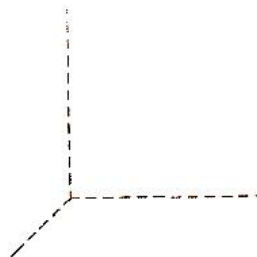
②

【借题发挥】把下列长方体补画完整：

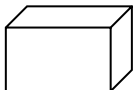
(1)



(2)



【知识梳理】

	面	棱	顶点
长方体 	6 个；长方形（可能有两个相对面是正方形）相对面面积相等	12 条，分三组，分别为长、宽、高，相对 4 条棱长度相等	8 个
正方体 	6 个；正方形面积都相等	12 条；长度都相等	8 个

长方体的相关量的计算：（正方体是特殊的长方体）

（1）长方体的表面积的计算： $S = 2(ab + bc + ac)$ ；正方体的表面积的计算： $S = 6a^2$

（2）长方体的体积的计算： $V = abc$ ；正方体的体积的计算： $V = a^3$

（3）长方体的棱长和： $l = 4(a + b + c)$ ；正方体的棱长和： $l = 12a$

【典型例题讲解】

题型一：有关长方体的面积、体积和棱长总和的综合计算.

【例 1】有一个长方体的架子，它的棱长和是 52 厘米，其中长比宽多 3 厘米，高是宽的 $\frac{1}{2}$ ，求这个长方体的体积.

【解析】本题的关键是求出长方体的长、宽、高各是多少厘米，可以设长方体的宽为 x 厘米，那么长就是 $(x + 3)$ 厘米，高是 $\frac{1}{2}x$ 厘米，由棱长和是 52 厘米可列出方程，最后求得长方体的体积.

【解】设长方体的宽为 x 厘米，那么长就是 $(x + 3)$ 厘米，高是 $\frac{1}{2}x$ 厘米. 由题意，得

$$4\left(x + x + 3 + \frac{1}{2}x\right) = 52.$$

解方程，得 $x = 4$.

$$\text{所以 } x + 3 = 4 + 3 = 7, \quad \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

$$7 \times 4 \times 2 = 56 (\text{厘米}^3).$$

答：长方体的体积是 56 厘米³.

【例 2】一个长方体纸盒，它的长是 8 厘米，宽是长的 $\frac{3}{4}$ ，高是宽的一半，求长方体的棱长总和是多少厘米？

【解析】因为长方体一共有 12 条棱分别按长、宽、高分组能分成 3 组，每组棱的长度是相

等的，所以长度为8厘米的棱有4条，宽度为 $\left(8 \times \frac{3}{4}\right)$ 厘米的棱有4条，高度为 $\left(8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right)$

厘米的棱有4条。

【解】设棱长的总和为 L ，则

$$\begin{aligned} L &= 8 \times 4 + \left(8 \times \frac{3}{4}\right) \times 4 + \left(8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) \times 4 \\ &= 4 \times \left(8 + 8 \times \frac{3}{4} + 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= 4 \times (8 + 6 + 3) \\ &= 68 (\text{厘米}) \end{aligned}$$

答：长方体的棱长总和是68厘米。

【方法指导】在掌握长方体的长、宽、高及其体积、棱长等的计算公式后，就要有能力分析题目中数据，从中得到相应的等量关系式进行计算求解。

【借题发挥】

1. 一个长方体，长缩小4倍，高扩大2倍，宽扩大3倍，体积怎样变化？

【答案】体积扩大了 $\frac{1}{4} \times 2 \times 3 = \frac{3}{2}$ 倍

2. 已知长方体中以同一个顶点为公共端点的三条棱的长分别为3cm、4cm和5cm，求这个长方体的表面积和体积。

【答案】以同一个顶点为公共端点的三条棱分别为长、宽和高，所以3cm、4cm和5cm是这个长方体的长、宽和高的长度，所以根据公式就可以得到表面积为 94cm^2 ，体积为 60cm^3 。

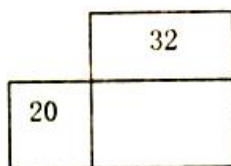
3. 把一根长36分米的木条截开后刚好能搭一个正方体架子，求这个正方体的表面积和体积。

【答案】由题意可以得知这个正方体的棱长均为 $36 \div 12 = 3$ 分米，所以根据公式可以得到这个正方体的表面积为54平方分米，体积为27立方分米。

4. 一个长方体盒子，它的长是12厘米，宽是长的 $\frac{3}{4}$ ，高是宽的 $\frac{1}{3}$ ，求长方体的表面积、体积和棱长总和是多少厘米？

【答案】由题意可得，长为12厘米，宽为 $12 \times \frac{3}{4} = 9$ 厘米，高为 $9 \times \frac{1}{3} = 3$ 厘米，所以可以得到表面积为 $2 \times (12 \times 9 + 9 \times 3 + 12 \times 3) = 342$ （厘米²），体积为 $12 \times 9 \times 3 = 324$ ，棱长总和为 $4(12 + 9 + 3) = 96$ 。

【例3】如图所示，一个体积为160厘米³的长方体中两个相邻侧面的面积分别是20厘米²、32厘米²。求这个长方体的底面积，且画出这个长方体。



【解析】图中的三个长方形是长方体中过同一个点的三个面．可引入三个字母，根据题意列出三个等式．

【解】设长方体的长、宽、高分别为 a 、 b 、 h ．由题意，得

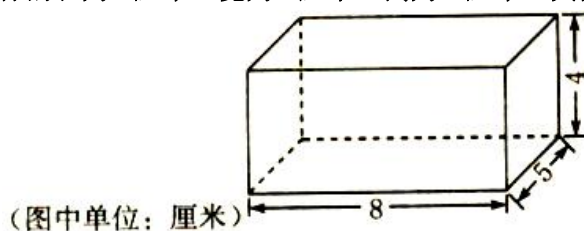
$$\begin{cases} ah = 32, & \text{①} \\ bh = 20, & \text{②} \\ abh = 160 & \text{③} \end{cases}$$

