

初一数学 新编教案

目 录

第一讲	代数式及代数式的值.....	2
第二讲	整式及合并同类项.....	5
第三讲	整式的加减.....	9
第四讲	同底数幂的乘法.....	12
第五讲	幂的乘方.....	14
第六讲	积的乘方、幂的运算混合运算.....	17
第八讲	整式的乘法.....	21
第九讲	平方差公式.....	25
第十讲	完全平方公式.....	28
第十一讲	整式乘法、乘法公式复习.....	31
第十二讲	提取公因式法和公式法.....	35
第十三讲	十字相乘和分组分解法因式分解.....	39
第十四讲	因式分解复习.....	43
第十六讲	第九章复习.....	46

第一讲 代数式及代数式的值

知识点:

- 1、代数式: 用运算符号和括号把数或表示数的字母连接而成的式子.
- 2、代数式的值: 用数值替代代数式里的字母, 按照代数式中的运算关系计算得出的结果.

例题精讲:

思考: ★★★1、三个连续偶数,

(1) 若设中间的数为 n , 则另两个数分别怎么表示?

(2) 若设中间的数为 $2k$ (为什么可以这样设?), 则另两个数分别怎么表示?

★★★★2、(1) 正整数中, 奇数从小到大排列, 第 3 个数是____, 第 10 个数是____, 第 n 个数是____, 第 2019 个数是____

(2) 从 3 开始的所有奇数从小到大排列, 第 k 个数是 $2(\quad) - 1 = \underline{\quad}$, 第 n 个数是____, 这两者有何异同?

★★例题 1: 设某数为 x , 用 x 表示下列各数:

- (1) 比某数的 $\frac{2}{3}$ 还多 2 的数;
- (2) 某数减去 3 的差与 5 的积;
- (3) 某数的 3 倍的平方与某数的 2 倍多 1 的商.

★★练习 1: 用代数式表示:

- (1) 比 a 的 3 倍还多 2 的数;
- (2) b 的 $\frac{4}{3}$ 倍的相反数;
- (3) x 与 y 的平方和的倒数减去 $\frac{1}{2}$ 的差;
- (4) 9 减去 y 的 $\frac{1}{3}$ 的差;

★★★★(5) 观察下列数,用含 n 的代数式表示:

(1) 1,3,5,...;

(2) 4,8,12,16,...;

(3) 2,5,8,11,14,...

★★★例题 2: 某次数学测验,班级平均为 a , 班级中男生 20 名平均得 b 分,女生的平均分是多少?

★★练习 2: 一个三角形面积是 S , 底为 a , 求该三角形的高?

★★练习 3: 买一本笔记本需 8 元, 一支圆珠笔需 3 元, 现买了 a 本笔记本, b 支圆珠笔, 付给售货员 100 元, 可找回多少钱?

★★练习 4: 小明从家到学校要走 1000 米, 上学时速度为每小时 a 米, 放学回家速度为每小时 b 米, 问小明该天上学与放学路上共花了几小时?

★★例题 3: 当 a 分别取下列值时, 求代数式 $\frac{a^2+1}{2a}$ 的值.

(1) $a=2$; (2) $a=-3$; (3) $a=\frac{1}{2}$

★★★练习 5: 当 $x=-3$, $y=-\frac{1}{2}$ 时, 求下列各代数式的值:

(1) $3x^2 - 6xy + 4y^2$; (2) $(x+y)(x-y)$

★★★例题 4: 若 $a^2 = a + 2019$, 求 $(a^2 - a - 2020)^{2021}$ 的值.

★★★练习 6: 已知: $2x^2 + 3 - 4y^3 = 1$, 则代数式 $x^2 - 2y^3 + 2$ 的值是多少?

★★★例题 5: 已知: $|x - 2y| + (3x - 2)^2 = 0$, 求 $\frac{x}{y^2}$ 的值.

★★★练习 7: 若 $|x-4| + (2y-x)^2 = 0$, 求代数式 $x^2 - 2xy + y^2$ 的值.

★★★练习 8: 已知: $\frac{a-2b}{a+2b} = 4$, 求代数式 $\frac{3(a-2b)}{4(a+2b)} + \frac{3(a+2b)}{a-2b}$ 的值.

第二讲 整式及合并同类项

知识点:

- 1、单项式: 由数与字母的积或字母与字母的积所组成的代数式.
- 2、系数: 单项式中的数字因数叫做这个单项式的系数.
- 3、次数: 一个单项式中, 所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数.
- 4、多项式: 有几个单项式的和组成的代数式叫做多项式.

多项式的项: 在多项式中的每个单项式.

常数项: 不含字母的项.

次数最高项的次数就是这个多项式的次数.

- 5、整式: 单项式, 多项式统称为整式.
- 6、同类项: 所含的字母相同, 且相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项.
- 7、合并同类项: 把多项式中的同类项合并成一项, 叫做合并同类项.

几项式: 一个多项式合并后含有几项, 这个多项式就叫做几项式.

- 8、合并同类项的法则:

把同类项的系数相加的结果作为合并后的系数, 字母和字母的指数不变.

例题精讲:

★★例题 1: (1) 下列代数式中哪些是单项式? 哪些是多项式?

$$ab^2; \quad 2a+3b; \quad -4a^2b^4; \quad \frac{2a-5b}{7}$$

(2) $\frac{1}{\pi}ab$ 单项式, $-\frac{xy}{3}$ 单项式. (填“是”或“不是”)

★★练习 1:

- (1) 代数式 $(ab)^3$ 是 _____ 次 _____ 项式;
- (2) 代数式 $-\frac{3}{2}x^2 + yz$ 是 _____ 次 _____ 项式;
- (3) 单项式 -3^4x^2y 的系数是 _____, 次数是 _____ 次;
- (4) 单项式 πr^2 的系数是 _____, 次数是 _____ 次;
- (5) 多项式 $\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}x^2y^2 + 3$ 是 _____ 次 _____ 项式, 最高次项是 _____.

(6) 多项式 $1+x^m y+9y^m$ 是三次多项式, 则 $m=$ _____.

★★★例题 2: 如果 $(4-m^2)a^6-2a^{m+3}b^n+3ab$ 是关于 x, y 的五次二项式, 求 m, n 的值.

★★★练习 2: (1) 如果 $x^{2m-3}y^4+xy^{m+1}$ 是五次多项式, 求 m 的值.

(2) 若多项式 $4a^2x^3+ax^2-16x^3-2x^2+3x-5$ 是关于 x 的二次多项式, 求 a 的值.

★★例题 3: 将多项式 $3+6x^2y-2xy-5x^3y^2-4x^4y$ 先按字母 x 降幂排列, 再按字母 y 升幂排列.

★★★练习 3:

(1) 将多项式 $m^3n-2n^2+\frac{1}{3}mn^4+\frac{1}{4}m^2$ 按字母 m 升幂排列得_____.

