

第1讲 正余弦函数的图像与性质

1. 略 2. (1) 略 (2) 略

$$(3) \text{ 当 } \left\{ x \mid k = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \right\}, y_{\max} = \frac{1}{3}, \text{ 当 } \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \right\}, y_{\min} = -\frac{1}{3}$$

$$(4) \text{ 当 } x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \text{ 时, } y \text{ 取最小值 } -1, \text{ 当 } x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ 时, } y \text{ 取最大值 } 5;$$

$$3. (1) \{x \mid -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\} \quad (2) \{x \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$4. (1) \text{ 偶函数; } (2) \text{ 非奇非偶函数; } 5. m = 2 \text{ or } -2; 6. \left[2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$7. \left[-3, \frac{1}{3} \right]; 8. [-2, 2]; 9. x \in (-4, -\pi] \cup [0, \pi]; 10. m > 1 - \sqrt{2}; 11. 2\pi$$

第2讲 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与性质

$$1. \text{ 略 } 2. \text{ 对称中心 } \left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, 0 \right) (k \in \mathbb{Z}), \text{ 对称轴 } x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$3. 2\sin \frac{\pi}{4}x \quad 4. \text{ 沿 } x \text{ 轴向右平移 } \frac{\pi}{24} \text{ 个单位可得到 } 5. \frac{\pi}{3} \quad 6. x = \frac{\pi}{3}$$

$$7. 2\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{9}\right) \quad 8. k \in [1, \sqrt{2}) \quad 9. \sqrt{2} \quad 10. \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad 11. k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

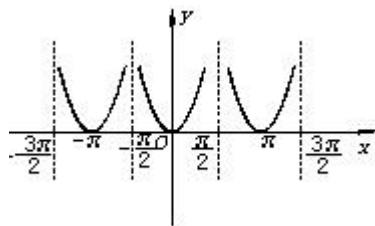
$$12. f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right) \quad 13. -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 14. A \quad 15. \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$$

第3讲 正切函数的图像与性质

$$1. \text{ 没有, 因为正切函数的值域为 } \mathbb{R} \text{ 且不等于 } k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}); 2. \frac{\pi}{|a|}; 3. B; 4. C; 5. C$$

$$6. x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z}); \left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in \mathbb{Z}); (0, 1); \frac{\pi}{2}; \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}\};$$

$\mathbb{R}$; 非奇非偶; 7. 如左图



函数 $y = |\tan x|$ 的周期为 π

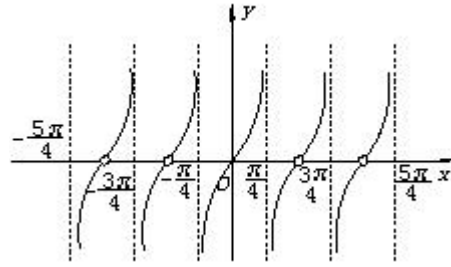
单调递增区间为 $\left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

8. 如右图, 周期为 π 。

9. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \frac{\sqrt{2}}{2}+1]$; 10. $\frac{\pi}{2}$; 11. 6π ;

12. 由 $\begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \tan x \geq 0 \end{cases}$, 得 $(2k+1)\pi \leq x < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$,



选 C; 13. $y = (\tan x - 1)^2 + 2$, 当 $\tan x = 1$ 时, $y_{\min} = 2$;

14. (1) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$ (2) $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}) \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$

第 4 讲 正切函数的图像与性质

二、典型例题

1. (1) $\left\{x \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$. (2) $\left\{x \mid x = 2k\pi \text{ 或 } 2k\pi + \pi \leq x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(3) $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$. (4) $\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$.

(5) $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

2. (1) $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right] \cup [2, +\infty)$ (2) $\left[\frac{2-2\sqrt{7}}{3}, \frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right]$ (3) $[-\sqrt{3}, 2]$

(4) $\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$ (5) $\left[-1, \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right]$ (6) $[-2, 2\sqrt{2}]$.

3. 3 个 4. (1) $\left\{x \mid x = k\pi - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}\right\}$; (2) $[-1, \sqrt{2}]$. 5. $a = -2, b = 3$.

6. (1) 偶函数; (2) 偶函数; (3) 奇函数; (4) 偶函数. 7. $\varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

8. (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) π 9 (1) $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$

(2) $\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ (3) $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 和 $\left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$.

10. $(0, 2]$ 11. ③⑤⑦; 12. (1) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$ 、 $-\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 1\right) (k \in \mathbf{Z})$;

$$(2) m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$13. (1) \varphi = -\frac{3\pi}{4}; (2) \left[k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{5\pi}{8} \right] (k \in \mathbf{Z}); (3) \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

第5讲 正切函数的图像与性质

二、典型例题

$$1. x = \underline{\arcsin \frac{1}{3} \text{ 或 } \pi - \arcsin \frac{1}{3}}$$

$$\text{变式练习 (1) } x = \underline{\arccos \frac{1}{3} \text{ 或 } -\arccos \frac{1}{3}} \quad (2) x = \underline{\pi - \arccos \frac{1}{3}}$$

$$(3) \pi + \arctan \frac{5}{12}$$

$$2. \text{函数 } y = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ 的反函数为 } y = \pi - \arcsin x, x \in [-1, 1].$$

变式练习:

$$\text{函数 } y = \cos x, x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ 的反函数为 } y = 2\pi - \arccos x, x \in [-1, 0].$$

$$3. (1) \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right). (2) \left[\frac{\pi}{6}, \pi \right]. \text{变式练习: } \underline{\left[\frac{4\pi^2 - 30\pi}{9}, 0 \right]}$$

$$4. \frac{4\sqrt{2} + 14\sqrt{6}}{45} \quad \text{变式练习: } -\frac{13}{105}$$

三、巩固练习

$$1. [1, 3], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]; 2. \text{奇函数}; 3. \frac{4\pi}{3}; 4. \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right]; 5. \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$$

第6讲 最简三角方程

最简三角方程的解集，见下表：

方程		方程的解集
$\sin x = a$	$ a > 1$	
	$ a = 1$	

	$ a < 1$	
$\cos x = a$	$ a > 1$	
	$ a = 1$	
	$ a < 1$	
$\tan x = a$		

例 1、求下列方程的解集.

$$(1) 2\cos x = \sqrt{2}; \quad (2) 5\sin x + \sqrt{3} = 0 \quad (3) 3\tan^2 x - 1 = 0$$

$$(4) 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0 \quad (5) \sin x - \cos x = 1$$

解 (1) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

$$(2) \left\{ x \mid x = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right), k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ x \mid x = k\pi - (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$(3) x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}. \quad (4) \left\{ x \mid x = 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } x = 4k\pi - 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$(5) \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

例 2 解方程

$$(1) 2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \quad (2) \sin^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \quad (3) \sin 5x = \sin x.$$

$$(4) \sin x - \cos x + \sin 2x = 1$$

答案:

$$(1) \left\{ x \mid x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2) \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \text{ 或 } x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(3) 5x = 2k\pi + x \text{ 或 } 5x = 2k\pi + \pi - x, \text{ 则 } x = \frac{k\pi}{2} \text{ 或 } x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(4) \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } x = 2k\pi + \pi, \text{ 或 } x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

例 3 (1) 关于 x 的方程 $2\cos x - 1 = k(2\cos x + 1)$ 有实数解, 求 k 的取值范围. $\left[-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty)$

(2) 若方程 $\cos 2x - 2\sin x + m - 1 = 0$ 存在实数解, 求 m 的取值范围.

$$m \text{ 的取值范围为 } \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$$

(3) 已知关于 x 的方程 $\sin 2x + a(\sin x + \cos x) + 2 = 0$ 有实数根, 求实数 a 的取值范围. 得 $a \geq 2$ 或 $a \leq -2$.