将(1)代入(3)，得 $32b = 160$ ，解方程，得 $b = 5$

将(2)代入(3)，得 $20a = 160$ ，解方程，得 $a = 8$ ．

所以长方体的底面积为 $ab = 8 \times 5 = 40$ 厘米²，把 $a = 8$ 代入 $ah = 32$ ，求得 $h = 4$ ．

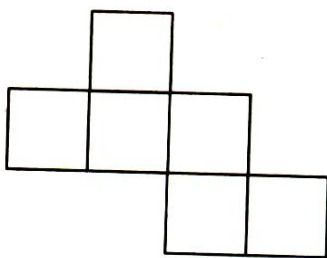
所以这个长方体的长为8厘米，宽为5厘米，高为4厘米，其图如图所示：



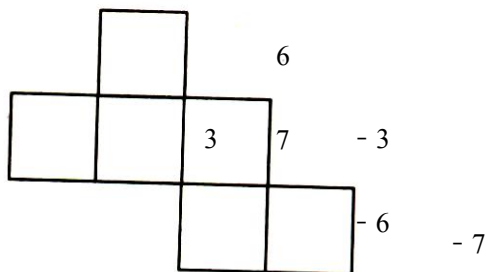
【方法指导】要建立起空间感，通过认识长方体的展开图来解答．

【借题发挥】

如图是一个长方体纸盒的展开图，请把-3、6、7、3、-6、-7分别填入6个正方形，使得右图折成正方体纸盒后，相对面上的两数互为相反数．



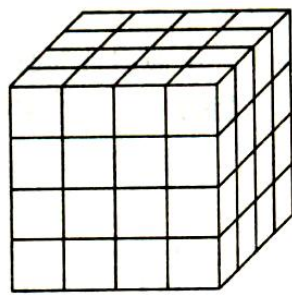
【答案】可以把某一个面（这个面所在长方体的四条边中带面的边数越多越好）作为底面，依次把侧面折起来，就比较容易折成一个长方体．多加练习达到通过观察就能从长方体的平面展开图中，找出相对应的立体图的各个面．所填答案见下图．



题型二：图形的分析

【例4】把一个棱长为4厘米的正方体的六个面都涂上红色，将它的棱四等分，然后从等分点把正方体锯开（如图所示）．

(1)能得到多少个棱长为1厘米的小正方体？



(2)三个面都涂有红色的小正方体有多少个？

(3)两个面都涂有红色的小正方体有多少个？

(4)一个面涂有红色的小正方体有多少个？

(5)有没有各面都没有涂颜色的小正方体？如果有，那么有多少个？

【解析】(1)从正方体的体积上考虑：大正方体的体积为 $4^3 = 64$ （立方厘米），小正方体体积为 $1^3 = 1$ （立方厘米），所以能得到64个棱长为1厘米的小正方体。

(2)位于原顶点位置的小正方体三面涂色，正方体有八个顶点，所以三面涂色的小正方体有8个。

(3)位于除顶点位置外的原棱上的小正方体两面涂色，每条棱上有 $4 - 2 = 2$ （个），所以共 $2 \times 12 = 24$ （个）。

(4)位于原六个面上的（除去前两种情况）小正方体一面涂色，每个面上有 $16 - 4 - 8 = 4$ （个），所以六个面上共有24个。

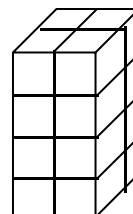
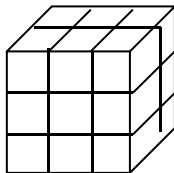
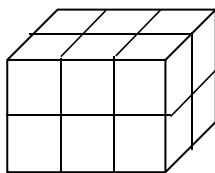
(5)未涂色的小正方体应该是总的个数减去前三种情况，所以 $64 - 8 - 24 - 24 = 8$ （个）。

【答案】(1)64个(2)8个(3)24个(4)24个(5)有，8个

【方法指导】把长方形的各要素：定点、棱和面等作为此题的解题出发点考虑，可以使问题简单化、条理化，避免盲目寻找造成的重数或漏数。

【借题发挥】

1. 下图中的长方体和正方体都是由棱长1厘米的小正方体摆成的，它们的长、宽、高各是多少厘米？



【答案】长为3厘米，宽为2厘米，高为2厘米；长为3厘米，宽为2厘米，高为3厘米；长为2厘米，宽为2厘米，高为4厘米。

2. 有一个棱长30厘米的正方体木块，每面都涂上红漆。现在把它锯成棱长是10厘米的小正方体。请问：

(1) 需要锯几次？能锯成多少个小正方体？

(2) 四面都有红漆的小正方体有多少个？

(3) 三面都有红漆的小正方体有多少个？

(4) 两面有红漆的小正方体有多少个？

(5) 一面有红漆的小正方体有多少个？

(6) 没有红漆的小正方体有多少个？

【答案】(1) 6 次，27 个；(2) 0 个；(3) 8 个；(4) 12 个；(5) 6 个；(6) 1 个.

题型三：图形的拼凑

【例 5】(1) 把五个边长为 1 厘米的小正方体拼成一个长方体，则此长方体的棱长的和为多少？表面积为多少？

(2) 把六个边长为 1 厘米的小正方体拼成一个长方体，则此长方体的棱长的和为多少？表面积是多少？

【解析】(1) 五个小长方体只有一种拼法，拼成的长方体三条棱长分别是 5 厘米、1 厘米、1 厘米. 所以棱长的和为 $(5+1+1) \times 4 = 28$ (厘米). 表面积为 $(5 \times 1 + 5 \times 1 + 1 \times 1) \times 2 = 22$ (平方厘米).

(2) 六个小长方体有两种拼法 (因为 $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$). 其中一种拼成的长方体三条棱长分别为 6 厘米、1 厘米、1 厘米. 所以棱长的和为 $(6+1+1) \times 4 = 32$ (厘米), 表面积为 $(6 \times 1 + 6 \times 1 + 1 \times 1) \times 2 = 26$ (平方厘米). 另一种拼成的长方体三条棱长分别为 3 厘米、2 厘米、1 厘米, 所以棱长的和为 $(3+2+1) \times 4 = 24$ (厘米), 表面积为 $(3 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 2) \times 2 = 22$ (平方厘米).

【答案】(1) 28 厘米，22 平方厘米；

(2) 两种可能：32 厘米，26 平方厘米或 24 厘米，22 平方厘米.

【借题发挥】把四个边长为 1 厘米的小正方体拼成一个立方体，则此立方体的棱长的和为多少？表面积为多少？体积为多少？

【答案】有两种可能：(1) 长方体的三条棱分别长为 4 厘米、1 厘米、1 厘米，由此得：棱长的和为 $(4+1+1) \times 4 = 24$ (厘米)，表面积为 $(4 \times 1 + 4 \times 1 + 1 \times 1) \times 2 = 18$ (平方厘米)，体积为 $4 \times 1 \times 1 = 4$ (立方厘米) .