(2) 将多项式 $x^4-3xy^3+4x^2y^4-2y^2$ 按字母 y 降幂排列后的第三项系数是_____.

(3) 多项式 $(3x-1)^4$ 的展开式为 $81x^4-108x^3+54x^2-12x+1$, 则各项系数和是_____.

(4) 已知：五次五项式 $x^5 + x^{n-1} + x^2 - x + 3$ 已按字母 x 降幂排列，那么 n 可取的值是_____.

(5) 已知：七次多项式 $x^3 + x^{2a} + 2x^6 - 4x^7$ 已按字母 x 升幂排列，那么 a 可取的值_____.

(6) 写出所有系数为 2，且字母 x 及 y 的五次单项式(按 x 降幂排序).

★★★★例题 4:

已知多项式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 3x^3 + x - 1$ ，求代数式 $3a^d - 2b^d + c^d + 2e^d$ 的值. 【4】

★★例题 5：合并同类项

(1) $2x^3 + 3x^3 - 4x^3$;

(2) $\frac{1}{2}ab^2 - 2ab^2 + \frac{3}{4}ab^2$;

(3) $2x^2 - xy + 3y^2 + 4xy - 4y^2 - x^2$

★★★例题 6：求代数式的值:

(1) $3x - 2y - 4x + 6y + 1$ ，其中 $x = 2, y = 3$;

(2) $2x^2 - xy - 3y^2 + 4xy + 5 + 2y^2 - 6x - 3$ ，其中 $x = \frac{1}{2}, y = 2$.

★★★练习 4: 若单项式 $5x^{a+3b}y^5$ 与 $-3x^7y^{2a+3b}$ 是同类项, 求 $a+2b$ 的值.

★★练习 5: 先化简代数式 $5.4x^2 - 0.6xy + 8y^2 - 1.4xy + 0.6x^2$, 再求当 $x=3$, $y=\frac{1}{2}$ 时该代数式的值.

★★★★例题 7:

把一个两位数的个位上和十位上的数字对调后, 得到一个新的两位数(十位上数字与个位上数字不同), 再与原数相加, 它们的和能被 11 整除. 这样的两位数一共有几个? 【5】

第三讲 整式的加减

知识点:

去括号法则:

括号前面是“+”号, 去掉“+”号和括号, 括号里的各项不变号;

括号前面是“-”号, 去掉“-”号和括号, 括号里的各项都变号.

例题精讲:

★★例题 1: 去括号, 添括号(负括号):

(1) 去括号: $a^2 - (-2m - n + b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $-5a + 7b + 9c = -(\underline{\hspace{2cm}}) = -5a - (\underline{\hspace{2cm}})$.

★★例题 2: (1)求整式 $2a+3b-1$ 与 $3a-2b+2$ 的 2 倍的和.

(2)求整式 $3x^2 - 2x + 1$ 减去 $-x^2 + x - 3$ 的差.

★★例题 3: 化简: $2(2a^2 - 9b) - 3(-4a^2 + b)$.

★★练习 1:

(1) 去括号: $(x + 2y) - (3a - 4b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 去括号: $-(x + 2y) - (3a - 4b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $(x+2y)-(3a-4b)=(x-3a)-(\quad)$.

(4) $(x-2y)-(3a-4b)=(x+4b)+(\quad)$.

(5) 化简: $(13x-11y+10z)-(15x+10y-15z)=$ _____.

★★★练习 2: 先化简, 再求值:

$(-a^3-3a^2+7a-8)-(3a^3-2a^2-5a+2)-(-a^3-2a^2+4)$, 其中 $a=\frac{1}{2}$.

★★★练习 3: 先化简, 再求值:

$(3a^2-ab+7)-(5ab-4a^2+7)$, 其中 $a=2, b=\frac{1}{3}$.

★★★例题 4: 已知多项式 $5x^2-2mxy-13y^2-x+y-1$ 与 $4x^2-2xy-10y^2+x-y+1$

求满足下列条件时的 m 的值

(1) 它们的差不含 xy 项; (2) 前者的 3 倍与后者 2 倍的和不含 xy 项

★★★练习 5: 多项式 $(ax^2 - 3x + 1) - (5 - 3x + 2x^2)$ 的值不随 x 而变化, 则 a 的值是多少?

★★例题 6: $A = -x^2 - 1$, $A - B = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$, 用两种办法求 B .

★★练习 6: (1) 已知 $A = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{3}{4}y^2$, $B = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{2}y^2$, 求 $A - 2B$.

(2) 已知: $a^3 + b^3 = 26$, $a^2b - ab^2 = -12$, 求 $(a^3 - b^3) + (4ab^2 - 2a^2b) - 2(ab^2 - b^3)$ 的值.

第四讲 同底数幂的乘法

一、知识点概要：

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 都是正整数})$$

二、例题：

★★例 1、计算（结果用幂的形式表示）

$$(1) \quad 7^8 \times 7^7 \qquad (2) \quad (-2)^8 \times (-2)^7 \qquad (3) \quad a \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot a^6$$

$$(4) \quad (a-b)^2 \cdot (a-b) \qquad (5) \quad -b(-b)(-b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

★★例 2、符号问题：在下列各式的横线上填上适当的“+”、“-”号，使式子成立：

$$(1) \quad (-2)^4 = \underline{\hspace{1cm}} 2^4; \qquad (2) \quad (-3)^3 = \underline{\hspace{1cm}} 3^3;$$

$$(3) \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \underline{\hspace{1cm}} \left(\frac{1}{2}\right)^5; \qquad (4) \quad (-4)^2 = \underline{\hspace{1cm}} 4^2.$$

结论：

★★练习：在下列各题的横线上，填上适当的“+”、“-”号，使式子成立：

$$(1) \quad (-a)^3 = \underline{\hspace{1cm}} a^3; \qquad (2) \quad (-a)^4 = \underline{\hspace{1cm}} a^4;$$

$$(3) \quad (-a)^5 = \underline{\hspace{1cm}} a^5.; \qquad (4) \quad 2(-a^6) = \underline{\hspace{1cm}} 2a^6;$$

$$(5) \quad (b-a)^3 = \underline{\hspace{1cm}} (a-b)^3; \qquad (6) \quad -(m-3n)^8 = \underline{\hspace{1cm}} (3n-m)^8;$$

★★★例 3、计算下列各式，结果用幂的形式表示：

$$(1) \quad (-3)^3 \times 3^6; \qquad (2) \quad (-a)^5 \cdot a^4; \qquad (3) \quad (a-b)^2 \cdot (b-a)^3.$$

$$\text{★★★例 4、计算：} (1) \quad a^2 \cdot (-a)^2 - a^3 \cdot a; \qquad (2) \quad a^3 \cdot (-a)^2 + a \cdot (-a)^4.$$

★★★例 5、计算：

$$(1) -a^2 \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3; \quad (2) (3.5 \times 10^3) \times (4.5 \times 10^{11})$$

★★例 6、若 $2a^4 = 162$ ，则 a 的值为_____

★★例 7、如果 $a^m = 3$ ， $a^n = 4$ ，求 a^{m+n} 的值.