例 4 已知 α, β 是方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = m$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的两相异实根, 试求:

(1) m 的取值范围; (2) $\alpha + \beta$ 的值。

解: (1) $m = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$, 在同一坐标系中作出 $y = m$ 及 $y = 2\sin t$ ($\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{7\pi}{3}$) 的图象。

观察图象可知, $m \in (-2, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$ 时, 方程在 $(0, 2\pi)$ 上有相异两实根。

(2) 由 $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = m$, $\sin \beta + \sqrt{3} \cos \beta = m \Rightarrow 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = 2\sin(\beta + \frac{\pi}{3})$ 。

$$\therefore \alpha + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \beta + \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \alpha + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \beta - \frac{\pi}{3}。$$

$$\therefore \alpha = 2k\pi + \beta \text{ (舍)}。 \alpha + \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{3}。 \text{ 又 } 0 < \alpha + \beta < 4\pi, \therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{7\pi}{3}$$

例 5 方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x - m = 0$ (1) 若方程有解, 求实数 m 的值;

(2) 讨论方程在区间 $[0, 2\pi]$ 上解的个数;

(3) 当 $x \in [0, \pi]$ 时, 方程有两个不同的解 α, β , 求实数 m 的范围。

思考: $\alpha + \beta$ 的值?

解: (1) $m = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$, 则 $-2 \leq m \leq 2$;

$$(2) x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}],$$

则 $m = \pm 2$ 时, 一个解; $m = \sqrt{3}$ 时, 三个解; $m \in (-2, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$, 两个解。

(3) $x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, 当 $m \in [\sqrt{3}, 2)$ 时方程有两解 α, β 。

思考: $\alpha + \beta$ 的值?

令 $t = x + \frac{\pi}{3}$, 关于 t 的方程 $m = 2\sin t$, $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 关于 $t = \frac{\pi}{2}$ 对称, 则 $t_1 + t_2 = \pi$,

$$\text{即 } \alpha + \frac{\pi}{3} + \beta + \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ 则 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}。$$

作业与练习

【A 组】

1. 用反三角函数表示下列各式中的 x : $\cos x = -\frac{1}{3}, x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 。

2. 求方程 $3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ 的解集

3. 已知 $2\sin(5x-15^\circ)-\sqrt{3}=0$, 求符合条件的锐角 x 。

答案:

$$1. x = \pi + \arccos \frac{1}{3} \quad 2. \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}, k \in Z \right\} \quad 3. 15^\circ, 27^\circ, 87^\circ.$$

【B 组】

1、 $2\sin x = 1, x \in [-\pi, \pi]$ 的解集是_____.

2、 $2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0$ 的解集是_____.

3. $\sin 2x = \sin 5x$ 的解集是 _____

4. $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ 的解集是_____

5、 k 取怎样的整数时, 方程 $(k+1)\sin^2 x - 4\cos x + 3k - 5 = 0$ 有实数解? 求出此时的解.

6、 已知定义在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 当 $x \geq \frac{\pi}{4}$ 时,

函数 $f(x) = \sin x$, (1) 求 $f(-\frac{\pi}{2}), f(-\frac{\pi}{4})$ 的值; (2) 求 $y = f(x)$ 的函数表达式;

(3) 如果关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有解, 那么将方程取 a 的某一确定值时所得的所有解的和记为 M_a , 求 M_a 的所有可能的值及相应的 a 的取值范围.

7、 $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$ 的解集是_____

8、 方程 $|\sin x| + |\cos x| = \sqrt{2}$ 的解集为_____.

答案: 1、 $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ 2、 $\left\{ x \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z \right\}$

3. $x = \frac{2k\pi}{3}$ 或 $x = \frac{2k+1}{9}\pi, k \in Z$ 4. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}$

5、 $k=1$ 时 $x = m\pi + \frac{\pi}{2}, m \in Z$; $k=2$ 时 $x = 2m\pi \pm \arccos \frac{2}{3}, m \in Z$;

$k=3$ 时 $x = 2m\pi, m \in Z$

6、

$$(1) 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \\ \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \quad (3) M_a = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, a=1 \text{ 或 } 0 \leq a < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi, \frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1 \\ \frac{3\pi}{4}, a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$7、x = 2k\pi + \pi, x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \quad 8、\left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in Z\right\}.$$

【C 组】

1、已知方程 $\cos^2 x - |\sin x| + 1 = 0$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中的所有解为_____.

2、若方程 $\cos 2x - 4\sin x + a - 1 = 0$ 有实数解, 求实数 a 的取值范围.

3、若关于 x 的方程 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = m$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个相异实根, 求实数 m 的取值范围.

4. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x)$, 其中常数 $\omega > 0$;

(1) 若 $y = f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增, 求 ω 的取值范围;

(2) 令 $\omega = 2$, 将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 得到函数

$y = g(x)$ 的图像, 区间 $[a, b]$ ($a, b \in R$ 且 $a < b$) 满足: $y = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少含有 30 个零

点, 在所有满足上述条件的 $[a, b]$ 中, 求 $b - a$ 的最小值.

5. 设常数 $a \in R$, 函数 $f(x) = a\sin 2x + 2\cos^2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 若 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

$$1、\left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\} \quad 2、a \in [-2, 6] \quad 3、\sqrt{3} < m < 2 \quad 4. (1) \left(0, \frac{3}{4}\right] \quad (2) 14 \times \frac{2\pi}{3} + 15 \times \frac{\pi}{3} = \frac{43\pi}{3}.$$

$$5. (1) a = 0; \quad (2) -\frac{11}{24}\pi, \frac{13}{24}\pi, -\frac{5}{24}\pi, \frac{19}{24}\pi.$$

第8讲 三角比的综合运用(1)——三角恒等式

一、填空

1. 终边与第三象限的角平分线重合的角的集合是_____.
2. 已知角 α 的顶点为坐标原点,始边为 x 轴正半轴,终边过点 $P(-1,3)$,则 $\cos 2\alpha$ 的值为_____.
3. 已知扇形的周长为 20 cm ,则扇形最大面积为_____ cm^2 .
4. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=$ _____.
5. 若 $\theta\in\left[\frac{5}{4}\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$,则 $\sqrt{1-\sin 2\theta}-\sqrt{1+\sin 2\theta}$ 可化简为_____.
6. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$, $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{5}$,则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 的值为_____.
7. 若锐角 α, β 满足 $(1+\sqrt{3}\tan \alpha)(1+\sqrt{3}\tan \beta)=4$,则 $\alpha+\beta=$ _____.
8. 已知 $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{1}{4-m}, a \in R$,则 m 的取值范围是_____.
9. 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,则 $\sin x \cos x + \sin x + \cos x$ 的最大值是_____.
10. 若角 α 的终边落在直线 $x+y=0$ 上,则 $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} =$ _____.
11. 若 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0, \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$,则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值是_____.
12. 已知 $x+y=1(x>0, y>0)$,求 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值。请仔细阅读下列解法,并在填空处回答指定问题: 解: $\because x+y=1(x>0, y>0), \therefore$ 令 $x=\cos^2 \theta, y=\sin^2 \theta$ (其中
(1) _____,
(2) _____), 则 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta} = \tan^2 \theta + 2 \cot^2 \theta + 3 \geq 2\sqrt{2} + 3$, 此
时, 当 (3) _____ 时, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 取得最小值 $2\sqrt{2} + 3$ 。

注意：请在(1)处填入运用了什么数学方法，(2)处填入 θ 的一个取值范围，(3)处填 x, y 的取值。

二、选择

13. 已知点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限，则角 α 的终边在()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
14. $\frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha$ 可以化简为()
 A. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$ B. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ C. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ D. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$
15. 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} =$ ()
 A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{6}{5}$ D. $\frac{6}{5}$
16. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A \cos B > \sin A \sin B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为()
 A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 等比三角形

三、简答

17. 已知关于 x 的方程 $2x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + m = 0$ 的两根为 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$, 且

$\theta \in (0, 2\pi)$. 求: (1) $\frac{\sin \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta}$ 的值

(2) m 的值;

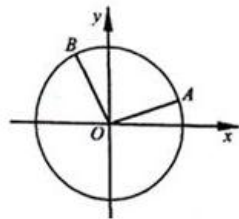
(3) 方程的两根及此时 θ 的值

18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 x 轴正半轴为始边的锐角 α 和钝角 β

的终边分别与单位圆交于点 A, B , 若点 A 的横坐标是 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 点 B 的纵坐标

是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (1) 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值;

(2) 求 $\alpha + \beta$ 的值.