(2) 长方体的三条棱分别长为 2 厘米、1 厘米、2 厘米，由此得：棱长的和为 $(2+1+2) \times 4 = 20$ (厘米)，表面积为 $(2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 2) \times 2 = 16$ (平方厘米)，体积为 $2 \times 1 \times 2 = 4$ (立方厘米) .

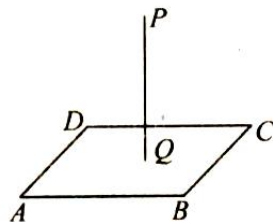
第十五讲 长方体中的位置关系

【知识梳理】

1. 平面与直线垂直:

如图所示, 直线 PQ 垂直于平面 $ABCD$, 记作: 直线 $PQ \perp$ 平面 $ABCD$, 读作:

直线 PQ 垂直于平面 $ABCD$.



2. 直线与平面垂直的检验方法:

(1) “铅垂线”检验: 用一根细绳, 一端系一重物, 另一端用手提起, 使重物悬空, 静止后的这根细绳是垂直于水平面的直线, 我们通常称为铅垂线, 用铅垂线可以检验细棒是否垂直于水平面, 如果铅垂线能与细棒紧贴, 那么细棒垂直于水平面.

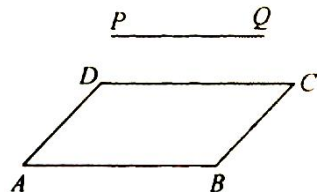
(2) “三角尺”检验: 用三角尺可以检验细棒是否垂直于墙面. 如果两把三角尺各有一条直角边紧贴墙面且位置相交, 另一条直角边都能紧贴细棒, 那么细棒垂直于墙面.

(3) “合页型折纸”检验: 将一张长方形的硬纸片对折, 然后张开一个角度, 我们把这个制作称为合页型折纸, 如果将合页型折纸立于桌面, 那么可以看到折痕垂直于桌面, 若在桌面上立着一根细棒, 折痕能紧贴细棒, 那么细棒垂直于桌面.

3. 直线与平面平行:

如图所示, 直线 PQ 平行于平面 $ABCD$, 记作: 直线 $PQ \parallel$ 平面 $ABCD$,

读作: 直线 PQ 平行于平面 $ABCD$.



4. 直线与平面平行的检验:

(1) “铅垂线”检验: 铅垂线检验黑板的边沿是否平行于地面. 从黑板边沿的两个不同的点放下铅垂线, 使铅垂线的下端刚好接触地面. 如果从这两个不同点到铅垂线的下端的线段的长度相等, 那么黑板的边沿与地面平行. 类似地用铅垂线法可以检验直线与水平面平行.

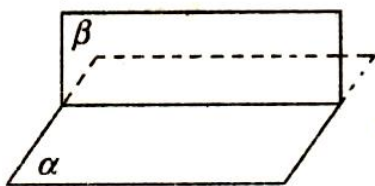
(2) “长方形纸片”检验: 一边贴合在被检验平面内, 观察另一边是否与被检验直线重合. 若重合, 则直线与平面平行.

【注意】“长方形纸片”检验充分利用了长方形一组对边平行的性质, 所以也可以用具有这一性质的平行四边形纸片或梯形纸片.

5. 平面垂直于平面:

如图所示, 平面 α 垂直于平面 β , 记作: 平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 读作: 平面 α 垂直于平面

β .



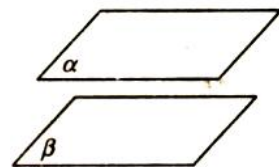
6. 平面与平面垂直的检验:

- (1) 铅垂线检验；
- (2) 合页型折纸检验；
- (3) 三角尺检验。

检验时要观察“铅垂线”、“折痕”、“三角尺的公共边”能否与另一个面紧贴，从而确定两个面的位置关系是否垂直。

7. 平面与平面平行：

如图所示，平面 α 平行于平面 β ，记作：平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ，读作：平面 α 平行于平面 β 。



8. 平面与平面平行的检验：

“长方形纸片”检验：

用长方形纸片可以检验两块硬纸板是否平行，把长方形纸片放在两块硬纸板之间，按交叉的方向放两次，使纸片的一边都紧贴一块硬纸板，再观察它的对边，如果对边都能与另一块硬纸板紧贴，那么这两块硬纸板平行。

【典型例题讲解】

题型一： 直线与平面、平面与平面位置关系的理解及判断

【例1】如右图所示，在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，

- (1) 写出所有与棱 AB 垂直的面；
- (2) 写出所有与平面 $EFGH$ 垂直的棱。

【分析】与棱 AB 垂直的面只有两个，分别过 A 、 B 两点的平面 $AEHD$ 、面 $BFGC$ ，与平面 $EFGH$ 垂直的棱即为图中的四条高 AE 、 BF 、 CG 、 DH 。

【解析】(1) 平面 $AEHD$ 、平面 $BFGC$ ；

(2) 棱 AE 、棱 BF 、棱 CG 、棱 DH 。

【方法总结】理解平面与直线的垂直的概念，并应用概念在直观图中进行判断。

【例2】一个正方体的边长是3厘米，求与底面平行的棱长和是多少？

【分析】在正方体中与一个面平行的棱有4条，即为该面相对的面四条边，由于这四条边的长都是3厘米，所以与底面平行的棱长和是 $3\text{厘米} \times 4 = 12\text{厘米}$ 。

【解析】12厘米。

【方法总结】理解直线与平面平行的概念，能在长方体等各种直观图中找出与平面平行的所有直线，之后可以进行相应的计算。

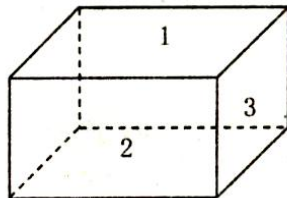
【例3】如图所示，在一个正方体的三个面上分别写上1、2、3，在与这三个面相对的面上依次写上4、5、6（1的对面写上4，依次类推）。如果与一个面垂直的面上的数字之和是14，那么这个面上的数字是多少？

【分析】首先要明确与一个面垂直的面有四个。其次通过分情况讨论得到最后的答案。

(1) 与1垂直的面有4个，分别是3和它的对面6、2和它的对面5，所以 $3+6+2+5=16$ 。不对。

(2) 与2垂直的面有4个，分别是1和它的对面4、3和它的对面6，所以 $1+4+3+6=14$ 。对。

(3) 类似可以求出与3垂直的四个面数字之和为12。所以只有与2垂直的面上数字之和为14。



【解析】2.