★★★例 8、计算： $64 \div 4^{m+1} \times 4^{m-1}$

★★★★例 9、利用同底数幂的乘法法则化简：

$$(a+b)^{2n+1}(a-b)^5(-a+b)^{2n-3}(-b-a)^{2n}(b-a)^n$$

★★★★例 10、已知 $x^{2m-n} \cdot x^{2n-m} = x^{13} (x > 1)$ ， $y^{m-1} \cdot y^{-1-n} = y (y > 1)$ ，求 m、n 的值.

第五讲 幂的乘方

【知识点梳理】

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 都是正整数})$$

【例题分析】

例题精讲

类型一 幂的乘方的计算

例 1 计算 (1) $(5^4)^3$ (2) $-(a^2)^3$ (3) $[(-a)^6]^3$ (4) $[(a+b)^2]^4$

练习 (1) $(a^4)^{3+m}$; (2) $[-\frac{1}{2}]^3]^2$; (3) $[-(a+b)^4]^3$

类型二 幂的乘方公式的逆用

例 1 已知 $a^x=2$, $a^y=3$, 求 a^{2x+y} ; a^{x+3y}

随堂练习

(1) 已知 $a^x=2$, $a^y=3$, 求 a^{x+3y}

(2) 如果 $9^x = 3^{x+3}$, 求 x 的值

随堂练习

已知: $8^4 \times 4^3 = 2^x$, 求 x

类型三 幂的乘方与同底数幂的乘法的综合应用

例 1 计算下列各题

$$(1) (a^2)^2 \cdot a^5$$

$$(2) (-a)^2 \cdot a^7$$

$$(3) x^3 \cdot x \cdot x^4 + (-x^2)^4 + (-x^4)^2 \quad (4) (a-b)^2 (b-a)$$

3、当堂测评

填空题:

$$(1) (m^2)^5 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad - \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right]^2 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad [-(a+b)^2]^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) [-(-x)^5]^2 \cdot (-x^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (x^m)^3 \cdot (-x^3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) (-a)^3 \cdot (a^n)^5 \cdot (a^{1-n})^5 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad -(x-y)^2 \cdot (y-x)^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) x^{12} = (x^3)^{\underline{\hspace{1cm}}} = (x^6)^{\underline{\hspace{1cm}}}.$$

$$(5) x^{2m(m+1)} = (\underline{\hspace{1cm}})^{m+1}. \quad \text{若 } x^{2m} = 3, \text{ 则 } x^{6m} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(6) \text{ 已知 } 2^x = m, \quad 2^y = n, \text{ 求 } 8^{x+y} \text{ 的值 (用 } m, n \text{ 表示).}$$

判断题

$$(1) a^5 + a^5 = 2a^{10} \quad (\quad)$$

$$(2) (s^3)^3 = s^6 \quad (\quad)$$

$$(3) (-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^6 = -3^6 \quad (\quad)$$

$$(4) x^3 + y^3 = (x+y)^3 \quad (\quad)$$

$$(5) [(m-n)^3]^4 - [(m-n)^2]^6 = 0 \quad (\quad)$$

4、拓展:

$$1、\text{ 计算 } 5(p^3)^4 \cdot (-p^2)^3 + 2[(-p)^2]^4 \cdot (-p^5)^2$$

- 2、若 $(x^2)^n = x^8$, 则 $m =$ _____.
- 3、若 $[(x^3)^m]^2 = x^{12}$, 则 $m =$ _____。
- 4、若 $x^m \cdot x^{2m} = 2$, 求 x^{9m} 的值。

- 5、若 $a^{2n} = 3$, 求 $(a^{3n})^4$ 的值。

- 6、已知 $a^m = 2, a^n = 3$, 求 a^{2m+3n} 的值。

第六讲 积的乘方、幂的运算混合运算

【知识梳理】

一、积的乘方：

1、积的乘方定义：积的乘方指的是乘积形式的乘方。

2、积的乘方法则：积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，即：

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n \text{ 为正整数})$$

类似的有，商的乘方： $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (n 为正整数, $b \neq 0$)

3、积的乘方的逆用： $a^n b^n = (ab)^n$.

二、混合运算规则：先乘方，再乘除，后加减。

【例题分析】

★例 1 计算：

(1) $(4x)^3$;

(2) $(-2ab^2)^4$;

(3) $(-2x^2yz^3)^3$;

(4) $\left(\frac{2}{3}a^3b\right)^3$.

总结： $(abc)^n = a^n b^n c^n$ (n 为正整数)

★练习 1 计算：

(1) $(2x^3)^2$;

(2) $(-2xy)^2$;

(3) $\left(-\frac{1}{3} \times 10^4\right)^5$;

(4) $\left(-\frac{1}{2}ab^3c^2\right)^3$

★★例 2 计算:

$$(1) 2(-a)^3 \cdot a^4;$$

$$(2) (2x^2)^4 - 3x \cdot x^3 \cdot x^4;$$

$$(3) (-2x^2)^3 + (-3x^3)^2 + (-x)^6;$$

$$(4) (a-b)^2 \cdot [(b-a)^3]^2.$$

★★练习 2 计算:

$$(1) [(-a^3)^4 \cdot (-b^2)^3]^3;$$

$$(2) 3(x^3y^3)^4 - 2(x^2y^2)^6;$$

$$(3) (-a^3b^6)^4 + (-a^4b^8)^3;$$

$$(4) (a-b)^5 \cdot (b-a)^3$$

★★例 3 计算:

$$(1) -a^2 \cdot a^3 \cdot [(-a)^2]^3;$$

$$(2) -[-(-2x^2y)^2]^3 + [(-x^6)y^3]^2.$$

★★例 4 简便计算:

$$(1) 2^3 \times 5^3;$$

$$(2) 0.25^4 \times 4^4;$$

$$(3) 3^{10} \times \left(-\frac{1}{9}\right)^6.$$

(4) $2^4 \times 4^5 \times (-0.125)^4$;

(5) $(0.125)^{15} \times (2^{15})^3$.

★★练习 3 用简便方法计算:

(1) $0.25^{2019} \times (-4)^{2020}$;

(2) $\left(-\frac{11}{7}\right)^2 \times \left(\frac{42}{55}\right)^2$;

(3) $4^6 \times 5^{12}$;

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2020} \times 1.5^{2019} \times (-1)^{2021}$.

★★例 5 计算: $\left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{8} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1\right)^{10} \cdot (10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1)^{10}$.

★★★例 6 (1) 已知: $x^{m+n} = 65, x^m = 13$, 求 x^{2n} 的值.

(2) 已知: $(8a^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 7$, 求 $(a^2)^9$ 的值.