19. 已知 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $\sin x$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

20. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}, \sin(A-B) = \frac{1}{5}$.

(1) 求证: $\tan A = 2 \tan B$;

(2) 设 $AB=3$, 求 AB 边上的高.

21. 若 $\cos^2 \theta + 2m \sin \theta - 2m - 2 < 0$ 对 $\theta \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

一、填空

1. $\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{5}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 2. $-\frac{4}{5}$ 3. 25 4. $\pm \frac{1}{3}$ 5. $2 \cos \theta$ 6. $\frac{7}{13}$

7. $\frac{\pi}{3}$ 8. $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$ 9. $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ 提示: 令 $\sin x + \cos x = t$, 则

$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, 又 $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 因此 $t \in (1, \sqrt{2}]$

10. 0 11. $-\frac{1}{2}$ 提示: $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = (-\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (-\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 1$

12. 换元, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); x = \sqrt{2} - 1, y = 2 - \sqrt{2};$

二、选择

B A D C

三、简答

17、 (1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; (2) $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ or } \frac{\pi}{6}$

18、 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$

19、 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{7-24\sqrt{3}}{50}$

20. (1) 证明: $\because \sin(A+B) = \frac{3}{5}, \sin(A-B) = \frac{1}{5},$

$$\therefore \begin{cases} \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{3}{5} \\ \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin A \cos B = \frac{2}{5} \\ \cos A \sin B = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{\tan A}{\tan B} = 2, \therefore \tan A = 2 \tan B$$

(2) 解: $\frac{\pi}{2} < A+B < \pi, \therefore \sin(A+B) = \frac{3}{5}.$

$$\therefore \tan(A+B) = -\frac{3}{4}, \text{ 即 } \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\frac{3}{4}.$$

将 $\tan A = 2 \tan B$ 代入上式整理得 $2 \tan^2 B - 4 \tan B - 1 = 0,$

$$\text{解得 } \tan B = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} \text{ (负值舍去), 得 } \tan B = \frac{2 + \sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \tan A = 2 \tan B = 2 + \sqrt{6}.$$

设 AB 边上的高为 CD , 则 $AB = AD + DB = \frac{CD}{\tan A} + \frac{CD}{\tan B} = \frac{3CD}{2 + \sqrt{6}},$

由 $AB=3$ 得 $CD = 2 + \sqrt{6}$, 所以 AB 边上的高为 $2 + \sqrt{6}.$

21. 解: $1 - \sin^2 \theta + 2m \sin \theta - 2m - 2 < 0 \quad \therefore m(2 \sin \theta - 2) < \sin^2 \theta + 1$

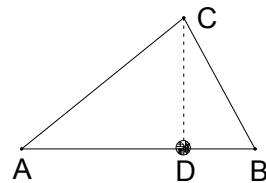
若 $\sin \theta = 1, 0 < 2$ 恒成立。

若 $\sin \theta \neq 1, 2 \sin \theta - 2 < 0 \quad \therefore m > \frac{\sin^2 \theta + 1}{2 \sin \theta - 2}$

$$\text{右边} = \frac{(\sin \theta - 1)^2 + 2(\sin \theta - 1) + 2}{2(\sin \theta - 1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(1 - \sin \theta + \frac{2}{1 - \sin \theta} - 2 \right) \leq 1 - \sqrt{2}$$

$$\therefore m > 1 - \sqrt{2}$$



第9讲 三角比综合运用(2)——解斜三角形

例1 在 $\triangle ABC$ 中, $a=7, b=8, \cos B = -\frac{1}{7}.$

(1) 求 $\angle A$; (2) 求 AC 边上的高.

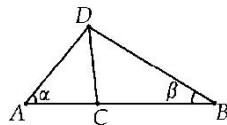
答案: (1) $\therefore \angle A = \frac{\pi}{3}.$ (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}.$

例2 如图,某公司要在 A 、 B 两地连线上的定点 C 处建造广告牌 CD , 其中 D 为顶端, AC 长 35 米, CB 长 80 米. 设点 A 、 B 在同一水平面上, 从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β .

(1) 设计中 CD 是铅垂方向. 若要求 $\alpha \geq 2\beta$, 问 CD 的长至多为多

少 (结果精确到 0.01 米) ?

(2) 施工完成后, CD 与铅垂方向有偏差. 现在实测得 $\alpha = 38.12^\circ$, $\beta = 18.45^\circ$, 求 CD 的长 (结果精确到 0.01 米).



答案. (1) 28.28 米. (2) CD 的长约为 26.93 米.

例3 设 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边长分别为 a 、 b 、 c , 且 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \sin 2C$, 求角 C 的值.

解: 因为 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$, 代入上式, 得 $2ab \cos C = 2ab \sin 2C$, 即 $\sin 2C - \cos C = 0$.

因为 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C$, 所以 $\cos C (2 \sin C - 1) = 0$.

若 $\cos C = 0$, 可得 $C = \frac{\pi}{2}$;

若 $2 \sin C - 1 = 0$, 即 $\sin C = \frac{1}{2}$, 可得 $C = \frac{\pi}{6}$, 或 $C = \frac{5\pi}{6}$.

综上所述, $C = \frac{\pi}{2}$, 或 $C = \frac{\pi}{6}$, 或 $C = \frac{5\pi}{6}$.

例4 如图, 一客轮从 O 地出发, 沿北偏东 30° 的 OA 方向航行, 一小时后发现一乘客发病并立即发出求救信号. 在距离 O 地 $40\sqrt{3} \text{ km}$, 北偏东 60° 的小岛 N 上有一医生. 现出动离 O 地正东方向 80 km 的 B 处一艘快艇赶往 N 处载上医生全速追赶客轮. 已知快艇的速度为 40 km/h , 客轮的速度为 $\frac{40}{3} \text{ km/h}$. 从发现乘客发病到快艇追上客轮, 最少经过几个小时?

30. 设快艇经过 t 小时于 C 点赶上客轮,

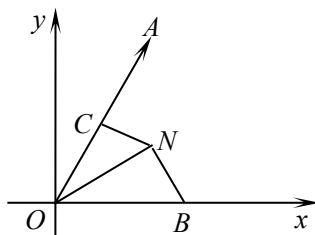
$$\text{由 } BN^2 = OB^2 + ON^2 - 2OB \cdot ON \cdot \cos 30^\circ,$$

$$= 80^2 + (40\sqrt{3})^2 - 2 \times 80 \times 40\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得 $BN = 40$, 即快艇到达小岛 N 的时间为 1 小时.

$$\text{由 } 40(t-1)^2 = \left[\frac{40}{3}(t+1)\right]^2 + (40\sqrt{3})^2 - 2 \times 40\sqrt{3} \times \frac{40}{3}(t+1) \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

得 $8t^2 - 11t - 10 = 0 \Rightarrow (t-2)(8t+5) = 0 \Rightarrow t = 2$. 即最少经过 2 小时, 快艇可追上客轮.



例 5. 已知 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, $y = \cot A + \frac{2 \sin A}{\cos A + \cos(B-C)}$ 。

(1) 若 $\triangle ABC$ 是正三角形, 求 y 的值;

(2) 若任意交换 $\triangle ABC$ 中两个角的位置, y 的值是否变化? 证明你的结论;

(3) 若 $\triangle ABC$ 中有一内角为 45° , 求 y 的最小值。

解: (1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{3}$ 。

(2) 因为 $y = \cot A + \frac{2 \sin(B+C)}{\cos(B-C) - \cos(B+C)} = \cot A + \frac{2(\sin B \cos C + \cos B \sin C)}{2 \sin B \sin C}$
 $= \cot A + \cot B + \cot C$, 所以若任意交换 $\triangle ABC$ 中两个角的位置, y 的值不会改变。

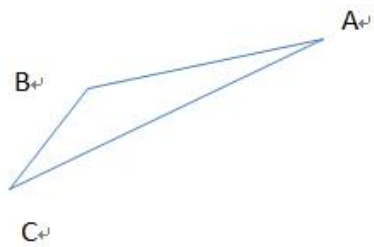
(3) 不妨设 $A = 45^\circ$, 则 $y = \cot A + \frac{2 \sin A}{\cos A + \cos(B-C)} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(B-C)} \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}$
 $= 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$, 当且仅当 $B = C = 67.5^\circ$ 时, $y_{\min} = 2\sqrt{2} - 1$ 。

例 6 如图, 游客从某旅游景区景点 A 处下山至 C 处有两种路径: 一种是从 A 沿直线步行至 C; 另一种是先从 A 沿索道乘缆车到 B, 然后从 B 沿直线步行到 C。现有甲, 乙两位游客从 A 处下山, 甲沿 AC 匀速步行, 速度为 50m/min。在甲出发 2min 后, 乙从 A 乘缆车到 B, 在 B 处停留 1min 后, 再匀速步行到 C。假设缆车匀速直线运动的速度为 130m/min, 山路 AC 的长为 1260m, 经测量 $\cos A = \frac{12}{13}$, $\cos C = \frac{3}{5}$ 。

(1) 求索道 AB 的长

(2) 问乙出发多少分钟后, 乙在缆车上与甲的距离最短?