【方法总结】在熟练掌握长方体的各要素及其对应关系以及平面与平面垂直的概念的基础上，先判断出与某一平面垂直的平面有哪些，之后可以进行相关的计算.

【例4】举出三个平面与平面平行的生活实例.

【解析】(1)桌面与地面平行；

(2)教室的前后两个墙面平行；

(3)书架的顶面与底面平行.

【借题发挥】

如右图所示回答下列问题：

1. 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，已知 $AB=4$ 厘米， $AE=5$ 厘米， $AD=2$ 厘米，那么与平面 $BCGF$ 垂直的棱长和是多少？

【答案】与平面 $BCGF$ 垂直的棱有棱 AB 、棱 EF 、棱 CD 和棱 GH ，棱长和是 $4 \times 4 = 16$ (厘米)

2. 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，已知 $AB=6$ 厘米， $AE=4$ 厘米， $AD=2$ 厘米，求与棱 EF 垂直的平面的面积和是多少？

【答案】与棱 EF 垂直的平面有平面 $ADHE$ 和平面 $BCGF$ ，所以与棱 EF 垂直的平面的面积和 $2 \times 2 \times 4 = 16$ (厘米²).

3. 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，已知 $AB=6$ 厘米， $AE=4$ 厘米， $AD=4$ 厘米，与面 $EFGH$ 平行的棱长和是多少？

【答案】与面 $EFGH$ 平行的棱有棱 AB 、棱 BC 、棱 CD 和棱 DA ，由此可以算出棱长总和为 $2 \times (6 + 4) = 20$ (厘米). 所以与面 $EFGH$ 平行的棱长和是 20 厘米.

4. 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，已知 $AB=4$ 厘米， $AE=6$ 厘米， $AD=4$ 厘米，与棱 EF 平行的平面的面积和是多少？

【答案】与棱 EF 平行的面有面 $ABCD$ 和面 $CGHD$. 然后算出这两个面的面积和 $4 \times 4 + 6 \times 4 = 40$ (厘米²). 所以与棱 EF 平行的平面的面积和是 40 厘米².

5. 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，长、宽、高分别是 6 厘米、4 厘米和 3 厘米，求与面 $ABCD$ 垂直的面的面积和是多少？

【答案】与面 $ABCD$ 垂直的面有：面 $ADHE$ ，面 $ABFE$ ，面 $BCGF$ ，面 $DCGH$ ，与面 $ABCD$ 垂直的面的面积和是 $2 \times 3 \times 4 + 2 \times 6 \times 3 = 60$ (厘米²).

题型二：直线与平面、平面与平面位置关系的检验

【例5】细棒插入黄沙堆中，检验细棒是否垂直于地面常用的方法是().

A. 合页型折纸检验法

B. 三角尺检验法

C. 铅垂线检验法

D. 长方形纸片检验法

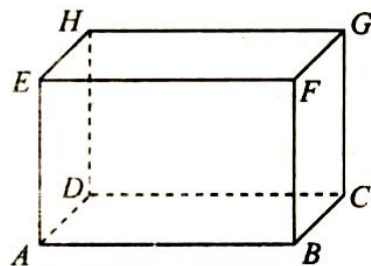
【分析】由于细棒插在黄沙堆中，不方便用合页型折纸的折痕或三角尺的一边紧贴细棒，而铅垂线是用于检验直线与水平面的垂直关系，用于检验细棒与地面垂直最适合.

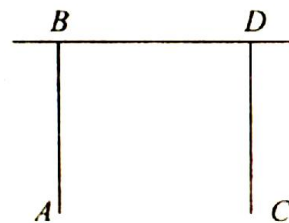
【解析】C

【方法总结】理解直线与平面垂直的三种检验方法：“铅垂线”检验、“三角尺”检验和“合页型折纸”检验，并能结合实际情况用适当的方法进行检验，即要灵活应用三种检验方法.

【例6】如果检验单杠（如右图所示）是否与地面平行？请说明方法.

【分析】如图所示， AB 、 CD 相当于两条铅垂线，测量线段 AB 、 CD 的长，发现 $AB = CD$ ，从而说明单杠平行于地面.



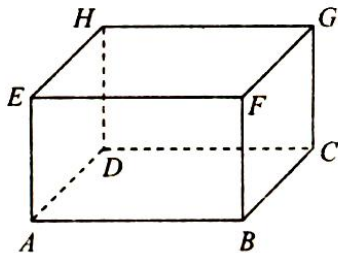


找一张长方形硬纸片(充分大), 一边紧贴地面, 发现另一边能够与单杠 BD 重合, 说明单杠平行于地面.

【解析】平行; 用铅垂线检验或长方形纸片检验.

【方法总结】先利用一定的几何性质来说明直线与平面的平行关系, 之后要对直线与平面的平行关系进行检验, 对于所讲两种方法: “铅垂线” 检验和 “长方形纸片” 检验, 要根据具体情况灵活应用.

【例 7】如图所示, 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中, 写出所有垂直于平面 $BCGF$ 的平面, 并说明你是怎样检验的.



【分析】找现成的“合页型折纸”, 在长方体中, 长方体 $ABFE$ 和长方形 $EFGH$ 组成一个“合页型折纸”, 折痕 EF 紧贴“平面 $ABFE$ ”, 边 BF 、 FG 贴合在“平面 $BCGF$ ”上, 所以有平面 $ABFE$ 与平面 $BCGF$ 垂直, 其余同理.

【解析】平面 $ABFE$ 、平面 $EFGH$ 、平面 $CDHG$ 、平面 $ABCD$;

合页型折纸.

【方法总结】理解平面与平面垂直的概念, 在直观图中找出与某一个面垂直的所有平面, 并会用适当的方法对其进行检验.

【例 8】在长方体 $ABCD-EFGH$ 中 (如图所示), (1) 与平面 $ABFE$ 平行的平面有哪些? 说明你的检验的方法.

(2) 互相平行的平面有几对? 写出这些平面.

