

初二数学 新编教案

目 录

第一讲	二次根式的概念和性质	2
第二讲	二次根式的运算	6
第三讲	二次根式复习	11
第四讲	一元二次方程的概念与解法	15
第五讲	一元二次方程的判别式	19
第六讲	一元二次方程的应用	23
第八讲	一元二次方程复习	27
第九讲	函数的概念	31
第十讲	正比例函数	37
第十一讲	反比例函数	42
第十二讲	函数的表示法	47
第十三讲	正、反比例函数综合运用 1	50
第十四讲	正、反比例函数综合运用 2	53
第十六讲	综合测试训练	56

第一讲 二次根式的概念和性质

【知识要点】

1、二次根式的概念：代数式 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 叫做二次根式。注意： $\sqrt{a}$ 有意义的条件是 $a \geq 0$

2、二次根式的性质

$$(1) \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a \leq 0) \end{cases};$$

$$(2) (\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$$

$$(3) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(a \geq 0, b \geq 0);$$

$$(4) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a \geq 0, b > 0)$$

3、被开方数中各因式的指数都为 1 且被开方数不含分母的二次根式叫做最简二次根式

4、几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式

【★】例 1、下列各式中，一定是二次根式的是 ()

A. $\sqrt{a}$ B. $y = -2$ C. $\sqrt{a^2 + 1}$ D. $\sqrt{x + 1}$

【★★】练习 1、x 取何值时，下列各式在实数范围内有意义？

$$(1) \sqrt{\frac{-2}{x+2}}$$

$$(2) \sqrt{-(2x+1)^2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{x+10} - 10}{\sqrt{5} - x}$$

$$(4) \sqrt{x} - \sqrt{2x-1};$$

【★★★★】2、x 取何值时，下列各式在实数范围内有意义？

$$(1) \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{-x}}; \quad (2) -\frac{1}{\sqrt{-x-\frac{1}{2}}} \quad (3) \frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|-5}$$

例 2、下列根式中，不是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{2}$

【★】练习 1、下列根式中，最简二次根式为：()

- A. $\sqrt{4x}$ B. $\sqrt{x^2-4}$ C. $\sqrt{\frac{x}{4}}$ D. $\sqrt{(x+4)^2}$

【★★】2、下列根式中，() 是最简二次根式。

- A. $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ B. $\sqrt{\frac{2y}{x^2-1}}$ C. $-\frac{1}{3}\sqrt{x^2-y^2}$ D. $\sqrt{0.1a-2b}$

【★★★】3、把下列各根式化为最简二次根式：

(1) $\sqrt{96a^3b} (a \geq 0, b \geq 0)$

(2) $\sqrt{2\frac{47}{50}}$

(3) $\sqrt{\frac{25a^2b^3}{121c^4}} (a \geq 0, b \geq 0)$

【★】练习 1、把下列式子化为最简根式：

$\sqrt{54} =$ _____; $\sqrt{\frac{5}{18}} =$ _____; $\sqrt{25a^3} =$ _____;

$\sqrt{\frac{3}{125}} =$ _____; $\sqrt{-\frac{1}{a}} =$ _____; $\sqrt{16x^3+32x^2} =$ _____.

【★★★】2、化简：(1) $a\sqrt{\frac{1}{-a}} =$ _____ (2) $\sqrt{\frac{x^2}{-y}} =$ _____ ($x < 0$)

【★★★★】3、若 $n > m > 0$ ，化简 $\frac{1}{m-n}\sqrt{\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - 2} =$ _____

巩固练习：

1. 【★】在 $\frac{\sqrt{-x}}{|x|-2}$ 中 x 的取值范围是..... ()

A. $x \leq 0$; B. $x > 2$; C. $0 \leq x < 2$; D. $x \leq 0$ 且 $x \neq -2$.

2. 【★】下列各式中，不是同类二次根式的是..... ()

- A. $2\sqrt{\frac{1}{3}}, 3\sqrt{12}$; B. $3\sqrt{8}, 4\sqrt{\frac{1}{2}}$; C. $\frac{4}{\sqrt{125}}, \frac{1}{\sqrt{45}}$; D. $2\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. 【★★】下列二次根式中是同类二次根式的是…………… ()

A、 $\frac{3}{5}\sqrt{4xy^2}$ 与 $x\sqrt{\frac{x}{9y}}$ B、 $\sqrt{9x^2y}$ 与 $\sqrt{4xy}$

C、 $\sqrt{2x+y^2}$ 与 $\sqrt{x^2+2y}$ D、 $\sqrt{yz}$ 与 $\sqrt{x^2yz^3}$

4. 【★★】若 $a = \sqrt{7} + \sqrt{6}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{7}$, 则 a 和 b 的关系是 ()

A、互为倒数; B、互为相反数; C、互为负倒数; D、相等.

5. 【★】当_____时, $\sqrt{-x^2}$ 有意义

6. 【★】计算: $\sqrt{32} - \sqrt{8} =$ _____.

7. 【★】计算: $(\sqrt{6} + 3)(\sqrt{6} - 3) =$ _____.

8. 【★】化简: $\sqrt{24a^4c} =$ _____.

9. 【★★】已知 $a > 0$, 那么 $\sqrt{\frac{-4a}{b}} =$ _____.

10. 【★★】计算: $\frac{\sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{6}} =$ _____.

11. 【★★】方程 $x^2 = \sqrt{144}$ 的解为_____.

12. 【★★】使式子 $\frac{\sqrt{1-x}}{2+x}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

13. 【★★】若 $\sqrt{3}(x+2) = 2(x-\sqrt{3})$, 则 $x =$ _____.

14. 【★★★★】将式子 $(m+1)\sqrt{-\frac{1}{m+1}}$ 中根号外的 $(m+1)$ 移入根号内得_____.

1. 【★★】计算: $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$, 其中 $a = -\sqrt{2}$

2. 【★★】计算 $\frac{1}{3}\sqrt{45} + 5\sqrt{3\frac{1}{5}} - 3\sqrt{20}$

3. 【★★★★】计算: $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - (a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} (a > b > 0)$

4. 【★★★★】计算: $\frac{2}{y}\sqrt{xy^3} - \sqrt{x^3y} - \frac{1}{x}\sqrt{x^3y^3} \quad (x > 0, y > 0)$

5. 【★★】解不等式 $2x - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3} < \sqrt{\frac{1}{3}} + 5x$

6. 【★★】若最简二次根式 $\sqrt{5a+2b}$ 与 $\sqrt[a-b]{3a}$ 是同类二次根式, 求 $a^{2013} + b^{2013}$ 的值.