(3) 已知: $3^{x+1} \cdot 5^{x+2} = 15^{2x-3} \cdot 5$, 求 x 的值.

【能力提升】

★★1、已知 $10^a = 5, 10^b = 6$, 求(1) $10^{2a} + 10^{3b}$ 的值; (2) 10^{2a+3b} 的值.

★★2、 $2^{2019} \cdot 5^{2020}$ 积的末尾有多少个 0?

★★★3、已知 $a^{3m} = 3, b^{3n} = 2$, 求 $(a^{2m})^3 + (b^n)^3 - a^{2m} \cdot b^n \cdot a^{4m} \cdot b^{2n}$ 的值.

★★★4、比较大小: (1) $3^{44}, 4^{33}, 5^{22}$; (2) $3^{12} \times 5^{10}$ 与 $3^{10} \times 5^{12}$...

★★★5、已知: $M^4 = a^8 b^{12}$, 求 M 的值.

第八讲 整式的乘法

知识点 1: 单项式乘以单项式

单项式与单项式相乘的法则：单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘的积作为积的因式，其余字母连同它的指数不变，也作为积的因式。

注：单项式乘法中若有乘方、乘法等混合运算，应按“先乘方、再乘法”的顺序进行。

★例 1 计算：

$$(1) \quad 3a^4 \cdot 2a^5;$$

$$(2) \quad (-5x)^2 \cdot \frac{2}{5}xy;$$

$$(3) \quad \frac{1}{3}x^2y \cdot (-6x^3y^4);$$

$$(4) \quad 6a^2b \cdot 2ab^2 \cdot (-3a^2b^3);$$

★例 2 计算：

$$(1) \quad (-3z)^3 \cdot (3x^3y)^2;$$

$$(2) \quad (-5a^2b)^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}ab^3\right);$$

$$(3) \quad 3(y-x)^2[-2(x-y)^3] \text{ (把 } x-y \text{ 看作一个整体)}; \quad (4) \quad (2.5 \times 10^6) \cdot (8 \times 10^4);$$

★练习 1 计算：

$$(1) \quad ax^2 \cdot abx^n;$$

$$(2) \quad 2(-2x-y)^3 \cdot 5(2x+y)^2;$$

$$(3) \left(\frac{2}{3}a^2b^5\right)^3 \cdot \left(-\frac{9}{2}a^4bc\right);$$

$$(4) \left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right)^2 \cdot \left[-\frac{3}{2}(xy^2)^3\right] \cdot (-0.4xy)^2.$$

★★例 3 计算:

$$(1) 4(xy)^3x^2y^4 + \left(-\frac{3}{5}xy^3\right)^2 \cdot \frac{5}{3}x^3y;$$

$$(2) 3(x^2y^2z)^2x^3y^6z + \left(-\frac{2}{3}x^2y^3z\right)^3 \cdot \frac{5}{3}xy.$$

★★例 4 已知单项式 $5x^{2m}y^7$ 与 $-6x^{n+1}y^{3n-m}$ 是同类项, 求这两个单项式的乘积.

★★例 5 已知: $(a^{m+1}b^{n+2}) \cdot (a^{2n+1}b^{2n}) = a^5b^3$, 求 $m+n$ 的值.

知识点 2: 单项式乘以多项式

单项式与多项式相乘法则: 单项式与多项式相乘, 用单项式乘以多项式的每一项, 再把所得的积相加. 如: $b \cdot (p+q) = bp + bq$ 或 $(p+q) \cdot b = bp + bq$.

★例 6 计算:

$$(1) 2ab \cdot (5ab^2 - 3a^2b);$$

$$(2) \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right);$$

$$(3) -4ab[12(\frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}ab^2) - 5ab]; \quad (4) \frac{1}{2}a^5(6ab^2 + 3a^2b - 2a)(-5ab^3).$$

★练习 2 计算：

$$(1) (\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}x^2y) \cdot (-12xy); \quad (2) (-\frac{4}{3}x^2y^2)(\frac{3}{4}x^2 + xy - \frac{2}{5}y^2)$$

★★例 7 计算：

$$(\frac{2}{3}a^2b^2)(\frac{3}{2}ab + 6a) - \frac{3}{2}ab^2(a^2b + 2a^2).$$

知识点 3：多项式乘以多项式

多项式与多项式相乘的法则：多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。

$$\text{即：} (a+m)(b+n) = a(b+n) + m(b+n) = ab + an + mb + mn.$$

★例 8 计算：

$$(1) \left(\frac{1}{2}x + 4\right)\left(6x - \frac{3}{4}\right); \quad (2) (2x - 3y)(2x + 3y);$$

$$(3) (a-b)(a^2 + ab + b^2); \quad (4) (x+1)(x+2)(x+3).$$

★练习 3 计算：

$$(1) \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)(3a + 2b);$$

$$(2) (x + 2y^2)(x - 2y^2).$$

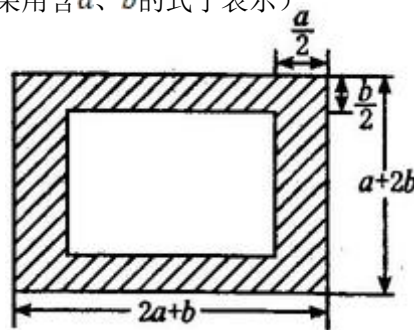
★★例 9 计算：

$$(1) (2x - 3)(x - 2) - (x - 1)^2;$$

$$(2) (a - b + 3)(a + b - 3);$$

$$(3) 3xy(x + y)^2 - (3x^2 + xy)(xy + 3y^2); \quad (4) (a + b - 2)^2.$$

★★例 10 某零件如图所示，求图中阴影部分的面积 S 。（结果用含 a 、 b 的式子表示）



★★例 11 先化简，再求值： $2(2x-1)(2x+1) - 5x(-x+3y) + 4x\left(-4x^2 - \frac{5}{2}y\right)$ ，其中 $x=-1$ ， $y=2$ 。

★★★例 12 已知： $(x^3 + mx + n)(x^2 - 3x + 4)$ 的展开式中含 x^3 和 x^2 项。

(1) 求 m 和 n 的值；(2) 在(1)的条件下，求 $(m+n)(m^2 - mn + n^2)$ 的值。

第九讲 平方差公式

【知识梳理】

1、平方差公式：两个数的和与这两个数的乘积等于这两个数的平方差，即

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

其中：(1) a 、 b 可以表示数，也可以表示代数式（单项式、多项式）；

(2) 有些多项式相乘，表面上不能用公式，但通过适当变形后可以用公式：

2、平方差公式的特征：

(1) 左边是两个二项式相乘，并且这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数。

(2) 右边是乘式中两项的平方差。

3、归纳公式变式，准确灵活运用公式：

① 位置变化： $(a+b)(-b+a)=a^2-b^2$ ；

② 系数变化： $(2a+3b)(2a-3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$ ；

③ 指数变化： $(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2)^2-(b^2)^2=a^4-b^4$ ；

④ 符号变化： $(-a+b)(-a-b)=(-a)^2-b^2=a^2-b^2$ ；

⑤ 增项变化： $(a+b-c)(b-a+c)=[b+(a-c)][b-(a-c)]=b^2-(a-c)^2$ ；

⑥ 增因式变化： $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$$

$$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$$

$$=a^8-b^8.$$

【例题分析】

★例1 下列整式乘法中，不能用平方差公式计算的是（ ）

A. $(x+1)(x-1)$ ；

B. $(\frac{1}{2}a+b)(b-\frac{1}{2}a)$ ；

C. $(-a-b)(a-b)$ ；

D. $(-x+y)(x-y)$.

★例2 计算：

(1) $(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5})(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5})$ ；

(2) $(-2x+3y)(-2x-3y)$ ；

(3) $(-2a - 3b)(2a - 3b)$;

(4) $(2a - 3)(2a + 3)(4a^2 + 9)$.