【分析】找现成的“长方形纸片”, 把长方形纸片 $BCGF$ 和长方形纸片 $EFGH$ 可以看作把长方形纸片交叉放二次, 边 BF 、 EF 紧贴“平面 $ABFE$ ”, 边 CG 、 GH 都紧贴“平面 $DCGH$ ”. 所以平面 $ABFE \parallel$ 平面 $DCGH$.

【解析】(1) 平面 $DCGH$, “长方形纸片” 检验;

(2) 互相平行的平面有 3 对, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $EFGH$ 、平面 $BCGF \parallel$ 平面 $ADHE$ 、平面 $ABFE \parallel$ 平面 $DCGH$.

【方法总结】理解平面与平面的平行关系, 能从直观图中熟练地找出相互平行的平面, 并能用适当的方法对所找到的平行平面进行检验.

【借题发挥】

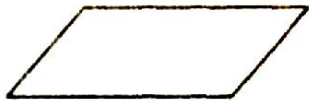
1. 怎样检验黑板的边缘是否平行于地面?

【答案】检验黑板和地面平行事实上就是检验一条直线和一个平面平行, 常用的方法: 用“铅垂线” 检验. 就是用“铅垂线” 可以检验黑板的边沿是否平行地面. 所以, 我们可以从黑板边沿的两个不同的点放下铅垂线, 使铅垂线的下端刚好接触地面, 如果从这两个不同点到铅垂线的下端的线段的长度相等, 那么就可以说黑板的边沿是与地面平行的, 当然如果从这两个不同点到铅垂线的下端的线段的长度不相等, 那么就可以说黑板的边沿是与地面不平行的.

【注意】本题也可以用“长方形纸片” 来检验, 也可以用梯形纸片、平行四边形纸片来代替长方形纸片.

2. 怎样检验两块硬纸板是否平行.

【答案】检验两个平面是否平行的方法主要用“长方形纸片” 检验. 所以我们可以用“长方形纸片” 来检验. 把长方形纸片放在二两块硬纸板之间. 按交叉的方向放两次, 使纸片的一边都紧贴一块硬纸板, 再观察它的对边, 如果对边都能与另一块硬纸板紧贴, 那么这两块硬纸板平行.



【点拨】一定要按交叉的方向放两次，艇纸片的一边都紧贴一块硬纸板，再观察它的对边，这里的长方形纸片可以用梯形纸片和平行四边形纸片，但放两次不能改为一次，而且一定要交叉放置.

不规则图形中的棱、面之间的位置关系，我们知道长方体由八个顶点、十二条棱、六个面构成，反过来由八个顶点、十二条棱、六个面不一定能构成长方体，但在这些图形中也可以找到具有一组对边平行的其他图形来验证棱与面的位置关系.

【知识梳理】

1. 通过掌握长方体中棱与面之间的关系有垂直和平行，从而认识各种图形中的直线与平面的垂直(如图 1 所示: 直线 $PQ \perp$ 面 $ABCD$)与平行(如图 2 所示: 直线 $PQ \parallel$ 面 $ABCD$)关系:

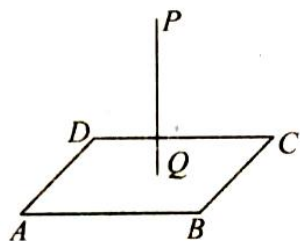


图 1

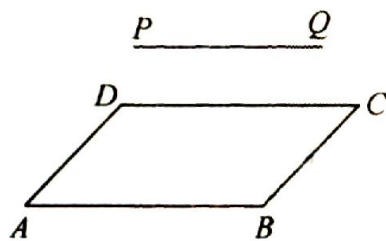


图 2

2. 通过掌握长方体中面与面之间的关系有垂直和平行，从而认识各种图形中的平面与平面的垂直(如图 3 所示: 平面 $\alpha \perp$ 平面 β)与平行(如图 4 所示: 平面 $\alpha \parallel$ 平面 β)关系:

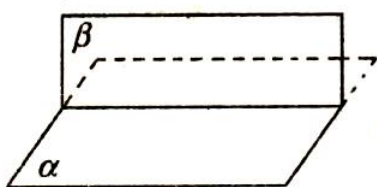


图 3

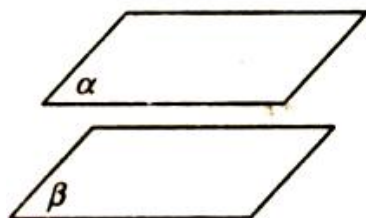


图 4

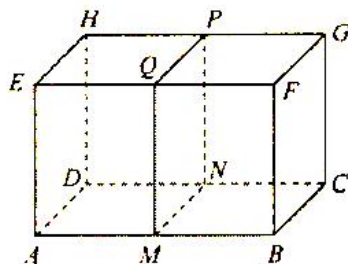
【典型例题讲解】

题型一： 直线与平面、平面与平面的位置关系

【例 1】如图所示，在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，点 M, P, Q 分别是棱 AB, CD, GH, EF 的中点.

(1)哪些棱与面 $MNPQ$ 平行?

(2)哪些棱与面 $MNPQ$ 垂直?



【分析】(1)可以使用长方形纸片、直角三角尺两次；(2)熟练掌握定义之后，也可以直接进行判读.

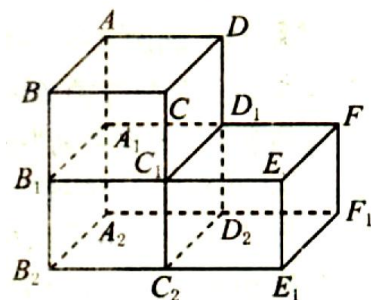
【解析】(1) AD 、 DH 、 HE 、 AE 、 BC 、 CG 、 GF 、 BF 与面 $MNPQ$ 平行；

(2) AB 、 CD 、 GH 、 EF 与面 $MNPQ$ 垂直.

【例 2】如图所示，一个物体是由三个长方体叠在一起组成的，与面 $A_2B_2C_2D_2$ 平行的面有哪几个？与面 $A_1B_1C_1D_1$ 垂直的面有哪些？

【分析】几个长方体叠合在一起后，判断面与面平行、面与面垂直的方法并没有发生改变，要注意不要重复表示或遗漏某一个平面.

【解析】与面 $A_2B_2C_2D_2$ 平行的面有面 B_1EFA_1 和面 $ABCD$ ；与面 $A_1B_1C_1D_1$ 垂直的面有面 B_2A_2AB 、面 $B_2E_1EC_1CB$ 、面 E_1F_1FE 、面 $A_2F_1FD_1DA$ 、面 CC_2D_2D .