第二讲 二次根式的运算

【知识要点】

二次根式的加减法法则

二次根式加减时，可以先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并。

注意：(1) 二次根式的加减常分为两大步骤进行，第一步化简；第二步合并；

(2) 在合并前应注意要先判断清楚它们中哪些二次根式的被开方数是相同的；在合并时类似于以前学过的合并同类项，只需将根号外的因式进行加减，被开方数和根指数不变。

练习：

1. 【★】下列计算正确的个数是 ()

① $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$;

② $3\sqrt{a} + 4\sqrt{b} = 7\sqrt{ab}$;

③ $7\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = 4\sqrt{a}$;

④ $5\sqrt{a-1} + 3\sqrt{1-a} = 5\sqrt{a-1} - 3\sqrt{a-1} = 2\sqrt{a-1}$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

2. 【★】下列计算正确的是 ()

(A) $3 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

(B) $3\sqrt{2a} + 3\sqrt{3a} = 6\sqrt{5a}$

(C) $m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m-n)\sqrt{a}$

(D) $4\sqrt{5a^3} + \sqrt{5a} = 5\sqrt{5a}$

3. 【★】在下列各组二次根式中，不可以合并的是 ()

(A) $\sqrt{45}$ 与 $\sqrt{20}$

(B) $\frac{1}{3}\sqrt{8}$ 与 $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}$

(C) $\sqrt{12}$ 与 $\sqrt{18}$

(D) $\sqrt{24}$ 与 $\sqrt{54}$

4. 【★】计算 $\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 【★】 计算 $\frac{\sqrt{54}}{2} - 3\sqrt{24} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 【★】 计算 $2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{12} - \frac{\sqrt{8}}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 【★】 计算 $\frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{3}{4}\sqrt{3} - \sqrt{7} - \frac{1}{4}\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 【★★】 计算:

(1) $\sqrt{12} + 3\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{48}$; (2) $\sqrt{\frac{3}{8}} - (-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{27}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{6}})$;

(3) $3\sqrt{40} - \sqrt{\frac{2}{5}} + 2\sqrt{\frac{1}{10}}$

9. 【★★】 已知 $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, 求 $x^3y + xy^3$ 的值

10. 【★★★★】 已知 $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{27}$, 求 $\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} + \frac{m+4n-4\sqrt{mn}}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$ 的值

11. 【★★★★】求值： $x\sqrt{\frac{5}{x}} + \sqrt{\frac{x}{5}} + \sqrt{\frac{5}{x} + \frac{x}{5}} + 2 + \sqrt{\frac{5}{x} + \frac{x}{5}} - 2$, 其中 $x = 125$

二次根式的乘除法法则：

二次根式相乘（除），将被开方数相乘（除），所得的积（商）仍作积（商）的被开方数并将运算结果化为最简二次根式。

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0); \quad \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (b \geq 0, a > 0).$$

【★】练习：

(1) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; (2) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; (3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$; (4) $-5\sqrt{75} \div 2\sqrt{125}$;

(5) $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{15}}$; (6) $6\sqrt{6} \div 3\sqrt{3}$; (7) $\sqrt{1\frac{1}{3}} \div \sqrt{1\frac{1}{2}}$; (8) $\sqrt{\frac{1}{2}} \div \frac{1}{2}\sqrt{0.125}$.

分母有理化

定义：把分母中的根号化去，叫做分母有理化。

2. 有理化因式：两个含有二次根式的代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，就说这两个代数式互为有理化因式。有理化因式确定方法如下：

①单项二次根式：利用 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ 来确定，如： $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ ， $\sqrt{a+b}$ 与 $\sqrt{a+b}$ ， $\sqrt{a-b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 等分别互为有理化因式。

②两项二次根式：利用平方差公式来确定。如 $a + \sqrt{b}$ 与 $a - \sqrt{b}$ ， $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ，

$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ 与 $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ 分别互为有理化因式。

3. 分母有理化的方法与步骤:

- (1) 先将分子、分母化成最简二次根式;
- (2) 将分子、分母都乘以分母的有理化因式, 使分母中不含根式;
- (3) 最后结果必须化成最简二次根式或有理式。

【★】1、找出下列各式的有理化因式

(1) $\sqrt{12}$ (2) $\sqrt{5}-2$ (3) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ (4) $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (4) $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (5) $\sqrt{a+b}$

(3) $\sqrt{a}+a\sqrt{b}$ (4) $a\sqrt{2}-3\sqrt{5}$ (1) $5+\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{3}-8\sqrt{11}$ (6) $a-\sqrt{x^2-a^2}(x>a)$

【★★】2、把下列各式分母有理化

(1) $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2}{5\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(4) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ (5) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$ (6) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

巩固练习:

【★★】3、 $\sqrt{50}+(\sqrt{2}+1)^{-1}+(-2)^{-2}$

【★★】4、计算： $(-3)^0 - \sqrt{27} + |1 - \sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

【★★】5、 $24 \div [(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2]$

【★★】6、 $(\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}}) \div 3\sqrt{x}$

【★★★★】7、 $\sqrt{\frac{y}{x^2 - y^2}} \div \frac{x}{y} \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} \cdot \frac{x - y}{x} \sqrt{\frac{1}{x}}$ ($x > y > 0$) .

【★★★★】不等式： $x + \sqrt{6} > 3x + \sqrt{1.5}$

第三讲 二次根式复习

【知识要点】

1. 二次根式：式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫做二次根式。

2. 最简二次根式：必须同时满足下列条件：

(1)被开方数中不含开方开的尽的因数或因式； (2)被开方数中不含分母； (3)分母中不含根式。

3. 同类二次根式：

二次根式化成最简二次根式后，若被开方数相同，则这几个二次根式就是同类二次根式。

4. 二次根式的性质：

$$(1) (\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0); \quad (2) \sqrt{a^2} = |a| =$$

5. 二次根式的运算：

(1) 因式的外移和内移：如果被开方数中有的因式能够开得尽方，那么，就可以用它的算术根代替而移到根号外面；如果被开方数是代数式的形式，那么先解因式，变形为积的形式，再移因式到根号外面，反之也可以将根号外面的正因式平方后移到根号里面。

(2) 二次根式的加减法：先把二次根式化成最简二次根式再合并同类二次根式。

(3) 二次根式的乘除法：二次根式相乘（除），将被开方数相乘（除），所得的积（商）仍作积（商）的被开方数并将运算结果化为最简二次根式。

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0); \quad \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (b \geq 0, a > 0).$$

(4) 有理数的加法交换律、结合律，乘法交换律及结合律，乘法对加法的分配律以及多项式的乘法公式，都适用于二次根式的运算。

【巩固练习】

一、选择题

1、【★】下列各数中，是无理数的是…………… ()

A. π^0 ; B. $\frac{22}{7}$; C. $\sqrt{9}$; D. $\sqrt[3]{4}$.

2、【★】 $9\sqrt{2}$ 的值介于下列哪两个数之间…………… ()

A. $10 \sim 11$; B. $11 \sim 12$; C. $12 \sim 13$; D. $13 \sim 14$.

3、【★】下列根式中，最简二次根式是…………… ()

- A. $\sqrt{8-x^2}$ B. $\sqrt{m^2+2m+1}$ C. $-m\sqrt{\frac{1}{m}}$ D. $\sqrt{\frac{1}{2}xy}$

4、【★★】已知 $x^{-1}=1+\sqrt{2}$, $y^{-1}=1-\sqrt{2}$ ，则 $x+y$ 的值为 ()

- A. 2; B. -2; C. $2\sqrt{2}$; D. $-2\sqrt{2}$.

5、【★】下列各组根式中，是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{12}$; B. $\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{0.5}$;
C. $\sqrt{2ab}$ 和 $\sqrt{\frac{ab^3}{2}}$; D. $\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$.