★练习 1 计算:

(1) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}a\right)$;

(2) $\left(-\frac{1}{8}x^3 - 2y^2\right)\left(\frac{1}{8}x^3 - 2y^2\right)$;

(3) $(6x^2 + 12y)(2y - x^2)$;

(4) $(x - 2y + z)(x + 2y - z)$.

★★例 3 计算:

(1) $(a + b)(a - b) - (a + 3b)(a - 3b)$; (2) $(-2y + x)(2y + x) + (-2x - y)(-2x + y)$;

★★例 4 计算: $[(2a - 1)(2a + 1) + (a + 2)(a - 2) - 4a^2](a^2 + 5)$.

★★例 5 简便运算:

(1) 102×98 ;

(2) 100.1×99.9 ;

(3) $24\frac{6}{7} \times 25\frac{1}{7}$.

总结：任意两个数的积都可以运用平方差公式计算：

$$ab = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

★★练习 2 计算：

(1) 124×116 ;

(2) 30.2×29.8 ;

(3) $30\frac{4}{5} \times 29\frac{1}{5}$.

★★例 6 一个正整数若能表示为两个正整数的平方差，则称这个正整数为“创新数”，例如： $27=6^2-3^2$ 、 $63=8^2-1^2$ ，所以，27、63 都是“创新数”，下列各数中，不是“创新数”的是（ ）

A. 31;

B. 41;

C. 16;

D. 54.

★★★例 7 计算：

(1) $2017 \times 2023 - 2020^2$;

(2) $\frac{2020}{2020^2 - 2021 \times 2019}$;

(3) $3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) - 2^{32}$.

★★★例 8 已知 $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2019} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2020}$ ， $b = 2018 \times 2020 - 2019^2$ ，比较 a 、 b 的大小.

第十讲 完全平方公式

【知识梳理】

1、完全平方公式：两数和（或差）的平方，等于他们的平方和，加上（或减去）他们积的两倍，即： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

其中： a 、 b 可以表示具体的数，也可以表示代数式（单项式、多项式）；

2、完全平方公式的特征：

(1) 等式左边是两个相同的二项式相乘；

(2) 右边是三项式，是左边两项的平方和，加上（这两项相加时）或减去（这两项相减时）这两项乘积的 2 倍。

3、记忆口诀：首平方，尾平方，首尾 2 倍中间放，前加后加，前减后减。

4、完全平方公式中常见的公式变形：

$$(1) (a+b)^2 - (a-b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (2) a^2 + b^2 = (a-b)^2 + \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - \underline{\hspace{2cm}}. \quad (4) (a+b)^2 + (a-b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例题分析】

★例 1 若 $(x-2y)^2 = x^2 - xy + 4y^2 + M$ ，则 $M = \underline{\hspace{2cm}}$.

★例 2 计算：

$$(1) (2x + \frac{1}{2})^2; \quad (2) (\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b)^2;$$

$$(3) (-m + 4n)^2; \quad (4) (-a - 2b)^2.$$

★例 3 计算：

$$(1) (1-a)(a+1)(a^2+1); \quad (2) (a^2-2b)(a^2+2b)(a^4+4b^2)$$

$$(3) (x+2y)^2 + 2(x-y)(x+y) + (x-2y)^2; \quad (4) \left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(a+\frac{1}{2}\right)^2\right]\left(2a^2 - \frac{1}{2}\right).$$

★★例 4 计算:

$$(1) (2a+b-c)(2a-b+c); \quad (2) (a+b+c)^2;$$

$$(3) (x+2y+3)^2 - (x-2y+3)(x-2y-3).$$

★★例 5 用简便算法计算:

$$(1) 79.8^2; \quad (2) 501^2 - 1002 \times 498 + 498^2;$$

$$(3) 1.01^2; \quad (4) 99^2 + 199.$$

★★例 6 解方程: $(4x+1)^2 - (5x-2)(5x+2) + (3x-7)^2 = 20.$

★★★例 7 (1) 已知: $a + b = 5$, $a^2 + b^2 = 13$, 求 ab 的值.

(2) 已知: $(a + b)^2 = 7$, $(a - b)^2 = 5$, 求 $a^2 + b^2$ 和 ab 的值.

(3) 已知: $a + b = 5$, $ab = \frac{9}{4}$, 求 $a - b$ 的值.

(4) 已知: $(2020 - a)^2 + (a - 2019)^2 = 5$, 求 $(2020 - a)(a - 2019)$ 的值.

(5) 已知: $(a - 2019)^2 + (a - 2021)^2 = 8$, 求 $(a - 2020)^2$ 的值.

第十一讲 整式乘法、乘法公式复习

【知识梳理】

1、公式归纳： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ， $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ， $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

2、常见乘法公式

平方差公式： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ；

完全平方公式： $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ ；

三项平方公式： $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ；

立方和（差）公式： $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 、 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ ；

完全立方公式： $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 、 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 。

3、完全平方式：

对于一个整式 A ，如果存在另一个实系数整式 B ，使 $A=B^2$ ，则称 A 是完全平方式。

【例题解析】

★例 1 计算：

$$(1) (x^{m-1}y^n - 2x^m y^{n-1}) \cdot (2xy)^3; \quad (2) (-x^3 y^n)(3xy - 4y^n);$$

$$(3) (-2x)^2(2x^3 + 3x^2 - 1) - 3x(2x - x^3).$$

★★例 2 已知： $ab^2 = -6$ ，求 $-ab(a^2b^5 - ab^3 - b)$ 的值。

★例 3 指出下列各题分别用什么公式计算，并计算各题。

$$(1) (-3b-1)(-3b-1)$$

$$(2) (2m+3n)(2m-3n)$$

(3) $(x+3)(-x+3)$

(4) $(2a-1)(-1+2a)$

(5) $(-2x-y)(2x-y)$

(6) $(ab-1)(-ab+1)$

★例 4 选择题：

(1) 若 $(2a-3b)^2 = (2a+3b)^2 + N$ ，则 N 的代数式是 ()