(3) 为使两位游客在 C 处互相等待的时间不超过 3 分钟, 乙步行的速度应控制在什么范围内?



练习:

【A 组】

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , $a = 2\sqrt{3}$, $B = \frac{\pi}{4}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$,

则 $A =$ _____;

2. $\triangle ABC$ 中, $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, 最长边为 1, 则最短边长为 _____;

3. $\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{5}{13}$, 则 $\cos A =$ _____.

4. $\triangle ABC$ 中, 若 $a \cdot \cos A = b \cdot \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 _____

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $S_{\triangle ABC} = 15$, $ab = 60$, $\sin A = \cos B$, 求 A, B 的大小。

【B 组】

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,

若 $(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3 \sin A \sin B$, 则 $C =$ _____;

7. 在 A 为顶角的等腰 $\triangle ABC$ 中,

① 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, 则 $\cos B =$ _____ ; ② 已知 $\sin B = \frac{3}{5}$, 则 $\sin A =$ _____;

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 三角形三边长之比为 $\sqrt{7}:2:1$, 求最大的内角.

9. $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = \sqrt{17}$, $b = \sqrt{13}$, $S_{\triangle ABC} = 5$, 则 $\angle C =$ _____

10. $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 3, c = 3\sqrt{3}, \angle A = 30^\circ$, 则 $b =$ _____;

11. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $(a^2 + c^2 - b^2) \tan B = \sqrt{3}ac$, 则角 $B =$ _____;

12. 某人要制作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别为 $\frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{5}$, 则此人能

()

(A) 不能作出这样的三角形

(B) 作出一个锐角三角形

(C) 作出一个直角三角形

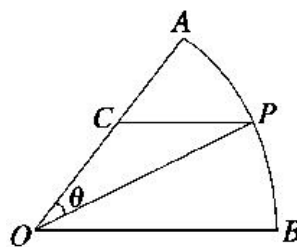
(D) 作出一个钝角三角形

13. 已知 $\triangle ABC$ 中, $A > B > C, A = 2C, b = 4, a^2 - c^2 = \frac{64}{5}$, 求 a, c 的值.

14. 三角形的两边之和为 6, 这两边的夹角为 120° , 则这个三角形的面积 S 的最大值为_____;

15. $\triangle ABC$ 中, 三边 a, b, c 成等差数列, 求 b 边所对角 B 的取值范围.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $A > B$ 则 $\sin A > \sin B$ 成立;



17. 如图所示, 扇形 AOB, 圆心角 AOB 等于 60° , 半径为 2, 在弧 AB 上有一动点 P, 过 P 引平行于 OB 的直线和 OA 交于点 C, 设 $\angle AOP = \theta$, 求 $\triangle POC$ 面积的最大值及此时 θ 的值.

18. 设 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三内角, 且方程

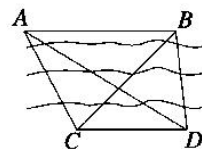
$(\sin A - \sin B)x^2 + (\sin C - \sin A)x + \sin B - \sin C = 0$ 有两个相等的实数根, 求 B 的

取值范围.

19. 下列判断中不正确的结论的序号是_____.

① $\triangle ABC$ 中, $a=7, b=14, A=30^\circ$, 有两解; ② $\triangle ABC$ 中, $a=30, b=25, A=150^\circ$, 有一解; ③ $\triangle ABC$ 中, $a=6, b=9, A=45^\circ$, 有两解; ④ $\triangle ABC$ 中, $b=9, c=10, B=60^\circ$, 无解

20. 要测量对岸 A、B 两点之间的距离, 选取相距 $\sqrt{3}$ km 的 C、D 两点, 并测得 $\angle ACB=75^\circ$, $\angle BCD=45^\circ$, $\angle ADC=30^\circ$, $\angle ADB=45^\circ$, 求 A、B 之间的距离.



【C 组】

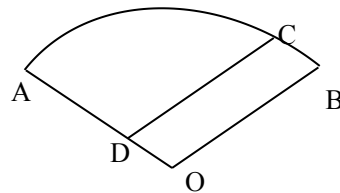
21. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\cos A =$ ()

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

22. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为_____.

23. 如图, 某住宅小区的平面图呈圆心角为 120° 的扇形

AOB . 小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处, 且小区里有一条平行于 BO 的小路 CD . 已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了 10 分钟, 从 D 沿 DA 走到 A 用



了 6 分钟. 若此人步行的速度为每分钟 50 米, 求该扇形的半径 OA 的长 (精确到 1 米)

答案: 1. $\frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 3. $-\frac{63}{65}$ 4. 等腰三角形或直角三角形 5. $A = \frac{2\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}$.

6. $\frac{\pi}{3}$ 7. ① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{24}{25}$ 8. $\angle A = 120^\circ$.

9. $\arcsin \frac{10}{\sqrt{221}}$ 或 $\pi - \arcsin \frac{10}{\sqrt{221}}$ 10. 3 或 6 11. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 12. D

13. $a = \frac{24}{5}, c = \frac{16}{5}$ 14. $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ 15. $B \in (0, \frac{\pi}{3}]$ 16. 略 17. $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18. $B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ 19. ①③④ 20. $\sqrt{5}$ km. 21. C 22. 9 23. 445 米

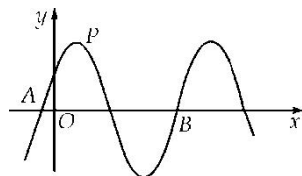
第 10 讲 三角函数综合复习 (2)

【A 组】

1. 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin\theta + \cos\theta =$ ____.
2. 函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}\sin^2 x$ 的最小正周期是_____.
3. 已知 $\alpha \in R, \sin\alpha + 2\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____
4. 设 α 为锐角, 若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$ 的值为_____.
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , 且 $a=1, B=45^\circ, S_{\triangle ABC}=2$, 则 $b=$ _____.

【B 组】

6. 方程 $3\sin x = 1 + \cos 2x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的解为_____.
7. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3、5、7, 则该三角形的外接圆半径等于_____.
8. 已知 $\sin\theta = \frac{1-a}{1+a}, \cos\theta = \frac{3a-1}{1+a}$ 若 θ 是第二象限角, 求实数 a 的值_____.
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C = 3\angle B$, 则 $\frac{c}{b}$ 的取值范围为_____.
10. 函数 $y = \sin^2 x + 2\cos x$ 的定义域为 $[-\frac{2\pi}{3}, \alpha]$, 值域为 $[-\frac{1}{4}, 2]$, 则 α 的取值范围是_____.
11. 若函数 $f(x) = \sin\frac{x+\varphi}{3}$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) 是偶函数, 则 $\varphi =$ _____.
12. 记 $\cos(-80^\circ) = k$, 那么 $\tan 100^\circ =$ ()
13. 若函数 $y = \cos 2x$ 与函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调性相同, 则 φ 的一个值是()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
14. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则“ $x \sin^2 x < 1$ ”是“ $x \sin x < 1$ ”的
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
15. 函数 $y = \sin(\pi x + \varphi)$ ($\varphi > 0$) 的部分图像如图所示, 设 P 是图像的最高点, A, B 是图像与 x 轴的交点, 则 $\tan \angle APB$ 的值是()