6、【★★】设 $\sqrt{2}=a$, $\sqrt{3}=b$ ，用含 a, b 的式子表示 $\sqrt{0.54}$ ，则下列表示正确的是…………… ()

- A、 $0.3ab^2$; B、 $3ab$; C、 $0.1ab^3$; D、 $0.1a^3b$ 。

二、填空题

7、【★】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 分数 (填“是”或“不是”);

8、【★】 8 的平方根是_____;

9、【★】求值: $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=$ _____; $(\frac{1}{2})^{-2}=$ _____;

$$(\sqrt{2}-1)^0=$$
_____; $27^{-\frac{2}{3}}=$ _____;

10、【★】计算 $\sqrt{2} \times \sqrt{18}=$ _____; $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{8}=$ _____;

$$\sqrt{48}-9\sqrt{\frac{1}{3}}=$$
_____; $\frac{5}{\sqrt{7}-2}=$ _____;

11、【★】化简 $\sqrt{\frac{1}{8x}}=$ _____; $\sqrt{8(x^2+y^2)}=$ _____;

12、【★】已知一个正数的平方根是 $3x-2$ 和 $-x+4$ ，则这个数是_____。

13、【★★】已知 $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$ ，则 $f(\sqrt{2})=$ _____。

14、【★★】不等式 $x+1<\sqrt{2}x$ 的解集是_____。

15、【★★】已知实数 a, b 在数轴上对应的点如图所示，化简二次根式:

$$\sqrt{a^2b-2ab^2+b^3}-\sqrt{a^2b}=$$
_____。

三、解答题

16、【★★】找出下列各式中的同类二次根式，并分别进行合并:

$$\sqrt{0.5}, \quad 2\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{12}, \quad \sqrt{75}, \quad -\sqrt{1\frac{7}{25}}, \quad \sqrt{2a^2x^3} \quad (a \geq 0), \quad \sqrt{50xy^2} \quad (y \geq 0).$$

17、 **【★★】** 计算

$$(1) \quad \sqrt{18} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$(2) \quad (\sqrt{2})^2 + (-\frac{1}{2})^0 - 12^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{3}-1)^{-1}$$

$$(3) \quad \sqrt{8} + \sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2} \div \sqrt{6}$$

$$(4) \quad (-3)^0 - \sqrt{27} + |1 - \sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

18、 **【★★】** 化简 (1) $\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$ ($b < a < 0$)

$$(2) \quad \frac{2}{3}\sqrt{9x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(3) \quad (\sqrt{ab} - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{b}}) \cdot \sqrt{ab}$$

$$(4) \quad \sqrt{(3-2x)^2} + \sqrt{\frac{8x}{9}} \cdot \sqrt{\frac{x}{2}} \quad (0 < x < \frac{3}{2})$$

19、 **【★★★★】** 分母有理化 $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

20、【★★】若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长，化简

$$\sqrt{(a+b+c)^2} + \sqrt{(a+b-c)^2} - \sqrt{(a-b-c)^2}$$

21、【★★】已知 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，求下列各式的值：(1) $\frac{1}{a} - a$ ；(2) $\frac{1}{a^2} - a^2$ 。

22、【★★】若 $a > 0$ ，化简：
$$\sqrt{a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}} - \sqrt{a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}}$$

23、【★★★★】已知 $x = \frac{2ab}{b^2+1}$ ，化简 $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$ ，其中 $a > 0, b \neq 0$

24、【★★★★】(1) 分别计算 $\sqrt{11-2}$ 、 $\sqrt{1111-22}$ 、 $\sqrt{111111-222}$ 的值。

(2) 猜想 $\sqrt{\underbrace{11\dots1}_{2n\text{个}} - \underbrace{22\dots2}_{n\text{个}}}$ 的结果是什么？并验证你的猜想。

第四讲 一元二次方程的概念与解法

一元二次方程的概念

一元二次方程：只含有一个未知数，未知数的最高次数是 2，且系数不为 0，这样的方程叫一元二次方程。

一般形式： $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 。**注意：**判断某方程是否为一元二次方程时，应首先将方程化为一般形式。

例题：

1. 下列哪些是一元二次方程，并说明各项和各项系数

$$(1) \sqrt{3}x^2+3x-1=0; \quad (2) \sqrt{3x^2}+3x-1=0; \quad (3) \frac{1}{x^2}=1; \quad (4) x(5x+1)=5x^2+3x$$

$$(5) \frac{1}{x^2}+3x-1=0; \quad (6) x^2=0; \quad (7) x^2=-1。$$

2. 方程 $5x(x-1)=1$ 的二次项系数是，一次项是，常数项是；

3. 已知关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x+m-2=0$ 是一元二次方程，则 m 的取值范围是；

一元二次方程的解法

1. **直接开平方法：**对形如 $(x+a)^2=b$ ($b\geq 0$) 的方程两边直接开平方而转化为两个一元一次

方程的方法。 $x+a=\pm\sqrt{b}$

$$\therefore x_1=-a+\sqrt{b} \quad x_2=-a-\sqrt{b}$$

【★】例题：解方程：(1) $x^2=4$ ； (2) $x^2=-9$ (3) $-3x^2+6=0$

2. **配方法：**用配方法解一元二次方程： $ax^2+bx+c=0(k\neq 0)$ 的一般步骤是：①化为一般形式；

②移项，将常数项移到方程的右边；③化二次项系数为 1，即方程两边同除以二次项系数；④配方，即方程两边都加上一项系数的一半的平方；化原方程为 $(x+a)^2=b$ 的形式；

⑤如果 $b \geq 0$ 就可以用两边开平方来求出方程的解；如果 $b \leq 0$ ，则原方程无解。

【★】例题：1. 解方程： $3x^2 - 12x - 6 = 0$

【★】2. 填空：(1) $x^2 - 4x + () = (x -)^2$ ； (2) $x^2 + 14x + () = (x +)^2$ ；

(3) $x^2 - x + () = (x -)^2$ ； (4) $x^2 + \frac{1}{2}x + () = (x +)^2$ ；

(5) $x^2 - \frac{2}{3}x + () = (x -)^2$ ； (6) $x^2 - \frac{3}{2}x + () = (x -)^2$ ；

(7) $x^2 - \frac{1}{4}x + () = (x -)^2$ ；

3. 公式法：公式法是用求根公式求出一元二次方程的解的方法。它是通过配方推导出来的。一

元二次方程的求根公式是 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($b^2 - 4ac \geq 0$)。

例题：【★★】解方程：(1) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ (2) $6x^2 - 3\sqrt{5}x - 9 = 0$

4. 因式分解法：用因式分解的方法求一元二次方程的根的方法叫做因式分解法。理论根据：

若 $ab=0$ ，则 $a=0$ 或 $b=0$ 。步骤是：①将方程右边化为 0；②将方程左边分解为两个一次因式的乘积；③令每个因式等于 0，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程，它们的解就是原一元二次方程的解。