A. $-24ab$

B. $12ab$

C. $24ab$

D. $-12ab$

(2) 下列运算中，正确的是 ()

A. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

B. $(-x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

C. $(x+3)(x-2) = x^2 - 6$

D. $(-a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(3) 如果 $(x-2)(x+3) = x^2 + px + q$ ，那么 p 、 q 的值为 ()

A. $p=5, q=6$

B. $p=1, q=-6$

C. $p=1, q=6$

D. $p=5, q=-6$

(4) $(2x+1)(-2x+1)$ 的计算结果是 ()

A. $4x^2 + 1$

B. $1 - 4x^2$

C. $1 + 4x^2$

D. $-4x^2 - 1$

(5) 已知 $(a+b)^2 = 7, (a-b)^2 = 3$ ，则 $a^2 + b^2$ 与 ab 的值分别是 ()

A. 4, 1

B. 2, $\frac{3}{2}$

C. 5, 1

D. 10, $\frac{3}{2}$

(6) $(-x-y)^2$ 展开后的结果是 ()

A. $-x^2 - 2xy - y^2$

B. $x^2 + 2xy + y^2$

C. $-x^2 - 2xy + y^2$

D. $x^2 - 2xy + y^2$

★★例 5 计算：

(1) $(-x+1)^2 - 3(-2-x)(2-x)$ ；

(2) $(-2x+y-1)(-2x-y-1)$ ；

(3) $[(x-y)^2 + (x+y)^2](x^2 - y^2)$;

(4) $(9 - a^2)^2 - (3 - a)(3 + a)(9 + a^2)$;

(5) 化简求值: $[2x^2 - (x+y)(x-y)][(2-x)(x+2) + (-y-2)(2-y)]$, 其中 $x = -\frac{1}{2}, y = -1$.

(6) $(a - 2b - 3)^2$;

(7) $(x+y)^2 - 4(x+y)(x-y) + 4(x-y)^2$.

★★例 6 已知: x, y 均大于 0, 且 $(x+y)(x-y) = 24$, $(x+2y)(x-2y) = 21$. 求 x, y 的值.

★★例 7 当 k 为何值时, 下列各式是完全平方式?

(1) $9a^2 - kab + 16b^2$; (2) $\frac{a^2}{9} + kab + \frac{1}{4}b^2$.

★★★例 8 已知： $x^2 - 3x - 1 = 0$ ，求值：(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ；(2) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 。

★★★例 9 若 x 、 y 满足 $x + 2y = 2$ ， $xy = -1$ ，求下列各式的值。

(1) $(x - 2y)^2$ ；(2) $x^4 + 16y^4$ ；(3) $x^3 + 8y^3$ 。

★★★★例 10 已知： $a - b = \frac{2}{13}$ ， $b - c = \frac{5}{13}$ ， $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，求 $ab + bc + ca$ 的值。

第十二讲 提取公因式法和公式法

【知识点梳理】

因式分解：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解。

① 方法一：提取公因式法 $ma + mb + mc = m(a + b + c)$

公因式：一个多项式中每一项都含有的因式叫做这个多项式的公因式。

找公因式的方法：

(1) 因式的系数应取各项系数的**最大公因数**（当系数是整数时）；

(2) 字母取各项的相同字母，且各字母的指数取**最低次幂**。

(3) 如果多项式的首项系数是负数时，一般应先提出“—”号，使括号内的第一项系数是正数，然后再对括号内的多项式进行提取公因式。

如果一个多项式的各项含有公因式，那么可以把该公因式提取出来作为多项式的一个因式，

提出公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式，这种分解因式的方法叫做提取公因式。

注：分解因式时，一定要分解到不能再分为止. !

② 方法二：公式法 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ， $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

逆用乘法公式将一个多项式分解因式的方法叫做公式法。

【例题解析】

★例 1、下列等式中，从左到右的变形是因式分解的在括号内打“√”，不是的打“×”。

(1) $3(x + 2) = 3x + 6$ () (2) $6ax^2 - 3ax + 3a = 3a(2x^2 - x + 1)$ ()

(3) $4x^3 - 2x^2 + 1 = 2x^2(2x - 1) + 1$ () (4) $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$ ()。

★练习 1、下列不等式中，从左到右的变形是因式分解的是 ()

(A) $a(a + b) = a^2 + ab$ (B) $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

(C) $2a^2 - 3ab = a(2a - 3b)$ (D) $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$

★例 2、1、填空：

(1) $a^2bx = ab \cdot ()$ (2) $6xy^2 = 3xy \cdot ()$

(3) $10a^3bc^2 = 5a^2bc \cdot ()$ (4) $15a^2b^2c = 5a^2bc \cdot ()$

(5) $5(x - y)^3 = 5(x - y)^2 \cdot ()$ (6) $36(a + b)^3 = 9(a + b)^2 \cdot ()$

★例 3、分解因式：(1) $12a^4b + 18a^3b^2$ (2) $6a^2b + 3ab^2 - 3ab$

$$\star\star (3) -4x^2y + 6xy^2 - 2xy \quad (4) a^{2n} + a^{n+1} + a^n$$

$$\star\text{练习 } 2 \quad (1) 4a^2 - 6a ; \quad (2) 4x^2y - 12xy .$$

$$(3) 2ax^3 + 6a^2x^2 ; \quad (4) -3ab + abc - 9ac ;$$

$$\star\text{例 } 4、\text{分解因式：} (1) x(a-b) + y(b-a) - 3(b-a) \quad (2) 4(a+b) + 6(a+b)c$$

$$\star\star (3) x(a-b)^2 - y(b-a)^3$$

$$\star\star (5) 24xy^2z^2(x+y-z) - 32xyz(z-x-y) + 8xyz^3(z-x-y)$$

★★练习 3. 把下列各式分解因式:

$$(1) (x+y)^2 - (x+y)^3$$

$$(2) (x-y)^2 - (x-y)^3$$

$$(3) 4ab(a+b)^2 - 6a^2b(a+b)$$

$$(4) (x+y)^2(x-y) + (x+y)(x-y)^2$$

★★例 5、分解因式: (1) $6(x+y)^2 - 2(x-y)(x+y)$ (2) $2(a+b)^2 - a - b$

$$(3) 3(x+y)(y-x) - (x-y)^2$$

★例 6、分解因式: (1) $1 - 9x^2$; (2) $-9x^2 + y^2$; (3) $\frac{16}{25}x^6 - \frac{9}{16}y^2$;

★★ (4) $(a+b)^2 - (a+c)^2$ (5) $9(2m+n)^2 - 4(m-2n)^2$ (6) $3x^3 - 12x$;

练习 4

★ (1) $16x^2 - 4y^2$; (2) $(a+b)^2 - 4b^2$ (3) $16 - (x+y)^2$

★★ (4) $x^4 - 81y^4$; (5) $9(x-2y)^3 - (x-2y)$.