A. 2 B. 4 C. 8 D. 不确定

16. 已知函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x - 4\cos x$ 。

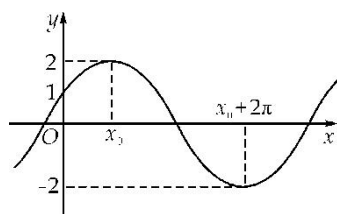
(I) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值; (II) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值。

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $\sin A + \sin C = p \cdot \sin B (p > 0)$, 且 $ac = \frac{1}{4}b^2$. (1) 当 $p = \frac{5}{4}$, $b = 1$ 时, 求 a , c 的值; (2) 若 B 为锐角, 求实数 p 的取值范围。

18. 已知函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$) 的图像与 y 轴的交点为 $(0, 1)$, 它在 y 轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为 $(x_0, 2)$ 和 $(x_0 + 2\pi, -2)$ 。

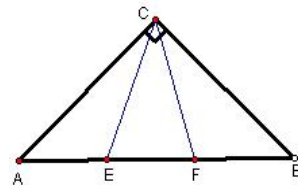
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若锐角 θ 满足 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 求 $f(2\theta)$ 的值

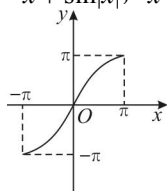


19. E , F 是等腰直角 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的三等分点, 则 $\tan \angle ECF =$ ()

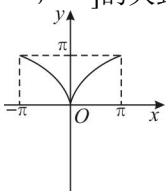
- (A) $\frac{16}{27}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$



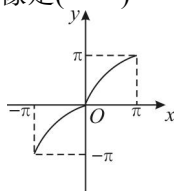
20. 函数 $y = x + \sin|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ 的大致图像是()



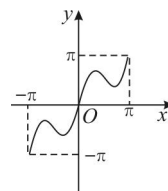
(A)



(B)



(C)

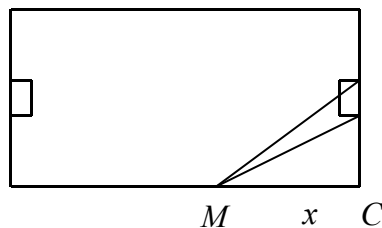


(D)

【C 组】

21. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & |x| > 1 \end{cases}$, 则关于 x 的方程 $f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0$ 的实根的个数是___

22. 设足球场宽 65 米, 球门宽 7 米, 当足球运动员沿边路带球突破, 距底线多远处射球门, 对球门所张的角最大? (保留两位小数)



23. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x + 2(1-x)\sin(ax)$, $x \in (0, 1)$, 若函数 $y = 2x - 1$ 与 $y = f(x)$ 的图像有且仅有两个不同的公共点, 则 a 的取值范围_____

24. 已知函数 $f(x) = (a + 2\cos^2 x)\cos(2x + \theta)$ 为奇函数, 且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, 其中

$a \in R, \theta \in (0, \pi)$.

(1) 求 a, θ 的值; (2) 若 $f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -\frac{2}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 求 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

25. 已知 $\triangle ABC$ 中, 三边长 a, b, c 满足 $a^2 - a - 2b - 2c = 0$, $a + 2b - 2c + 3 = 0$, 则这个三角形最大角的大小为_____.

答案:

1. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ 2. π 3. $-\frac{3}{4}$ 4. $\frac{17\sqrt{2}}{50}$ 5. 5 6. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 7. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

8. $\frac{1}{9}$ 9. (1, 3) 10. $0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ 11. $\frac{3}{2}\pi$ 12. B 13. D

14. B 15. C 16. (I) $-\frac{9}{4}$ (II) 当 $\cos x = -1$ 时, $f(x)$ 取最大值 6; 当 $\cos x = \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$

取最小值 17. (1) $\begin{cases} a=1 \\ c=\frac{1}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ c=1 \end{cases}$ (2) $p \in \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

18. (1) $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ (2) $\frac{1+2\sqrt{6}}{3}$ 19. D 20. C 21. 5

22. 当 $x \approx 32.31$ (米) 时, α 取最大值, 此时对球门的张角最大.

23. $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right]$ 24. (1) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $a = -1$. (2) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ 25. 120°

第 11 讲 三角函数综合复习 (2)

1. 函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像对称轴为_____对称中心为_____

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$$

答案: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in Z)$ $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in Z)$

2. 函数 $y = (\sin x + \cos x)^2$ 的最小正周期是_____.

【答案】 π

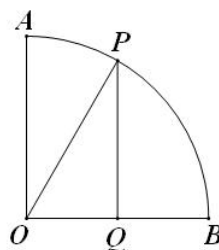
【解析】 $y = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$ 则 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

3. 如图, 扇形 OAB 的半径为 1, 圆心角为 $\frac{\pi}{2}$, 若 P 为弧 AB 上异于 A, B 的点, 且 $PQ \perp OB$

交 OB 于点 Q , 当 ΔPOQ 的面积大于 $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 时, $\angle POQ$ 的大小范围为_____

【答案】 $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

【解析】 $S = \frac{1}{2} OP \cdot OQ \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 \cdot \cos \theta) \sin \theta = \frac{1}{4} \sin 2\theta > \frac{\sqrt{3}}{8}$, 则 $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$



4. 设函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($0 < \omega < 2$), 将 $f(x)$ 图像向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 单位后所得函数图像的对称轴与原函数图像的对称轴重合, 则 $\omega =$ _____.

【答案】: $\frac{3}{2}$

【解析】: 利用三角函数图像的特征, 得 $T = \frac{2\pi}{3}$, $\omega = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}n} = \frac{3}{n} \in (0, 2)$ 则 $\omega = \frac{3}{2}$

5. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若 $\log_a(\sin x - \cos x) = 0$, 则 $\sin^8 x + \cos^8 x =$ _____

【答案】 1

【解析】

$$\because \log_a(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\therefore \sin x - \cos x = 1$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1$$

$$\therefore \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2(\sin x \cdot \cos x)^4$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 = \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 \right]^2$$

$$= \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \right]^2 = 1$$

6. 已知函数 $y = \sin x$ 的定义域是 $[a, b]$, 值域是 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, 则 $b - a$ 的最大值是_____.

【答案】 $\frac{4\pi}{3}$

【解析】 $(b-a)_{\max} = \left(2k\pi + \frac{13\pi}{6}\right) - \left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$

7. 已知函数 $f(x) = \arcsin(2x+1)$ ，则 $f^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ _____

【答案】 $-\frac{1}{4}$

8. 现将函数 $y = \sec x, x \in (0, \pi)$ 的反函数定义为正反割函数，记为： $y = \operatorname{arcsec} x$ 。则

$\operatorname{arcsec}(-4) =$ _____。（请保留两位小数）

【答案】 1.82

【解析】 $y = \frac{1}{\cos x}, x \in (0, \pi)$ ，故可知 $\frac{1}{\cos t} = -4, \therefore t = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 1.82$

9. 若函数 $f(x) = \sin wx \cos wx + \sqrt{3} \cos^2 wx$ 的图像关于直线 $x = \frac{p}{3}$ 对称，则正数 w 的最小值为_____。

【答案】 $\frac{1}{4}$ 。

【解析】 化简可得 $f(x) = \sin\left(2wx + \frac{p}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，因为图像关于 $x = \frac{p}{3}$ 对称，所以 $x = \frac{p}{3}$ 的

时候， $f(x)$ 取得最值，所以 $\sin\left(2w \cdot \frac{p}{3} + \frac{p}{3}\right) = \pm 1$ ，即 $\frac{2}{3}w + \frac{p}{3} = \frac{p}{2} + kp \quad (k \in \mathbb{Z})$ ，所以

$w = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}k \quad (k \in \mathbb{Z})$ ，即最小的正数 w 为 $\frac{1}{4}$ 。

10. 已知函数 $f(x) = \sin 2(x+\varphi) (\varphi > 0)$ 是偶函数，则 φ 的最小值是_____。

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】 $f(0) = \sin 2\varphi = \pm 1$ ，得 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}) > 0$ ， $\therefore \varphi_{\min} = \frac{\pi}{4}$

11. 函数 $y = |\sin x + \arcsin x|$ 的最大值为_____

【答案】 $\frac{\pi}{2} + \sin 1$

【解析】 $y = |\sin x + \arcsin x|$ 在 $[-1, 1]$ 上为偶函数，且在 $[0, 1]$ 上为单调递增，所以最大值为

$\frac{\pi}{2} + \sin 1$

设函数 $f(x) = A\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0, A > 0$), $x \in [0, 2\pi]$, 若 $f(x)$ 恰有 4 个零点, 12.