因式分解的方法：提公因式、公式法、十字相乘法。

例题：【★★】解方程：(1) $3x^2 = 6x$ ； (2) $3(x-1)^2 = 6(x-1)$ ；

$$(3) (2x-1)^2 = 3-6x$$

$$(4) x^2 - 5x - 6 = 0$$

注意：解一元二次方程时一般不使用配方法（除特别要求外）但又必须熟练掌握，解一元二次方程的一般顺序是：开平方法→因式分解法→公式法。

巩固练习：

【★★】1. 用适当方法解下列方程：

$$(1) -(x-1)^2 + 6 = 0; \quad (2) (2x-1)^2 + 9 = 0; \quad (3) (x+1)^2 = 4x;$$

$$(4) (x-1)^2 = 4-4x; \quad (5) x^2 + 6x - 9 = 0; \quad (6) x^2 - 5x - 6 = 0;$$

$$(7) (2x-1)^2 = 1-4x^2; \quad (8) x^2 - 2\sqrt{6}x - 6 = 0;$$

$$(9) x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0; \quad (10) (\sqrt{2}-1)x^2 + 2x - \sqrt{2} - 1 = 0.$$

【★★】2. 解方程

$$(1) \frac{x^2 - 2}{3} + \frac{x}{2} = x \quad (2) (2x - 9)^2 - (x - 6)^2 = 0$$

$$(3) \text{解方程: } x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$$

【★★★★】3. 解答题:

$$(1) \text{已知 } x, y \text{ 为实数, 且 } (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 1) = 20, \text{ 求 } x^2 + y^2 \text{ 的值}$$

$$(2) \text{若 } a \text{ 是方程 } x^2 - x - 1 = 0 \text{ 的一个根, 求代数式 } a^3 - 2a + 3 \text{ 的值}$$

第五讲 一元二次方程的判别式

根的判别式

定义：把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式，通常用符号“ Δ ”表示。

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) .
当 $\Delta > 0$ 时，有两个不相等的实数根；即 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
当 $\Delta = 0$ 时，有两个相等的实数根；即 $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
当 $\Delta < 0$ 时，没有实数根. 反之亦然.

注意：（1）再次强调：根的判别式是指 $\Delta = b^2-4ac$ 。

（2）使用判别式之前一定要先把方程变化为一般形式，以便正确找出 a 、 b 、 c 的值。

（3）如果说方程有实数根，即应当包括有两个不等实根或有两相等实根两种情况，此时 $b^2-4ac \geq 0$ 切勿丢掉等号。

（4）根的判别式 b^2-4ac 的使用条件，是在一元二次方程中，而非别的方程中，因此，要注意隐含条件 $a \neq 0$

【基础】例题：

★1、关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 是已知数, $a \neq 0$) 的根的判别式是_____；

★2、关于 x 的方程 $ax^2+bx-c=0$ (a, b, c 是已知数, $a \neq 0$)，则根的判别式是_____；

★★3、如果关于 x 的方程 $2x^2 - 3x + 2m = 0$ 有两个实数根，那么 m 的取值范围是_____

★4. 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 是已知数, $a \neq 0$) 当方程无实数解，则根的判别式满足条件_____；

【基础】巩固练习：

★1、不解方程，判别下列方程的根的情况：

(1) $2x^2+3x-4=0$ ； (2) $16y^2+9=24y$ ； (3) $5(x^2+1)-7x=0$.

★★2、不解方程，判别下列方程的根的情况：

(1) $x^2 + 2\sqrt{2}kx + k^2 = 0$ (2) $a^2x^2 - ax - 1 = 0$ ($a \neq 0$)

$$(3) x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2} = 0 \quad (4) 9x^2 - (m+7)x + m - 3 = 0$$

★3、k 的何值时关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + k - 5 = 0$

(1) 有两个不相等的实数根； (2) 有两个相等的实数根； (3) 没有实数根；

★★4、关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m-1)x + 2m-1 = 0$, 其根的判别式为 1.

求 (1) m 的值 ; (2) 方程的根

★★5、已知关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2 + (2k-1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

★★★6、求证：无论 k 为何实数值，关于 x 的方程 $(k-1)x^2 + (3k+1)x + 3 + 2k = 0$ 总有实数根。

★★★7、已知 $\triangle ABC$ 的两边是关于 x 的方程 $x^2 - 3x + 2k = 0$ 的两根，第三边长为2，当 k 取何值时， $\triangle ABC$ 是等腰三角形？

★★★8、已知关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + m^2 + m + 1 = 0$ 有两个实数根。

化简： $\sqrt{m^2 - 2m + 1} + |2 + m|$

【拓展】根与系数的关系:韦达定理

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 来说, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 。

利用韦达定理可以求一些代数式的值(式子变形), 如 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}。$$

解题小诀窍: 当一元二次方程的题目中给出一个根让你求另外一个根或未知系数时, 可以用韦达定理。

练习:

★1、若 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个根, 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为()

A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

★★2、若 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 6x + k - 1 = 0$ 的两个根, 且 $x_1^2 + x_2^2 = 24$, 则 k 的值为()

A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

★3、若关于 x 的方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 ()

- A. $k > -1$ B. $k > -1$ 且 $k \neq 0$
C. $k < 1$ D. $k < 1$ 且 $k \neq 0$

★★4、已知一元二次方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 的一根是 2，则另一个根是_____.

★★★★5、已知关于 x 的方程 $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$ ($m > 0$)

(1) 求证：这个方程有两个不相等的实数根。

(2) 如果这个方程的两个实数根是 x_1 、 x_2 ，且 $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 5m$ ，求 m 的值。

,

★★★★6、不解方程，作一个一元二次方程，使它的两个根满足如下的要求：

(1) 分别是方程 $2x^2 + 6x - 3 = 0$ 的两个根的平方

(2) 分别比方程 $x^2 + 5x - 7 = 0$ 的两个根大 4。

第六讲 一元二次方程的应用

【知识梳理】

1. 二次三项式的因式分解

如果方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 、 $x_2 =$

$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 那么 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. 一元二次方程的应用问题

【例题剖析】

★将下面的二次三项式在实数范围内因式分解:

(1) $x^2 - 2x - 5$

(2) $x^2 + \sqrt{2}x - 4$

(3) $2x^2 - 8xy + 5y^2$

(A) 组

★1. 将下列的二次三项式在实数范围内因式分解:.

(1) $x^2 - 6x + 6$

(2) $2x^2y^2 - 6xy - 5$

(3) $-y^2 + 5y + 2$

★★2. 某商品两次价格下调后, 单价从 5 元变为 4.05 元, 则平均每次调价的百分率为 ()

A. 9%

B. 10%

C. 11%

D. 12%

★★3. 某班同学在毕业前夕互赠纪念品, 每人都向其他同学送一件, 全班累计送出纪念品 1772 件, 求该班共有学生多少个? 下列说法错误的是 ()

A. 设全班共有 x 人, 则每人送出纪念品 $(x-1)$ 件

B. 设全班共有 x 人, 则每人送出纪念品 x 件

C. 根据题意列方程, 得 $x(x-1)=1772$

D. 该班共有学生 42 人

★★4. 某超市一月份的营业额为 200 万元, 一, 二, 三月份的营业额为 1000 万元, 设平均每月的营业额为增长率为 x , 则由题意列方程为 ()

A. $200 + 200 \cdot 2x = 1000$

B. $200(1+x)^2 = 1000$

C. $200 + 200 \cdot 3x = 1000$

D. $200[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1000$

★★★5. 从正方形的铁片上, 截去 5cm 宽的一个长方形铁皮, 余下的面积为 84cm^2 , 则原来正方形面积最大可能为 () cm^2 .