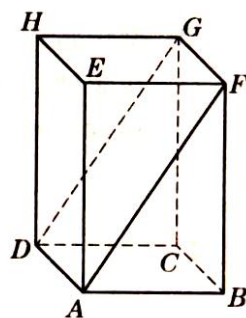
【方法总结】解这种题时，一定要按平行或垂直的定义或检验平行或垂直的方法来判断，不可盲目判断，注意也不要漏写多写.

【借题发挥】

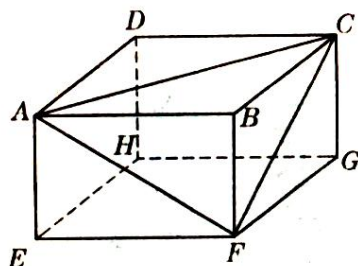
1. 如图，在长方体 $ABCD-EFGH$ 中
(1)与平面 $ABCD$ 平行的棱有哪些？

(2)与棱 BC 平行的平面有哪些？

(3)与平面 $ADGF$ 平行的棱有哪些？



【答案】(1) 棱 EF 、棱 HG 、棱 HE 、棱 GF ；
(2) 面 $ADHE$ 、面 $EFGH$ 、面 $ADGF$ ；
(3) 棱 HE 、棱 BC .

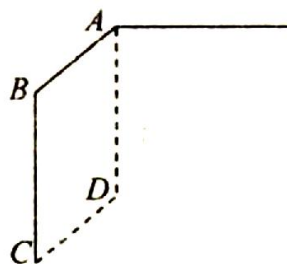


2. 如右图所示，在长方体 $ABCD-EFGH$ 中，分别与 $\triangle ACF$ 的 AC 、 CF 、 AF 中一边平行的面各有哪些？

【答案】分别与 AC 、 CF 、 AF 平行的面各有一个，它们分别是平面 $EFGH$ 、平面 $AEHD$ 、平面 $CDHG$ 。

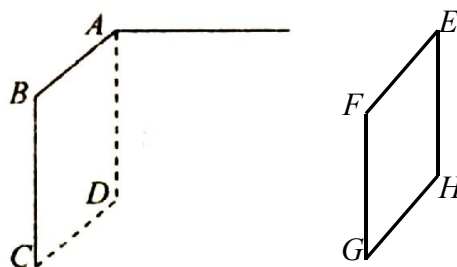
题型二：按要求画图题

【例 3】如图所示，补画长方体中与面 $ABCD$ 平行的棱。



【分析】基于对长方体的认识，可以得出与面 $ABCD$ 平行的棱有 EF 、 FG 、 GH 、 HE ，即为与面 $ABCD$ 平行的面 $EFGH$ 的 4 条边，所以在图中只要画出面 $EFGH$ 即可。

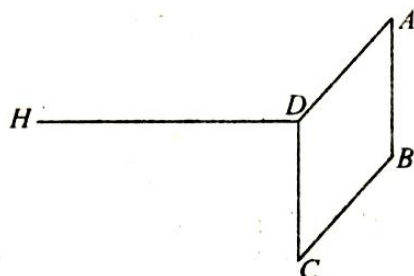
【答案】



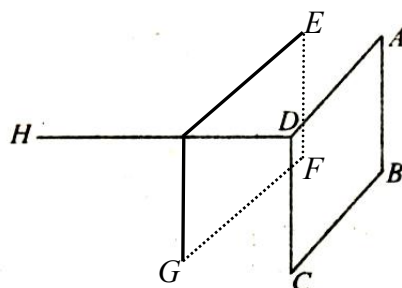
【借题发挥】

已知平面 $ABCD$ 线段 DH 垂直于平面 $ABCD$ （如下图）

画一个平面 $HGFE$ ，经过 H 点，且和 $ABCD$ 平面平行。



【答案】



【注意】要把遮挡的部分用虚线表示出来。

题型三：综合应用

【例 4】如果把图中的骰子看作是一个立方体，点数 1 的对面是 6。点数 2 的对面是 5。点数 4 的对面是点数 3。那么与点数 2 垂直的面的点数和是多少？

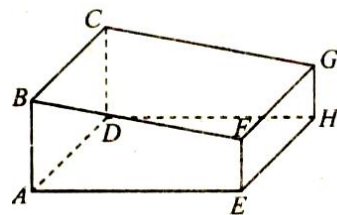


【分析】与点数 2 垂直的面分别是点数 1、点数 3、点数 4 扣点数 6。然后求出点数和。

【解析】 $1+3+4+6=14$

所以，与点数 2 垂直的面的和是 14。

【例 5】(1)如图所示，写出互相平行的面，并说明检验的方法。(2)在平面 $BCGF$ 和平面 $ADHE$ 之间有两个长方形 $ABCD$ 和 $EFGH$ ，所以平面 $BCGF \parallel$ 平面 $ADHE$ ，你认为这句话对吗？为什么？



【分析】把面 $ADHE$ (长方形)和面 $ABFE$ (梯形 $AB \parallel EF$)看作是长方形纸片交叉地放置两次，而且 AB 、 AD 与面 $ABCD$ 紧贴， EF 、 EH 与面 $EFGH$ 紧贴，从而说明面 $ABCD \parallel$ 面 $EFGH$ 。同样用长方形 $ABCD$ 和平行四边形 $BCGF$ 可以检验平面 $ABFE \parallel$ 平面 $DCGH$ 。

虽然在平面 $BCGF$ 和平面 $ADHE$ 之间有两个长方形 $ABCD$ 和 $EFGH$ ，但它们不是交叉放置，所以不能检验平面 $BCGF$ 与平面 $ADHE$ 平行。

【解析】平面 $ABCD \parallel$ 平面 $EFGH$ ，平面 $ABFE \parallel$ 平面 $DCGH$ ；不对，没有交叉放置。

【方法总结】要严格按照检验两个面平行的方法去检验，注意方法中的“交叉”二字。

【例 6】从一个棱长 10 厘米的长方体中挖去一个长 10 厘米、宽 2 厘米、高 2 厘米的小长方体，剩下的表面积是多少？

【解析】(1)如果沿一条棱挖，表面积损失了两侧的两个小正方形 $(2 \times 2) \times 2 = 8$ (平方厘米)。就是 $600 - 8 = 592$ (平方厘米)