则下述结论中: ① 若 $f(x_0) \geq f(x)$ 恒成立, 则 x_0 的值有且仅有 2 个; ② $f(x)$ 在 $[0, \frac{8\pi}{19}]$ 上

单调递增; ③ 存在 ω 和 x_1 , 使得 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_1 + \frac{\pi}{2})$ 对任意 $x \in [0, 2\pi]$ 恒成立; ④

“ $A \geq 1$ ”是“方程 $f(x) = -\frac{1}{2}$ 在 $[0, 2\pi]$ 内恰有五个解”的必要条件;

所有正确结论的编号是_____

【答案】①③④

【解析】 $f(x) = A\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \omega x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{(6k+1)\pi}{6\omega}, k \in \mathbb{Z}$, 由 $f(x)$

恰有 4 个零点, 知 $x = \frac{(6 \times 4 + 1)\pi}{6\omega} > 2\pi$ 且 $x = \frac{(6 \times 3 + 1)\pi}{6\omega} \leq 2\pi \Rightarrow \omega \in [\frac{19}{12}, \frac{25}{12})$

$\sin(\omega x_0 - \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{(6k+2)\pi}{3\omega}, (k \in \mathbb{Z})$ 由

$x_0 \in [0, 2\pi] \Rightarrow k \in [-\frac{1}{3}, \omega - \frac{1}{3}], k \in \mathbb{Z}, \because \omega \in [\frac{19}{12}, \frac{25}{12}), \therefore k = 0 \text{ 或 } 1 \therefore$ ① 正确;

$f(x)$ 在 $[0, \frac{8\pi}{19}]$ 上单调递增, 则 $\omega x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi\omega}{19} - \frac{\pi}{6}] \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \omega \in (0, \frac{19}{12}]$, 矛

盾, 所以②错误;

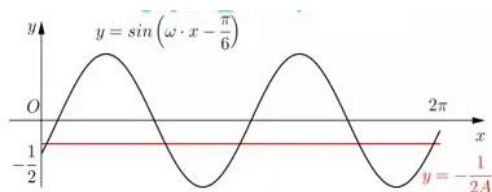
$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_1 + \frac{\pi}{2})$ 对任意 $x \in [0, 2\pi]$ 恒成立, 则

$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 2, \sin(2x_1 - \frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow x_1 = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$, 当 $k = 1$ 时, $x_1 = \frac{5\pi}{6}$ 符合题

意, 所以③正确;

$f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2A}$, 如图, 充要条件为 $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2A} \leq \sin(2\pi\omega - \frac{\pi}{6})$, 即

$T \leq 2\pi$ 且 $A \geq 1$, 也就是 $\omega \in [2, \frac{25}{12})$ 且 $A \geq 1$, 所以④正确



二、选择题

1. 将函数 $y = \sin(4x + \frac{\pi}{3})$ 的图像上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,

得到的函数图像的一条对称轴的方程为 ()

【A】 $x = -\frac{\pi}{12}$ 【B】 $x = \frac{\pi}{16}$ 【C】 $x = \frac{\pi}{4}$ 【D】 $x = \frac{\pi}{2}$

【答案】 A

2. 将函数 $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像向下平移 1 个单位, 得到 $g(x)$ 的图像, 若

$g(x_1) \cdot g(x_2) = 9$, 其中 $x_1, x_2 \in [0, 4\pi]$, 则 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为 ()

【A】 9 【B】 $\frac{37}{5}$ 【C】 3 【D】 1

【答案】 : A

【解析】: $g(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \in [-3, 1]$, $g(x_1)g(x_2) = 9$, $g(x_1) = g(x_2) = -3$

$$g(x) = -3 \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$x_1, x_2 \in \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}, \frac{29\pi}{12}, \frac{37\pi}{12}, \frac{15\pi}{4} \right\}$$

$$\frac{x_1}{x_2} \leq 9$$

3. 下列关于函数 $y = \sin x$ 与 $y = \arcsin x$ 的命题中正确的是 ().

- (A) 它们互为反函数 (B) 都是增函数
(C) 都是周期函数 (D) 都是奇函数

【答案】 D

【解析】

由

$y = \sin x$ 是周期函数, 不是增函数, $y = \arcsin x$ 是增函数, 不是周期函数, 故排除 B, C;

而 $y = \arcsin x$ 和 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 互为反函数, 故排除 A, 它们都是奇函数, 故选

择 D

4. “ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ” 是 “ $\sin(\arcsin x) = x$ ” 的 () 条件.

- (A) 充分非必要. (B) 必要非充分. (C) 充要. (D) 既非充分又非必要.

【答案】 B

【解析】设 $\arcsin x = t$ ，则 $x = \sin t$ ，其中 $-1 \leq x \leq 1$ ，所以定有 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，

但若 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，若 $|x| > 1$ ，则 $\arcsin x$ 不存在，

所以是必要不充分条件，选择 B

5. 设函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，若对于任意 $\alpha \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$ ，在区间 $[0, m]$ 上总存在唯一确定的

的 β ，使得 $f(\alpha) + f(\beta) = 0$ ，则 m 的最小值为 ()

A、 $\frac{\pi}{6}$ B、 $\frac{\pi}{2}$ C、 $\frac{7\pi}{6}$ D、 π

【解析】画出 $f(x)$ 图像， $\alpha \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(\alpha) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right] \Rightarrow \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \subseteq f(\beta)$ ，所

以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ，选 B

6. 对于 $\triangle ABC$ ，若存在 $\triangle A_1B_1C_1$ ，满足 $\frac{\cos A}{\sin A_1} = \frac{\cos B}{\sin B_1} = \frac{\cos C}{\sin C_1} = 1$ ，则称 $\triangle ABC$ 为

“V类三角形”。“V类三角形”一定满足 ()

【A】有一个内角为 30° 【B】有一个内角为 45°

【C】有一个内角为 60° 【D】有一个内角为 75°

【答案】B

【解析】由题意可得等腰三角形 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 均为锐角，且

$\cos A = \sin A_1, \cos B = \sin B_1, \cos C = \sin C_1$ ，设 $B = \alpha = C$ ，则 $A = \pi - 2\alpha$ ，由于 $\triangle A_1B_1C_1$

中， A_1, B_1, C_1 不会全是锐角，否则，有 $A + A_1 = \frac{\pi}{2}, B + B_1 = \frac{\pi}{2}, C + C_1 = \frac{\pi}{2}$ ，与三角形内

角和矛盾，所以 A_1, B_1, C_1 必有一个钝角，只能是顶角 A_1 为钝角， C_1 和 B_1 为锐角。所以

$B_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, C_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ，所以 $A_1 = 2\alpha$ ，再根据 $\cos A = \sin A_1$ ，可得 $\cos(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha$ ，

即 $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 0, 2\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ，顶角为 $\frac{\pi}{4}$ 。

7. 某港口某天 0 时至 24 时的水深 y (米) 随时间 x (时) 变化曲线近似满足如下函数模型：

$y = 0.5 \sin(\omega\pi x + \frac{\pi}{6}) + 3.24$ 。若该港口在该天 0 时至 24 时内，有且只有 3 个时刻水深为 3

米，则该港口该天水最深的时刻不可能为 ()

【A】16 时

【B】17 时

【C】18 时

【D】19 时

【答案】D

【解析】① $y = 0.5\sin(\omega\pi x + \frac{\pi}{6}) + 3.24$, $3 = 0.5\sin(\omega\pi x + \frac{\pi}{6}) + 3.24$

$$-0.24 = 0.5\sin(\omega\pi x + \frac{\pi}{6}), \quad -\frac{24}{50} = \sin(\omega\pi x + \frac{\pi}{6})$$