A. 84

B. 109

C. 144

D. 420

★★6. 两个连续奇数的平方和为 202, 则这两个奇数是_____

★★7. 已知一个直角三角形的面积为 6, 两条直角边的和为 7, 则斜边长为 _____

★★8. 某工厂第一季度平均每月增产 10%, 一月份产值 a 元, 那么三月份产值为 _____

(B) 组

★★★9. 有一个两位数, 它的个位上的数字与十位上的数字之和是 6, 如果把它的个位数字与十位数字调换位置, 所得的两位数乘以原来的两位数所得的积等于 1008, 求调换位置后得到的两位数

★★★★10. 把长方形铁片的四个角各剪去一个边长为 5 厘米的正方形, 折起四边就可以做成一个无盖盒子, 如果这个盒子的容积是 1500 立方厘米, 原长方形铁皮的长是宽的 2 倍, 求原长方形铁片的长和宽分别是多少厘米?

★★★★11. 某校 2017 年捐款 1 万元给希望工程，以后每年都捐款，计划到 2019 年底连续三年共捐款 4.75 万元，问该校捐款的平均年增长率是多少？

★★★★★12. 某商店如果将进货价格为 8 元的商品按每件 10 元售出，每天可销售 200 件，现采取提高售价，减少进货量的方法，增加利润，已知这种商品每涨价 0.5 元，其销售量就减少 10 件，问应将售价定为多少元时可赚利润 720 元？

★★★★13. 要建一个面积为 140 平方米的长方形仓库，仓库的一边靠墙，这堵墙长 16 米；在与墙平行的一边，要开一扇 2 米宽的门。已知围建仓库的现有木板材料可使新建板墙的总长为 32 米，那么这个仓库设计的长和宽分别应是多少米？

★★★14. 参加一次足球赛的每两队之间都进行两次比赛，共赛 90 场，共有多少队参加？

★★★15. 某商品的成本价为 200 元，出售价比成本价高出五成，由于销路不畅，连续两次打折后的售价是 192 元，若每一次的折扣是一样的，求每一次打几折？

(C) 组

★★★16. 甲、乙两建筑队完成一项工程，若两队同时开工，12 天可以完成全部工程，乙队单独完成该工程比甲队单独完成该工程多用 10 天，问乙独完成该工程需多少天？

★★★★★17. 将进价为 40 元的商品加价 25% 后出售能卖出 500 个。若以后每涨 1 元，其销量就会减少 10 个，如果使利润为 8000 元，且商家与顾客双赢，售价应定为多少元？这时应进货多少个？

★★★★★18. 一个容器盛满纯酒精 20 升，第一次倒出纯酒精若干升后，加水注满，第二次倒出相同数量的酒精，这时容器内的纯酒精只是原来的 $\frac{1}{4}$ ，问第一次倒出纯酒精多少升？

第八讲 一元二次方程复习

一、选择题：

★1. 下列方程中不一定是一元二次方程的是()

A. $(a-3)x^2=8$ ($a \neq 3$)

B. $ax^2+bx+c=0$

C. $(x+3)(x-2)=x+5$

D. $\sqrt{3}x^2 + \frac{3}{57}x - 2 = 0$

★★2. 已知当 $x=2$ 时，二次三项式 $2x^2 - x + a$ 的值为 5，那么 $x=-1$ 时，这个二次三项式的值为 ()

A. -2

B. 0;

C. 2

D. 4

★3. 一元二次方程 $2x^2-3x+1=0$ 化为 $(x+a)^2=b$ 的形式，正确的是()

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=16$; B. $2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$; C. $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$; D. 以上都不对

★★4. 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0，则 a 值为 ()

A. 1

B. -1

C. 1 或 -1

D. $\frac{1}{2}$

★★★5. 已知三角形两边长分别为 2 和 9，第三边的长为二次方程 $x^2-14x+48=0$ 的一根，则这个三角形的周长为 ()

A. 11

B. 17

C. 17 或 19

D. 19

★★★6. 如果 $a < 0$ ，那么关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 的根的情况是 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 不能确定

二、填空题：

★7. 用_____法解方程 $3(x-2)^2=2x-4$ 比较简便.

★8. 如果 $2x^2+1$ 与 $4x^2-2x-5$ 互为相反数，则 x 的值为_____.

★9. $x^2 - 3x + \underline{\hspace{1cm}} = (x - \underline{\hspace{1cm}})^2$

★10. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有一个根为 -1，则 a 、 b 、 c 的关系是_____.

★★11. 已知方程 $3ax^2-bx-1=0$ 和 $ax^2+2bx-5=0$ ，有共同的根 -1，则 $a=$ _____， $b=$ _____.

★★12. 若关于 x 的方程 $(2-a)x^2 = 2(a \neq 2)$ 无实数根，那么 a 的取值范围是_____.

★★★13. 已知 $3-\sqrt{2}$ 是方程 $x^2+mx+7=0$ 的一个根，则 $m=$ _____，另一根为_____.

★★★★14. 已知两数的积是 12，这两数的平方和是 25，以这两数为根的一元二次方程是_____.

★★★15. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个根，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 等于_____;

$$x_1^2 + x_2^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

★★16. 关于 x 的二次方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个相等实根，则符合条件的一组 m, n 的实数值可以是 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

★★★17. 已知二次三项式 $9x^2 - (m+6)x + m - 2$ 是一个完全平方式，则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

★★★18. 若 $ax^2 - 5x + 3 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则不等式 $-\sqrt{3}a + 3 > 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$

★★★19. 某商品的进价为每件 x 元，零售价为每件 900 元，为了适应市场竞争，商店按零售价的九折后再让利 40 元销售，仍可获得 10%（相对于进价），则 x 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元。

三、用适当方法解方程：

★20. $(3-x)^2 + x^2 = 5$

★21. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

★★22. $(2x+3)(7x-19) = 2(2x+3)$

★★23. $(9x-5)^2 = (5-3x)^2$

★★24. $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 8 = 0$

★★ 25. $(2x-1)^2 - 3(2x-1) - 4 = 0$

26. 在实数范围内因式分解

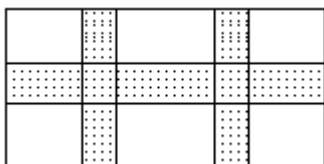
★ (1) $2x^2 - 3x - 1$

★★ (2) $-5x^2 + 2xy + y^2$

四、列方程解应用题：

★★27. 已知三角形的两边长分别是 3 厘米和 8 厘米，第三边的数值是一元二次方程 $x^2 - 17x + 66 = 0$ 的根，求此三角形的周长。

★★★28. 如图所示，在宽为 20m，长为 32m 的矩形耕地上，修筑同样宽的三条道路，（互相垂直），把耕地分成大小不等的六块试验田，要使试验田的面积为 570m^2 ，道路应为多宽？



★★★★29. 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件赢利 40 元，为了扩大销售，增加赢利，尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施，经调查发现，如果每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 2 件。求：（1）若商场平均每天要赢利 1200 元，每件衬衫应降价多少元？（2）每件衬衫降价多少元时，商场平均每天赢利最多？

★★★★★30. 解关于 x 的方程： $mnx^2 - (m^2 + n^2)x + mn = 0$

★★★★31. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 4 = 0$ 两根的平方和比两根的积大 21, 求 m 的值

★★★★32. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$ 有两个实数根, 求 a 的取值范围

★★★★33. 当 m 取什么值时, 方程 $mx^2 - (2m-1)x + (m+1) = 0$ 有两个不相等的实数根?