(2)如果沿着某一侧上平行于边挖，

表面积增加了 $(2 \times 10 + 2 \times 10) \times 2 = 48$ (平方厘米)。

总表面积为 $600 + 32 = 632$ (平方厘米)。

(3)如果在某一侧面上斜着挖，表面增加了 4 个面，

其面积为 $(2 \times 2 + 2 \times 10) \times 2 = 48$ (平方厘米)。

总面积是 $600 - 48 = 648$ (平方厘米)。

(4)挖通两个对面，表面增加了 $4 \times 2 \times 10 - 2 \times (2 \times 2) = 72$ (平方厘米)。

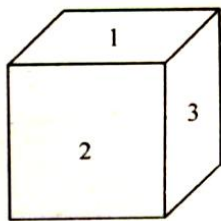
总面积为 $600 + 72 = 672$ (平方厘米)。

所以综上所述，剩下的面积有四种情况，

分别是 592 平方厘米、632 平方厘米、648 平方厘米、672 平方厘米。

【借题发挥】

1. 如图，在一个正方体的三个面上分别写上 1、2、3。在与这三个面分别平行的面上依次写上 4、5、6 (1 的对面写 4，依次类推)。与写数字 2 的面垂直的面上的数字和是多少？



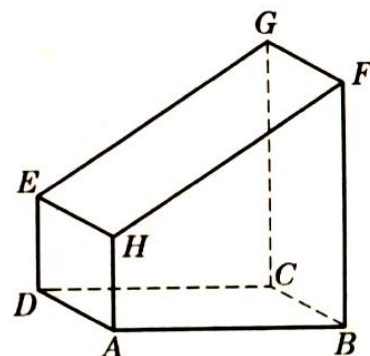
【答案】与写数字 2 的面垂直的面上的数字和是 14。

2. 一个长方体的长是 20 厘米、宽是 10 厘米、高是 8 厘米，从这块木头上切下一个最大的正方体后，剩下部分的表面积是多少平方厘米？

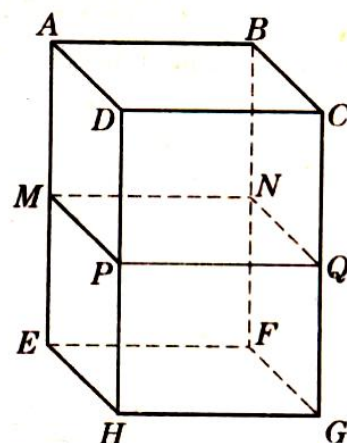
【答案】 752cm^2 （最大的正方体的棱长为 8 厘米）

【随堂练习】

1. 看到图时，小明说，因为平面 $FGEH$ 和平面 $ABCD$ 之间有两个长方形： $ADEH$ 和 $BCGF$ ，所以平面 $FGEH$ 与平面 $ABCD$ 是平行的，你认为他说的对吗？为什么？



2. 图中点 M 、 N 、 Q 、 P 分别是长方体的四条高的中点，与平面 $MNQP$ 平行的平面有哪些？为什么？



3. 如何检验文件柜的隔板与隔板相互平行？说出你所用的方法。

【答案】1. 不对，没有交叉放置。

2. 平面 $ABCD$ 、平面 $EFGH$ 。

3. 可以用“长方形纸片”检验文件柜的隔板与隔板是否相互平行。把一长方形硬纸片放在两层隔板之间，按交叉的方向放两次，使纸片的一边都紧贴一块隔板，再观察它的对边，如果对边都能与另一块隔板紧贴，那么这两块隔板平行。

第十七讲 专题复习

参考答案: 1. (1) 0, (2) 4, (3) $-3\frac{1}{2}$; 2. 6.0×10^5 ; 3. $m \leq 2$; 4. $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$;

5. C;

6. $\frac{108}{1-a\%}$; 7. 2, 1; 8. $1 \leq a < 4$; 9. $-3 \leq a < -2$; 10. 3.

例题 1: 解方程组:
$$\begin{cases} x-2y+z=0 & (1) \\ 2x+y-z=1 & (2) \\ 3x+2y-z=4 & (3) \end{cases}$$

解: 由(1)+(3)得: $x=1$

由(1)+(2)得: $3x-y=1$ (4)

把 $x=1$ 代入(4)得: $y=2$

把 $x=1, y=2$ 代入(1)得: $z=3$

所以原方程组的解是:
$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

例题 2: 若方程组 $\begin{cases} 2x+y=1-m \\ x-2y=2 \end{cases}$ 中 x 与 y 之和为 2, 求 m 的值。

解析: 方法一: 构造新的方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

将 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 代入方程 $2x+y=1-m$ 可得 $m=-3$

方法二: 解关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x+y=1-m \\ x-2y=2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{4-2m}{5} \\ y=\frac{-m-3}{5} \end{cases}$

$$x+y=\frac{4-2m}{5}+\frac{-m-3}{5}=3 \quad \text{可解得 } m=-3$$

例题 3: 某商场经销甲、乙两种世博纪念商品, 甲种商品每件进价 15 元, 售价 20 元; 乙种商品每件进价 35 元, 售价 45 元。

- (1) 如果该商场同时购进甲、乙两种商品共 10 件恰好用去 270 元，求购进甲、乙两种商品各多少件？
- (2) 如果该商场准备同时购进甲、乙两种商品共 100 件，为使总利润（利润＝售价－进价）不少于 750 元，且不超过 760 元，请你帮助该商场设计出可行的所有进货方案；
- (3) 在“五·一”期间，该商场对甲、乙两种商品进行如下优惠促销活动：