★★例 7、分解因式: (1) $9x^2 - 12x + 4$; (2) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{5}ab + \frac{9}{25}b^2$

(3) $-x^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{1}{9}y^2$ (4) $9x + \frac{1}{4} + 81x^2$ (5) $2ax^2 - 12axy + 18ay^2$;

★★练习 5. 分解因式:

(1) $m^2 + m + \frac{1}{4}$; (2) $x^2 - 16xy + 64y^2$;

(3) $9x + \frac{1}{4} + 81x^2$; (4) $-m^2n^2 - 16 + 8mn$.

第十三讲 十字相乘和分组分解法因式分解

一、知识点梳理：

十字相乘法：利用十字交叉线来分解系数，把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法。

会运用十字相乘法把形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式分解因式。

分组分解法：利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法。

1、掌握用“二二”分组分解法正确分解四项式。

2、掌握用“一三”分组分解法正确分解四项式，五项式考虑“二三”分组。

二、例题解析：

第一部分：十字相乘法因式分解

★例 1 因式分解：

1、 $x^2 + 3x + 2$

2、 $x^2 - 7x + 6$

练习 1

1、 $x^2 - 4x - 21$

2、 $x^2 + 2x - 15$

3、 $x^4 + 6x^2 + 8$

4、 $x^2 - 3xy + 2y^2$

★例 2 因式分解

1、 $(a + b)^2 - 4(a + b) + 3$

2、 $x^4 - 3x^3 - 28x^2$

★练习 2

1、 $a^2 - 9ab + 14b^2$

2、 $x^2 + 11xy + 18y^2$

3、 $x^2y^2 - 5x^2y - 6x^2$

4、 $-a^3 - 4a^2 + 12a$

5、 $(2x - 3)^2 + 3(2x - 3) + 2$ ★★6、 $18x^2 - 21x + 5$

★★★练习 3. 若实数 a 满足 $a^2 - 2a + 1 = 0$, 则 $2a^2 - 4a + 5 =$ _____.

第二部分：分组分解法

★例 3 因式分解

1. 按字母特征分组 (1) $a + b + ab + 1$ (2) $a^2 - ab + ac - bc$

★2. 按系数特征分组 (1) $7x^2 + 3y + xy + 21x$ (2) $2ac - 6ad + bc - 3bd$

★3. 按指数特点分组 (1) $a^2 - 9b^2 + 2a - 6b$ (2) $x^2 + x - 4y^2 - 2y$

★练习 4. 用分组分解 $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ 的因式, 分组正确的是 ()

A. $(a^2 - c^2) - (b^2 - 2bc)$ B. $(a^2 - b^2 - c^2) + 2bc$

C. $(a^2 - b^2) - (c^2 - 2bc)$ D. $a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)$

★练习 5

(1) $a^2 - ab - 2a + 2b$; (2) $3x^2y + 6xy - 4x - 8$;

(3) $a^2 - 9b^2 + 2a - 6b$; (4) $x^2 + x - 4y^2 - 2y$

★例 4 因式分解

★4. 按公式特点分组 (1) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ (2) $a^2 - 4b^2 + 12bc - 9c^2$

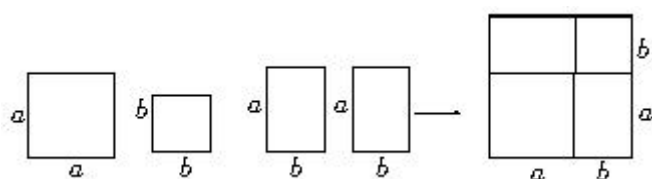
★★5. 先拆后分 $(x+2)(x+3) + x^2 - 4$

★练习 6 因式分解

(1) $x^2 - 4x - y^2 + 4$; (2) $1 - a^2 + 2ab - b^2$.

★★ (3) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$;

★★★5. 利用 1 个 $a \times a$ 的正方形, 1 个 $b \times b$ 的正方形和 2 个 $a \times b$ 的矩形可拼成一个正方形 (如图所示), 从而可得到因式分解的公式_____.



★课堂练习 1

1、 $x^2 - 3xy + 2y^2 =$

2、 $x^4 - 3x^3 - 28x^2 =$

3、 $x^2 + 4x + 3 =$

4、 $a^2 + 7a + 10 =$

5、 $y^2 - 7y + 12 =$

6、 $q^2 - 6q + 8 =$

7、 $x^2 + x - 20 =$

8、 $m^2 + 7m - 18 =$

9、 $p^2 - 5p - 36 =$

10、 $t^2 - 2t - 8 =$

11、 $x^4 - x^2 - 20 =$

12、 $a^2x^2 + 7ax - 8 =$

13、 $20 - 9y - 20y^2 =$

14、 $2x^2 + 3x + 1 =$

★★练习 2

(1) $x^2 - a^2 - 2x - 2a$

(2) $9m^2 - 6m + 2n - n^2$

(3) $x^4y + 2x^3y^2 - x^2y - 2xy^2$

(1) $4m^2 - n^2 - 1 + 2n$

(5) $m^2 - 5m + n^2 + 5n - 2mn.$

(6) $a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b - 8$

第十四讲 因式分解复习

一、知识点梳理：

因式分解：把一个多项式化为几个整式的积德形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式。

提取公因式法：如果一个多项式的各项含有公因式，那么可以把该公因式提取出来作为多项式的一个因式，提出公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式，这种分解因式的方法叫做提取公因式法。

公式法：逆用乘法公式将一个多项式分解因式的方法叫做公式法。

平方差： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

完全平方公式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ； $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

十字相乘法：利用十字交叉线来分解系数，把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法。

分组分解法：利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法。

二、例题解析

1. 选择题

★例 1、下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是…………… ()。

- (A) $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$ ； (B) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ ；
(C) $3(x + 2) = 3x - 6$ ； (D) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ 。

★例 2. 下列各式中，能用平方差公式因式分解的是…………… ()。

- (A) $4a^2 + (-b)^2$ ； (B) $-4a^2 + b^2$ ；
(C) $-4a^2 - b^2$ ； (D) $2a^2 + \frac{1}{2}b^2$ 。

★例 3. 下列各式中，能用完全平方公式因式分解的是…………… ()。

- (A) $x^2 + xy + y^2$ ； (B) $x^2 - 2x - 1$ ；
(C) $-4 - 4x - x^2$ ； (D) $x^2 + y^2$ 。

★★例 4. 若 $9x^2 + mxy + 16y^2$ 是一个完全平方式，那么 m 的值是 ()

- A. -12 B. ± 24 C. 12 D. ± 12

★★例 5. 一个关于 x 的二次三项式, 其 x^2 项的系数是 1 , 常数项是 -12 , 且能分解因式, 这样的二次三项式是()