第九讲 函数的概念

【知识梳理】

1. 常量与变量

2. 函数的概念

(1) 了解函数的概念，弄清自变量与函数之间的关系

(2) 注意：①两个变量 x 与 y

②对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与其对应

③一个变量的数值随着另一个变量的数值变化而变化

3. 自变量的取值范围的确定

(1) 自变量的取值必须使含自变量的代数式（数学式子）有意义

(2) 整式：全体实数

(3) 分式：分母不等于 0

(4) 二次根式下含自变量：开偶数次方中的被开方数必须大于等于 0。

(5) 有分式也有二次根式下含自变量：两个的公共部分

(6) 当函数解析式表示实际问题时，自变量的取值必须使实际问题有意义

4. 函数表示方法：要根据具体的情况选择适当的方法

(1) 解析式

(2) 列表法

(3) 图象法

5. 求函数的值

注意：分段函数要在自变量的取值范围内求

【例题剖析】

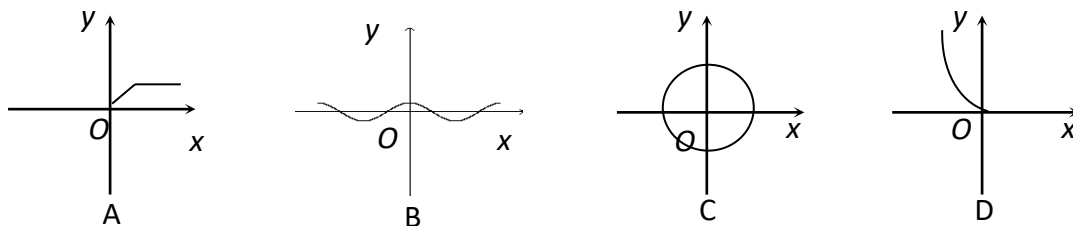
★1、骆驼被称为“沙漠之舟”，它的体温随时间的变化而变化，在这一问题中，自变量是（ ）

- A. 沙漠 B. 体温 C. 时间 D. 骆驼

★2、圆的面积 $S(\text{cm}^2)$ 与圆的半径 $r(\text{cm})$ 之间的函数关系式是 $S = \pi r^2$ ，此关系式中的变量是（ ）

- A. r^2 B. r C. S, π, r^2 D. S 和 r

★★3、下列图形中的曲线不表示 y 是 x 的函数的是 ()



★★4、下列函数中，不是函数关系的是 ()

A. $y = \sqrt{x} (x > 0)$ B. $y = \sqrt{-x} (x < 0)$ C. $y = \pm \sqrt{x} (x > 0)$ D. $y = -\sqrt{x} (x > 0)$

★★5、在函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{3x}$ 中，自变量的取值范围是 ()

A. $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$ B. $x \leq -2$ 且 $x \neq 0$ C. $x \neq 0$ D. $x \leq -2$

★★★6、下列函数中和 $y=x$ 表示同一函数的是 ()

A. $y = |x|$ B. $y = \frac{|x|}{x}$ C. $y = \sqrt[3]{x^3}$ D. $y = (\sqrt{x})^2$

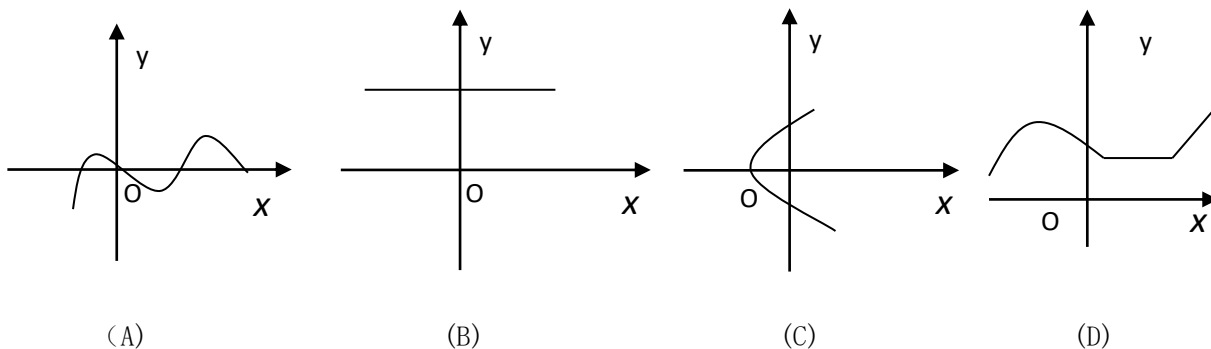
★★★7、求下列函数中自变量 x 的取值范围 ()

(1) $y = 2x - 3$ (2) $y = \frac{1}{x+1}$ (3) $y = \sqrt{x-2}$ (4) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

(A) 组

★1. 已知 x, y 满足 $3x - y = 1$, 把 y 表示成 x 的函数为 _____, 其中常量为 _____, 变量为 _____

★★2. 下列各图象中, y 不是 x 函数的是 ()



★★3. 下列函数中，表示同一函数的是 ()

A. $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$

B. $y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$

C. $y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$

D. $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

★★4. 函数 $y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{2x-2}$ 的自变量 x 的取值范围是 ()

A. $x \geq -3$ B. $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$ C. $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ D. $x \geq 3$ 且 $x \neq 1$

★★5. 下列函数中, 自变量的取值范围选取错误的是 ()

A. $y = 2x^2$ 中, x 取全体实数

B. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 中, x 取 $x \neq -1$ 的实数

C. $y = \sqrt{x-2}$ 中, x 取 $x \geq 2$ 的实数

D. $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 中, x 取 $x \geq -3$ 的实数

★6. 已知 A、B 两地相距 50 千米, 某同学步行由 A 地到 B 地, 速度为每小时 8 千米, 设该同学与 B 地的距离为 y 千米, 步行的时间为 x 小时, 则 y 与 x 之间的函数解析式为 _____
自变量 x 的取值范围是 _____

★7. 当 $x =$ _____ 时, 函数 $y = 3x - 2$ 与函数 $y = 5x + 1$ 有相同的函数值。

★★8. 已知函数 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 中, 当 $x = a$ 时的函数值为 1, 则 a 的值是 ()

A. -1 B. 1 C. -3 D. 3

(B) 组

★★9. 已知数据 $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$ 用 n 表示数据排练的序号, y 表示对应的数据, 则 $y =$ _____

; 当 $n = 100$ 时, $y =$ _____; y 能否等于 100? _____

(填“能”或“不能”)

★★10. 油箱中有油 30kg, 油从管道中匀速流出, 1 小时流完, 求油箱中剩余油量 Q (kg) 与流出时间 t (分钟) 间的函数关系式为 _____, 自变量的范围是 _____