②利用数形结合。

三、解答题

1. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0, -\pi < \phi < 0$) 在一个周期内的图像经过 $B(\frac{\pi}{6}, 0)$, $C(\frac{2\pi}{3}, 0)$,

$D(\frac{\pi}{4}, 1)$ 三点, 求函数的表达式。

【答案】 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 或 $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(4x - \frac{2\pi}{3})$

【解析】(1) 当 $B(\frac{\pi}{6}, 0), C(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 是半周期内的两个相邻的零点。

则 $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \therefore T = \pi, \omega = 2$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{3} + \phi) = 0 \\ A\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = 1 \\ -\pi < \phi < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ \phi = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

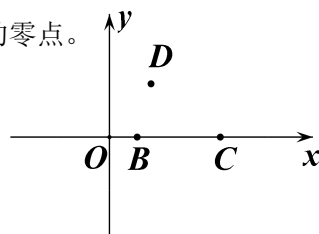
所以函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

(2) 当 $B(\frac{\pi}{6}, 0), C(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 是一个周期内的两个不相邻的零点。

则 $T = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \therefore T = \frac{\pi}{2}, \omega = 4$

$$\begin{cases} \sin(\frac{2\pi}{3} + \phi) = 0 \\ A\sin(\pi + \phi) = 1 \\ -\pi < \phi < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \phi = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

所以函数 $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(4x - \frac{2\pi}{3})$



2. 已知函数 $f(x) = \sin x \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sqrt{3} \sin x \cos x$

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及对称中心;

(2) 若 $f(x) = \alpha$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个解 x_1, x_2 , 求 α 的取值范围及 $x_1 + x_2$ 的值。

【答案】(1) $T = \pi, (\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, -\frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z}$ (2) $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3}$

【解析】(1) $f(x) = -\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} \therefore$

$T = \pi, (\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, -\frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z};$

(3) 数形结合, $a \in [0, \frac{1}{2})$, $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$

3. 如图, 某广场有一块边长为1(hm)的正方形区域 $ABCD$, 在点 A 处装有一个可转动的摄像头, 其能够捕捉到图像的角 $\angle PAQ$ 始终为 45° (其中点 P, Q 分别在边 BC CD 上) 设 $\angle PAB = \theta$, 记 $\tan \theta = t$.

(1) 用 t 表示的 PQ 长度, 并研究 $\triangle CPQ$ 的周长 l 是否为定值?

(2) 问摄像头能捕捉到正方形 $ABCD$ 内部区域的面积 S 至多为多少 hm^2 ?

【答案】: (1) $\triangle CPQ$ 的周长 l 是定值 2

(2) 摄像头能捕捉到正方形 $ABCD$ 内部区域的面积 S 至多为 $2 - \sqrt{2} \quad hm^2$

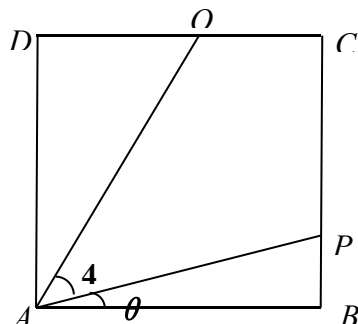
【解析】: 解: (1) $BP = t, CP = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$

$\angle DAQ = 45^\circ - \theta, DQ = \tan(45^\circ - \theta) = \frac{1-t}{1+t},$

$CQ = 1 - \frac{1-t}{1+t} = \frac{2t}{1+t}$

所以 $PQ = \sqrt{CP^2 + CQ^2} = \sqrt{(1-t)^2 + \left(\frac{2t}{1+t}\right)^2} = \frac{1+t^2}{1+t}$

故 $l = CP + CQ + PQ = 1 - t + \frac{2t}{1+t} + \frac{1+t^2}{1+t} = 1 - t + 1 + t = 2$



所以 $\triangle CPQ$ 的周长 l 是定值2

$$(2) S = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ADQ} = 1 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1-t}{1+t} = 2 - \frac{1}{2} \left(t + 1 + \frac{2}{1+t} \right) \leq 2 - \sqrt{2}$$

当且仅当 $t = \sqrt{2} - 1$ 时, 等号成立

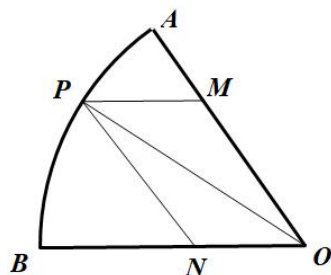
所以摄像头能捕捉到正方形 $ABCD$ 内部区域的面积 S 至多为 $2 - \sqrt{2} \text{ hm}^2$

4. 某居民小区为解决业主停车难的问题, 拟对小区内一块扇形空地 AOB 进行改建。如图所示, 平行四边形 $OMPN$ 区域为停车场, 其余部分建成绿地, 点 P 在围墙 AB 弧上, 点 M 和点 N 分别在道路 OA 与道路 OB 上, 且 $OA = 60$ 米,

$\angle AOB = 60^\circ$, 设 $\angle POB = \theta$ 。

(1) 求停车场面积 S 关于 θ 的函数关系式, 并指出 θ 的取值范围;

(2) 当 θ 为何值时, 停车场面积 S 最大, 并求出最大值(精确到0.1平方米)



【答案】(1) $S = 2400\sqrt{3} \sin \theta \sin(60^\circ - \theta)$, θ 的取值范围为

$$0^\circ < \theta < 60^\circ$$

$$(2) 1039.2m^3$$

【解析】(1) 由平行四边形 $OMPN$ 得, 在 $\triangle OPN$ 中, $\angle ONP = 120^\circ$, $\angle OPN = 60^\circ - \theta$,

$$\text{则 } \frac{ON}{\sin \angle OPN} = \frac{OP}{\sin \angle ONP} = \frac{PN}{\sin \angle PON}, \text{ 即 } \frac{ON}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{60}{\sin 120^\circ} = \frac{PN}{\sin \theta},$$

$$\text{即 } ON = 40\sqrt{3} \sin(60^\circ - \theta), \quad PN = 40\sqrt{3} \sin \theta,$$

$$\text{则停车场面积 } S = ON \cdot PN \cdot \sin \angle ONP = 2400\sqrt{3} \sin \theta \sin(60^\circ - \theta),$$

$$\text{即 } S = 2400\sqrt{3} \sin \theta \sin(60^\circ - \theta), \text{ 其中 } 0^\circ < \theta < 60^\circ$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } S = 2400\sqrt{3} \sin \theta \sin(60^\circ - \theta) = 2400\sqrt{3} \sin \theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right),$$

$$\text{即 } S = 3600 \sin \theta \cos \theta - 1200\sqrt{3} \sin^2 \theta = 1800 \sin 2\theta + 600\sqrt{3} \cos 2\theta - 600\sqrt{3},$$

$$\text{则 } S = 1200\sqrt{3} \sin(2\theta + 30^\circ) - 600\sqrt{3}$$

因为 $0^\circ < \theta < 60^\circ$, 所以 $30^\circ < 2\theta + 30^\circ < 150^\circ$,

则 $2\theta + 30^\circ = 90^\circ$ 时, $S_{\max} = 1200\sqrt{3} \times 1 - 600\sqrt{3} = 600\sqrt{3} \approx 1039.2$ 平方米.

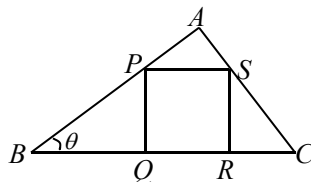
故当 $\theta = 30^\circ$ 时, 停车场最大面积为 1039.2 平方米

5. 如图所示, 直角 $\triangle ABC$ 中, $AB = a$ (a 为常数), $\angle A = 90^\circ$, $\angle ABC = \theta$, $PQRS$ 是其内接正

方形, 它的一边在斜边 BC 上.

(1) 将 $\triangle ABC$ 的面积 S_1 与正方形 $PQRS$ 的面积 S_2 分别表示为 θ 的函数;

(2) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值及取得最小值时相应的 θ 值.