打折前一次性购物总额	优惠措施
不超过 300 元	不优惠
超过 300 元且不超过 400 元	售价打九折
超过 400 元	售价打八折

按上述优惠条件，若小王第一天只购买甲种商品一次性付款 200 元，第二天只购买乙种商品打折后一次性付

款 324 元，那么这两天他在该商店购买甲、乙两种商品一共多少件？

解：(1) 设购进甲、乙两种商品分别为 x 件， $(10-x)$ 件，根据题意得

$$15x + 35(10-x) = 270 \quad \text{解得 } x=4 \quad \text{则 } 10-4=6$$

答：甲种商品 40 件，乙种商品 60 件。

(2) 设该商场进甲种商品 a 件，则购进乙种商品 $(100-a)$ 件，根据题意得

$$(20-15)a + (45-35)(100-a) \geq 750$$

$$(20-15)a + (45-35)(100-a) \leq 760$$

因此，不等式组的解集为 $48 \leq a \leq 50$ 。

根据题意得值应是整数，所以 $a=48$ 或 $a=49$ 或 $a=50$

该商场共有三种进货方案：

方案一：购进甲种商品 48 件，乙种商品 52 件；

方案二：购进甲种商品 49 件，乙种商品 51 件；

方案三：购进甲种商品 50 件，乙种商品 50 件。

(3) 根据题意得

第一天只购买甲种商品不享受优惠条件， $200 \div 20 = 10$ 件

第二天只购买乙种商品有以下两种情况：

情况一：购买乙种商品打九折， $324 \div 90\% \div 45 = 8$ 件；

情况二：购买乙种商品打八折， $324 \div 80\% \div 45 = 9$ 件。

一共可购买甲、乙两种商品 $10+8=18$ 件或 $10+9=19$ 件。

参考答案：

一、1、 1.601×10^6 ； 2、 $\begin{cases} x=1 \\ y=10 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ ； 3、 $x=4-6y$ ； 4、 $140^\circ 29'$ ； 5、

10；

6、150； 7、98； 8、 $a>1$ ； 9、棱 CG ； 10、面 $ABCD$ ，面 $EFGH$ ；

二、11、 C ； 12、 D ； 13、 D ； 14、 B ； 15、 C ； 16、 C ；

三、17、 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 18、 $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 19、解集为 $-3 < x \leq 3$ ，整数解为：-2, -1, 0, 1, 2, 3

20、3； 21、 40° ；

22. 解：设第一次邮购 x 件，第二次邮购 y 件.

根据题意，第一次每件付款为 $10(1+10\%)=11$ （元）

第二次每件付款为 $10 \times 90\%=9$ （元）

由题意，得 $\begin{cases} x+y=200 \\ 11x+9y=1960 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=80 \\ y=120 \end{cases}$

答：第一次邮购 80 件，第二次邮购 120 件.

第十八讲 期末综合复习

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. B 2. D 3. C 4. A 5. B 6. D

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 3.897×10^6 ； 8. $\frac{7}{8}$ ； 9. -4； 10. $x+y=3$ （其他解略）；

11. $x \leq 4$ ； 12. 异面； 13. 面 $HDCG$ ； 14. 长方形纸片；

15. 30； 16. 60° ； 17. 8； 18. $\frac{19}{4}$

三、计算题：（本大题共 6 题，每题 6 分，满分 36 分）

19. 解：原式 $= 16 \div \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right) \times \frac{1}{3}$ (2 分)
 $= 16 \times \frac{9}{64} + \left(-\frac{3}{2}\right)$ (2 分)
 $= \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ (2 分)

20. 解： $2(2x+1)-(6x-7)=12$ (2 分)

$$-2x = 3 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } x = -\frac{3}{2} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 是原方程的解} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

21. 解: 由①得 $x < 2$ $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$
 由②得 $x \geq -1$ $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$
 $\therefore$ 原不等式组的解集是 $-1 \leq x < 2$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 图略, 数轴上表示正确 $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

22. 解: ① $\times 2$, $2x - 2y = 12$ ③ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 ③+②, $5x = 25$ 得 $x = 5$ $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$
 把 $x = 5$ 代入①, $5 - y = 6$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 $y = -1$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 $\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=5, \\ y=-1. \end{cases}$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

23. 解: ①+②, $3x + z = 6$ ④ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 ④+③, $6x = 6$ 得 $x = 1$ $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$
 把 $x = 1$ 代入③, 得 $z = 3$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 把 $x = 1, z = 3$ 代入①, 得 $y = 2$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 $\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

24. 解: 设 $\angle 1$ 的度数为 x , 则 $\angle 2$ 的的度数为 $(90 - x)$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 由题得 $180 - x = 2(90 - x) + 25$ $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$
 解得 $x = 25$ $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$
 答: $\angle 1$ 大小为 25 度 $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

四、画(作)图题(本大题共 2 题, 每题 6 分, 满分 12 分)

25. (1) 图略, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$
 (2) B_1B 和 D_1D , $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$
26. (1) 图略; $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$
 (2) 15° $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

五、应用题(本大题共 2 题, 第 27 题 6 分, 第 28 题 10 分, 满分 16 分)

27. 解: (1) 设甲仓库的存粮为 x 吨, 则乙仓库的存粮为 $(95 - x)$ 吨, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 由题意, 得 $(95 - x) \times (1 - 40\%) = x \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 2$, $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$
 解得: $x = 45$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
 答: 甲仓库的存粮为 45 吨, 则乙仓库的存粮为 50 吨, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
28. (1) 设购进 B 种彩票 x 扎, C 种彩票 y 扎,
 根据题意得: $\begin{cases} x + y = 20, \\ 2000x + 2500y = 45000. \end{cases}$ $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

解得： $\begin{cases} x=10, \\ y=10. \end{cases}$ (1 分)

答：购进 B 种彩票与 C 种彩票各 10 扎；

(2) 进货方案为：购进 B 种彩票与 C 种彩票各 10 扎
或者购进 A 种彩票 5 扎， C 种彩票 15 扎. (1 分)

理由如下：

① 由 (1) 得购进 B 种彩票与 C 种彩票各 10 扎；

② 设购进 A 种彩票 x 扎， B 种彩票 y 扎，

根据题意得： $\begin{cases} x+y=20, \\ 1500x+2000y=45000. \end{cases}$ 解得： $\begin{cases} x=-10, \\ y=30. \end{cases}$

$\because x < 0$ ，不合题意； (2 分)

③ 设购进 A 种彩票 x 扎， C 种彩票 y 扎，

根据题意得： $\begin{cases} x+y=20 \\ 1500x+2500y=45000 \end{cases}$ 解得： $\begin{cases} x=5 \\ y=15 \end{cases}$

购进 A 种彩票 5 扎， C 种彩票 15 扎 (2 分)

答：进货方案为：购进 B 种彩票与 C 种彩票各 10 扎

或者购进 A 种彩票 5 扎， C 种彩票 15 扎.

(3) 方进货案： A 种 4 扎， B 种 2 扎， C 种 14 扎. (1 分)

$$4 \times 200 + 2 \times 300 + 14 \times 500 = 8400$$

此种方案的手续费为 8400 元. (1 分)