当 $Q = 10$ kg 时, $t =$ _____

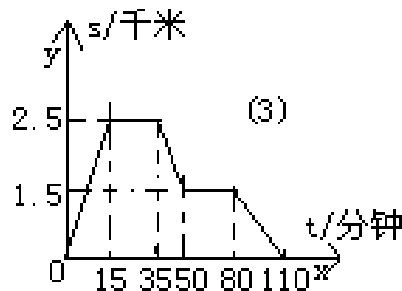
★★11. 在做自由落体实验中, 测得两个变量 h 和 t 之间的对应数据如下表:

h	4.85	19.48	43.91	78.16
t	1	2	3	4

则 h 与 t 之间的关系最接近于下列各关系式中的 ()

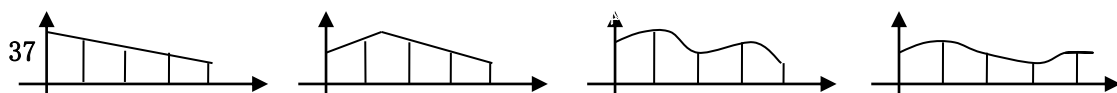
- A. $h = 15t - 10$ B. $h = 5t$ C. $h = 4.9t^2$ D. $h = t^2 + 5$

★★★★12. 如图反映的过程是：小明从家跑步到体育馆，在那里锻炼了一阵后走到新华书店去买书，然后散步回家，其中 t 表示时间， s 表示小明离家的距离，那么小明在体育馆锻炼和在新华书店买书共用去的时间是（ ）

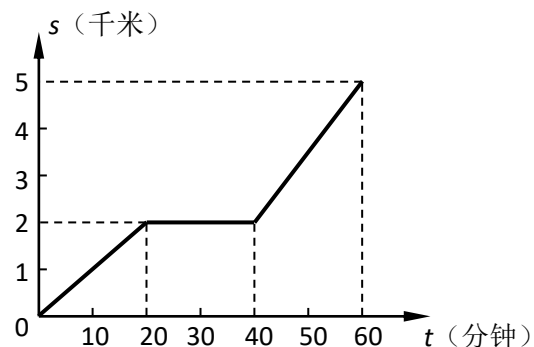


- A. 35 分钟 B. 45 分钟
C. 50 分钟 D. 60 分钟

★★★★13. 一天，亮亮发烧了，早晨他烧得很厉害，吃过药后感觉好多了，中午时亮亮的体温基本正常，但是下午他的体温又开始上升，直到半夜，亮亮才感觉身上不那么发烫了，下面各图能基本上反映出亮亮这一天（0 时—24 时）体温的变化情况的是（ ）



★★★★14. 甲、乙两人同时从 A 地前往相距 5 千米的 B 地。甲骑自行车，途中修车耽误了 20 分钟，甲行驶的路程 s (千米) 关于时间 t (分钟) 的函数图像如图 2 所示；乙慢跑所行的路程 s (千米) 关于时间 t (分钟) 的函数解析式为 $s = \frac{1}{12}t$ ($0 \leq t \leq 60$)。



- (1) 在图 2 中画出乙慢跑所行的路程关于时间的函数图像；
(2) 乙慢跑的速度是每分钟_____千米；
(3) 甲修车后行驶的速度是每分钟_____千米；
(4) 甲、乙两人在出发后，中途_____分钟时相遇。

图 2

★★★★★15. 已知点 $(\frac{2}{3}, y_1)$ 在函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图像上，将 $x = y_1 + 1$ 代入函数中，所得函数值为 y_2 ，再将 $x = y_2 + 1$ 代入函数中，所得函数值为 y_3 ，……如此继续下去，则

$y_{2020} =$ _____

★★★★16. 已知 $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ ，求当 $f(x) = 0$ 时 x 的值。

★★★17. 已知变量 x 、 y 满足下列关系式，把他们分别改写成 $y = f(x)$ 的形式

(1) $2x + 3y = 6$

(2) $x = \frac{3x+1}{y-2}$

(C) 组

★★★★18. 设 $f(x) = \begin{cases} 2(x < 0) \\ 3x+1(x \geq 0) \end{cases}$ 求 $f(4)$ ， $f(-9)$ ， $f[f(10)]$ 的值。

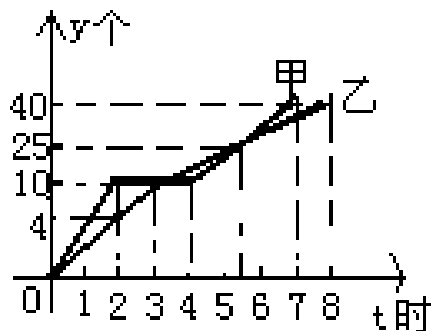
★★★★19. 某车间的甲、乙两名工人分别同时生产同种零件，它们一天生产零件个数 y (个) 与生产时间 t (时) 的函数关系如图所示

(1) 根据图像填空

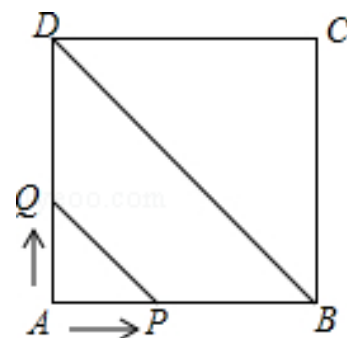
①甲、乙中_____先完成一天的任务，在生产过程中，因机器故障停止生产_____小时

②当 $t =$ _____时，甲、乙生产的零件个数相等

(2) 谁在哪一段时间内的生产速度是最快的？求该段时间内他每小时生产零件的个数？



★★★★★20. 如图，正形 ABCD 的边长为 4cm ，动点 P、Q 同时从点 A 出发，以 1cm/s 的速度分别沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 和 $A \rightarrow D \rightarrow C$ 的路径向点 C 运动，当 P、Q 到达点 C 时都停止运动. 设运动时间为 x （单位：s），四边形 PBDQ 的面积为 y （单位： cm^2 ）.



(1) 在这个运动变化过程中，当运动时间 x 发生变化时，四边形 PBDQ 的面积 y 是否也随之发生变化？当运动时间 x 增大时，四边形 PBDQ 的面积 y 如何变化？

(2) 在这个运动变化过程中，运动时间 x 的取值有什么要求吗？为什么？

第十讲 正比例函数

【知识要点 1】

正比例函数的概念：形如 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数

正比例函数的图像：是一条经过原点的倾斜直线

正比例函数的性质：

1. $k > 0$ 时，图像经过一三象限， y 随着 x 的增大而增大
2. $k < 0$ 时，图像经过二四象限， y 随着 x 的增大而减小

例题：【基础】★

1. 若点 $A(\sqrt{3}, 2)$ 在正比例函数的图像上，那么正比例函数的解析式为_____.
2. 若直线 $y = -\sqrt{3}x$ 过点 $(m, \sqrt{3})$ ，则 $m =$ _____.
3. 若函数 $y = (a-3)x + b + 2$ 是正比例函数，则 a _____， b _____.
4. 在同一直角坐标系内画出下列函数的图像， $y = -2x$ 与 $y = \frac{1}{2}x$
5. 已知正比例函数的图像经过 $P(-2, -3)$ 和 $Q(1-m, -m)$ ，(1) 写出正比例函数解析式，(2) 求 m 的值。(3) 画出正比例函数的图像

6. 已知 y 与 $3x-1$ 成正比例, 当 $x=-3$ 时, $y=-1$, 求:

(1) 当 $x=\sqrt{2}$ 时, 求 y 的值.