解: (1) 设正方形的边长为 x , $AB = AP + PB = x \cos \theta + \frac{x}{\sin \theta} \Rightarrow x = \frac{a \sin \theta}{1 + \sin \theta \cos \theta}$.

$$\therefore S_2 = x^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(1 + \sin \theta \cos \theta)^2}. \text{ 又 } AC = a \tan \theta. \therefore S_1 = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} a^2 \tan \theta.$$

(

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\tan \theta (1 + \sin \theta \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} = \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = 1 + \left(\frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right),$$

令 $\sin 2\theta = t$, $\because 0 < 2\theta < \pi$, $\therefore t \in (0, 1]$.

设 $f(t) = 1 + \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{4} \right)$, 易知 $f(t)$ 在 $t \in (0, 1]$ 时单调递减,

故当 $t = \sin 2\theta = 1$, 即当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(t)_{\min} = 1 + \left(1 + \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{4}$. 即 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.

第 12 讲 数列的概念

$$1. a_n = 10^n - 1; 2. a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, n \text{ 为奇数}, \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}; 3. 1, 5, \frac{1}{5}, 11; 4. a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+2}; 5. \frac{4}{3}; 6. 2;$$

$$7. a_3 = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}; 8. (5, 4); 9. a_n = 2n; 10. 6; 11. a_n = 3^{2^{n-1}}; 12. 4.$$

13. B; 14. A; 15. D; 16. A.

$$17. (a_n)_{\min} = a_4 = \frac{41}{4}.$$

$$18. (1) a_n = \sqrt{n^2 + 1} + n; (2) a_{n+1} - a_n > 0.$$

$$19. (1) a_1 = a, a_2 = \frac{2a}{a+1}, a_3 = \frac{4a}{3a+1}, a_4 = \frac{8a}{7a+1}; (2) a_n = \frac{2^{n-1}a}{(2^{n-1}-1)a+1}.$$

$$20.(1) \begin{cases} b_1 = 2, \\ b_n = 2b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}; (2) b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8, b_n = 2^n.$$

$$21.(1) a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, \text{ 猜测 } a_n = n; (2) a \leq \frac{7}{12}.$$

第 13 讲 等差数列

$$1. \text{ 第 16 项, } a_{16} = -3; 2. a = \lg \frac{3}{2}, b = \lg 3; 3. 3d; 4. n = 5; 5. 15; 6. -4;$$

$$7. -82; 8. 14; 9. 9; 10. 6000; 11. -15; 12. -20.5.$$

$$13. A; 14. C; 15. B; 16. B;$$

$$17. n = 11.$$

$$18. \frac{37}{88}.$$

$$19. 800.$$

$$20. 10313.$$

$$21. -\frac{20}{9} < d < -2, S_5 \text{ 最大}.$$

第 14 讲 等比数列

1. 4; 2. $x=3\sqrt{2}, y=6\sqrt{3}$; 3. ± 1 ; 4. -4; 5. 3^7 ; 6. -27;
7. 1123; 8. 14; 9. $n \geq 5$; 10. 30; 11. $\sqrt[n]{m}-1$; 12. $S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 2$.
13. C; 14. B; 15. C; 16. B.
17. $S_4 = \pm 15\sqrt{2}$.
18. $b_n = -\frac{1}{2}n + \frac{7}{2}$, 当 $n=6$ 或 7 时, $(S_n)_{\max} = \frac{21}{2}$.
19. $S_n = \begin{cases} n(1+r), & q=1 \\ \frac{(1+r)(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$
20. 略.
21. $a_n = \frac{1}{2^n}$.

第 16 讲 数列的通项

1. $a_n = 2 \times 4^{n-1} - 1$; 2. $a_n = 27 - \frac{22}{3^{n-1}}$; 3. $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$; 4. $a_n = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$; 5. $a_n = \frac{1}{4n+1}$;
6. $a_n = \sqrt{n+8}$; 7. $a_n = n^2$; 8. $a_n = 2^{3 \times 2^{n-1} - 1}$; 9. $a_n = 4^{\frac{1}{n}}$; 10. $a_n = 3^{n-1} \cdot (n+1)$; 11.
 $a_n = \frac{8^n - 3^n}{5}$; 12. $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$.
13. D; 14. B; 15. A; 16. C.
17. $a_n = 1 - \frac{1}{4^{n-1}}$.
18. $a_n = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2}$
19. $a_n = 2^{n-1} \cdot (6n-5)$, $b_n = 2^{n-1} \cdot (6n-7)$.
20. $a_n = n+5$, $b_n = 3n+2$; $T_n = \frac{n}{2n+1}$.

$$21. a_n = 2^{\frac{n^2-2n}{2}}; (b_n)_{\min} = b_5 = -\frac{25}{2}; T_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + 5n, 1 \leq n \leq 5, \\ \frac{1}{2}n^2 - 5n + 25, n \geq 6 \end{cases}.$$

第 17 讲 数列的前 n 项和

$$1. S_n = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - n; 2. S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2^n} + 1; 3. S_n = 2^{n+1} - n - 2;$$

$$4. S_n = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{15} \cdot 4^{n+2} - \frac{16}{15}, n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{15} \cdot 4^{n+1} + \frac{17}{15}, n \text{ 为奇数} \end{cases}; 5. \begin{cases} -\frac{2}{9}n^2 - \frac{2}{3}n, n \text{ 为偶数}, \\ \frac{2}{9}n^2 + \frac{2}{3}n + \frac{7}{9}, n \text{ 为奇数} \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} -n^2 + 2n, 1 \leq n \leq 10, \\ 2^n - 1104, n \geq 11 \end{cases}; 7. S_n = 4 - \frac{3n+4}{2^n}; 8.$$

$$S_n = \begin{cases} 0, x = 0, \\ n^2, x = 1, \\ \frac{1 - (2n-1)x^n}{1-x} + \frac{2x - 2x^n}{(1-x)^2}, x \neq 0, x \neq 1 \end{cases}$$

$$9. 1008\sqrt{2}; 10. S_n = \frac{n}{2n+1}; 11. S_n = \frac{n}{4(n+1)}; 12. n = 99.$$

$$13. D; 14. C; 15. C; 16. A.$$

$$17. T_n = \begin{cases} -\frac{5}{2}n^2 + \frac{45}{2}n, 1 \leq n \leq 5, \\ \frac{5}{2}n^2 - \frac{45}{2}n + 50, n \geq 6 \end{cases}$$

$$18. a_n = -2n + 10; G_n = \begin{cases} -n^2 + 90n, 1 \leq n \leq 5, \\ n^2 - 90n + 40, n \geq 6 \end{cases}; m_{\max} = 7.$$

$$19. r = -1; T_n = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

$$20. a_3 = -\frac{1}{16}; \quad a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{n+1}}, n \text{ 为奇数}, \\ \frac{1}{2^n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$21. a_n = \frac{1}{2^n}; \quad T_n = \frac{1}{2}n(1+n) + \frac{n+2}{2^n} - 2.$$

第 18 讲 期末综合复习

$$1. -3 \quad 2. -\frac{3}{2} \quad 3. -2 \quad 4. \{x \mid x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$5. \frac{1}{3} \quad 6. \sin(\alpha - \beta) \quad 7. \frac{\pi}{3} \quad 8. \text{没有}$$

$$9. -1 \quad 10. \frac{2}{5} \quad 11. \frac{\cos \theta}{\sin(45^\circ + \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sin(135^\circ - \theta)} = \sqrt{2} \quad 12. [-3, -2]$$

$$13. C \quad 14. C \quad 15. D \quad 16. A$$

$$17. (1) a_n = 2n - 1; \quad (2) 41.$$

$$18. (1) a_n = 2^n; \quad (2) A = 2^{n+2} - 2n - 4.$$

$$19. (1) \frac{64}{7}\pi; \quad (2) (1, \sqrt{11}) \cup (\sqrt{61}, 11).$$

$$20. (1) -\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}; \quad (2) \arccos \frac{204}{325}.$$

$$21. (1) f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1, \quad T = \pi, \quad [-1, 3];$$

$$(2) [-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}; \quad (3) (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}].$$