- A. $x^2-11x-12$ 或 $x^2+11x-12$ B. x^2-x-12 或 x^2+x-12
C. $x^2-4x-12$ 或 $x^2+4x-12$ D. 以上都可以

★★★例 6. 若 $a^2+a=-1$, 则 $a^4+2a^3-3a^2-4a+3$ 的值为()

- A. 8 B. 7 C. 10 D. 12

★★★例 7. 已知 $x^2+y^2+2x-6y+10=0$, 那么 x, y 的值分别为()

- A. $x=1, y=3$ B. $x=1, y=-3$ C. $x=-1, y=3$ D. $x=1, y=-3$

二、填空题:

★1. $4a^3+8a^2+24a=4a(\underline{\hspace{2cm}})$;

★2. $(a-3)(3-2a)=\underline{\hspace{2cm}}(3-a)(3-2a)$;

★★3. $4m^4-16n^4=\underline{\hspace{2cm}}$

★4. 若 $m^2-3m+2=(m+a)(m+b)$, 则 $a=\underline{\hspace{2cm}}$, $b=\underline{\hspace{2cm}}$;

★★5. 当 $m=\underline{\hspace{2cm}}$ 时, $x^2+2(m-3)x+25$ 是完全平方式.

三. 简答题

★分解因式: (1) $-4x^2y+6xy^2-2xy$; (2) $a^2(a-b)^5-ab(b-a)^4$.

(3) $1-x^4$; (4) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$; (5) 简便运算: (1) 201^2-199^2

★★. 分解因式:

(1) $2a^2 + 2ab - 24b^2$;

(2) $-x^2 - xy + 12y^2$;

(3) $x^4 - 5x^2 + 4$;

(4) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$.

(5) $a^2b + ab^2 - a - b$;

(6) $a^4 - a^2 + 4a - 4$.

四. 简答题

★★1. 若 $(2x + y)^2 + 2(2x + y)(x + 2y) + (x + 2y)^2 = 9$, 求 $x + y$ 的值

★★★2. 若 $4m^2 + n^2 - 6n + 4m + 10 = 0$, 求 m^n 的值.

第十六讲 第九章复习

一、 知识点梳理：

1、整式中的基本概念

2、常见乘法公式

平方差公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ；

完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ；

三项平方公式： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ；

立方和（差）公式： $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ 、 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ ；

完全立方公式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 、 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。

3、因式分解：把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫作把这个多项式分解因式。

因式分解的步骤和方法：

提取公因式法、

公式法、（平方差： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ）

完全平方法： $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ； $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ）

十字相乘法、分组分解法。

二、例题解析

例 1 选择题

★1. 下列各式去括号错误的共有……………（ ）

① $a + (b + c) = a + b + c$ ② $a - (b + c - d) = a - b - c - d$

③ $a + 2(b - c) = a + 2b - c$ ④ $a^2 - [-(-a + b)] = a^2 - a - b$

(A) 1 个； (B) 2 个； (C) 3 个； (D) 4 个。

★2. 下列式子可以用平方差公式进行计算的是……………（ ）。

(A) $(-x - y)(-y + x)$ ； (B) $(-x - y)(y + x)$ ；

(C) $(x - y)(y - x)$ ； (D) $(2x - y)(x + 2y)$ 。

★3. $(a^n)^{2n}$ 等于……………（ ）。

(A) a^{3n} ； (B) a^{2n} ； (C) a^{4n^2} ； (D) a^{2n^2} 。

★4. 下列多项式能用公式法进行因式分解的是……………（ ）。

(A) $x^2 + 4$ ； (B) $x^2 + 2x + 4$ ；

(C) $x^2 - x + \frac{1}{4}$; (D) $x^2 - 4y$.

★5. 已知 $x^2 - 2x + m = (x - 3)(x + n)$, 则 m, n 的值分别是..... ().

(A) $m=3, n=-1$; (B) $m=-3, n=-1$;

(C) $m=3, n=1$; (D) $m=-3, n=1$.

★★6. $x^2 + ax + 8$ 分解为两个整系数的一次因式的积, 则 a 的值可以取几个... ().

(A) 3 个; (B) 4 个; (C) 5 个; (D) 6 个.

二、 填空

★7. 计算: $-a \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^2 =$ _____.

★8. 计算: $(3a^3b)^2 =$ _____.

★9. 多项式 $3x^2y^3 + 12xy^2$ 的公因式是_____.

★10. 分解因式: $2ab^2 - 4a^2b + 8ab =$ _____.

★11. 分解因式: $x^2 - 2x - 3 =$ _____.

★12. 分解因式: $3ab^2 - 12a =$ _____.

★13. 分解因式: $x^2y - 4xy - 5y =$ _____.

★14. 分解因式: $(x + 2y)^2 - y^2 =$ _____.

三、 因式分解:

★15. $x^4 - 81$.

★16. $(x - 1)(x - 3) + 1$.

★17. $n(m - 2)^2 - n^2(2 - m)$.

★18. (1) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$.

★19、 $625b^4 - (a-b)^4$;

★★20、 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 35$;

★21、 $m^2 - a^2 + 4ab - 4b^2$;

★★22、 $5m - 5n - m^2 + 2mn - n^2$.

四、解答题

★★23. 若 $a^m = 2, a^n = 3$, 求 a^{3m+2n} 的值 (4 分)

★★24. 已知 $a+b=0$, 求 $a^3 - 2b^3 + a^2b - 2ab^2$ 的值.

★★★25. 求证: 四个连续自然数的积再加上 1, 一定是一个完全平方数.

★★26. 已知 $a=k+3, b=2k+2, c=3k-1$, 求 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$ 的值.

★★★27. 若 $x^2 + mx + n = (x-3)(x+4)$, 求 $(m+n)^2$ 的值.

课堂练习

★1. 下列各式 $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^2 + y - xy - x$, $x^2 - 2x - y^2 + 1$ 中, 不含有 $(x-1)$ 因式的有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

★2. 把 $9 - x^2 + 12xy - 36y^2$ 分解因式为 ()

A. $(x-6y+3)(x-6x-3)$ B. $-(x-6y+3)(x-6y-3)$

C. $-(x-6y+3)(x+6y-3)$ D. $-(x-6y+3)(x-6y+3)$

★3. 下列因式分解错误的是 ()

A. $a^2 - bc + ac - ab = (a-b)(a+c)$ B. $ab - 5a + 3b - 15 = (b-5)(a+3)$

C. $x^2 + 3xy - 2x - 6y = (x+3y)(x-2)$ D. $x^2 - 6xy - 1 + 9y^2 = (x+3y+1)(x+3y-1)$

因式分解

★4. $ab^2 - ac^2 + 4ac - 4a$;

★5. $(x+y)^2 - 25$;

★6. $(3m-2n)^2 - (3m+2n)^2$;

★★7. $(x^2 - 2x)^2 + 2x(x-2) + 1$;

★★8. $x^4 - 2y^4 - 2x^3y + xy^3$;