(2) 当 $y=\sqrt{2}$ 时, 求 x 的值.

【提高】★★★7. 已知 y 与 $x-1$ 成正比例, 当 $x=-2$ 时, $y=6$

(1) 求 y 与 x 的函数解析式.

(2) 如果 x 的取值范围时 $0 \leq x \leq 5$, 求 y 的取值范围

(3) 如果 y 的取值范围时 $y > 1$, 求 x 的取值范围

8. 已知 y 与 x 成正比例, 且 z 与 y 成正比例, 当 $y=3$ 时, $z=-1$; 当 $x=\frac{2}{3}$ 时, $y=4$ 求 z 与 x 的函数解析式

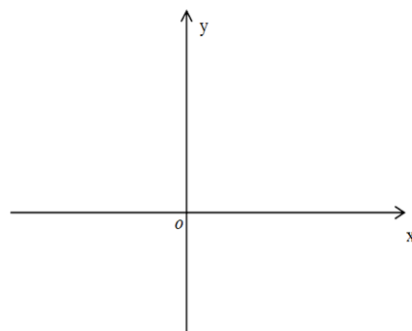
9. 已知 A、B 两地相距 20 千米，某人由 A 地步行到 B 地，平均速度为每小时 5 千米，设她行走 x 小时后与 A 地相距 y 千米

- (1) 写出 y 关于 x 的函数解析式以及这个函数的定义域
- (2) 画出这个函数的图像

10. 正比例函数的图像经过点 $(-2, 8)$ ，过图像上一点 A 作 y 轴的垂线，垂足为

$B(0, -6)$. 求：

- (1) A 点坐标；
- (2) 三角形 OAB 的面积.



【拓展】★★★★11. 已知直线 $y = kx$ 过点 $(-2, 1)$ ，A 是直线 $y = kx$ 图像上的点，若过点 A

向 x 轴作垂线，垂足为 B，且 $S_{\triangle ABO} = 9$ ，求点 A 的坐标

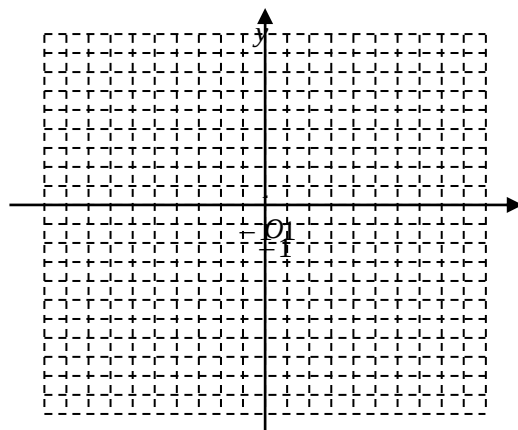
【知识要点 2】

1. 正比例函数的图形和性质

在同一直角坐标系内画出下列函数的图像：

$$y = -\frac{1}{4}x, \quad y = -x, \quad y = -4x, \quad y = \frac{1}{4}x,$$

$$y = x, \quad y = 4x.$$



正比例函数 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的性

质：

1、 k 与 0 的大小:

(1) 当 $k > 0$ 时, 正比例函数的图象经过第一、三象限, 自变量 x 的值逐渐增大时, y 的值也随着逐渐增大.

(2) 当 $k < 0$ 时, 正比例函数的图象经过第二、四象限, 自变量 x 的值逐渐增大时, y 的值则随着逐渐减小.

2、 $|k|$ 与 1 的大小:

(1) $|k| = 1$ 时, 正比例函数的图像为各象限的坐标轴夹角平分线所在直线, $k > 0$ 时, 为第一、三象限的坐标轴夹角平分线所在直线; 当 $k < 0$ 时, 为第二、四象限的坐标轴夹角平分线所在直线.

(2) $|k| > 1$ 时, 正比例函数的图像越接近 y 轴,

$|k| < 1$ 时, 正比例函数的图像越接近 x 轴.

1、对称性

(1) 正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像关于原点对称.

(2) 当 $k_1 + k_2 = 0$ 时, 正比例函数 $y = k_1x$ (k_1 是常数, $k_1 \neq 0$) 与 $y = k_2x$ (k_2 是常数, $k_2 \neq 0$) 的图像关于坐标轴对称.

(3) 当 $k_1 \cdot k_2 = 1$ 且 k_1 、 k_2 同号时, 正比例函数 $y = k_1x$ (k_1 是常数, $k_1 \neq 0$) 与 $y = k_2x$ (k_2 是常数, $k_2 \neq 0$) 的图像关于各象限的坐标轴夹角平分线所在直线 $y = x$ 或 $y = -x$ 对称.

典型例题

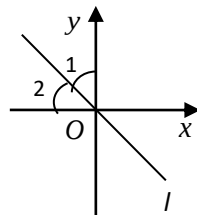
【提高】★★例 1 已知函数 $y = (k^2 + 5k + 4)x^{k^2 - 2}$, 当 k 为何值时, 它是正比例函数, 且 y 随 x 的减小而减小.

【提高】例2 ★★ 填空：

1、如图， $\angle 1 = \angle 2$ ，那么直线 l 的解析式为_____。

2、对于直线 $y = kx$ 上的每一个点，都能在 $y = -2x$ 上找到它关于 x 轴的对称点，那么 $k =$ _____。

3、已知点 P 关于 y 轴对称的点坐标是 $(-5, -2)$ ，那么过点 P 的正比例函数的解析式为_____。



【提高】★★★例3 设 a 是大于零的常数，且 $a \neq 1$ ， $y = \left(1 - \frac{1}{a}\right)x$ ，已知 $1 \leq x \leq 2$ ，求 y 的

最大值和最小值。

巩固练习：【基础】★

1、如果函数 $y = (1 - k)x$ 的图象经过第一、三象限，那么 k 的取值范围是_____。

2、已知直线 $y = (m - 3)x$ ，当 y 随着 x 减小而增大时，求 m 的取值范围 _____。

3、已知关于 x 的正比例函数 $y = (k - 1)x^{k^2}$ 。

(1) 求 k 的值；(2) 这个函数的图像经过哪些象限？(3) y 随着 x 的增大而怎样变化？

4、已知关于 x 的正比例函数 $y = \left(n - \frac{1}{3}\right)x^{2n^2 + 5n - 2}$ ，求：

(1) 当图像位于二、四象限时，求 n 的值；

(2) 当函数 y 随着 x 的增大而增大时，求 n 的值。

第十一讲 反比例函数

【知识要点 1】

有关概念

1、变量间成反比例关系

- 2、如果两个变量的每一组对应值的乘积是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成反比例。

用数学式子表示两个变量 x, y 成反比例，就是 $xy = k$ ，或表示为 $y = \frac{k}{x}$ ，其中 k 为不等于零的常数。

3、反比例函数

解析式形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的函数叫做反比例函数，其中 k 也叫比例系数。

反比例函数的一般式： $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 或表示成 $y = kx^{-1} (k \neq 0)$ 。

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的定义域是不等于零的一切实数。

4、反比例函数图像

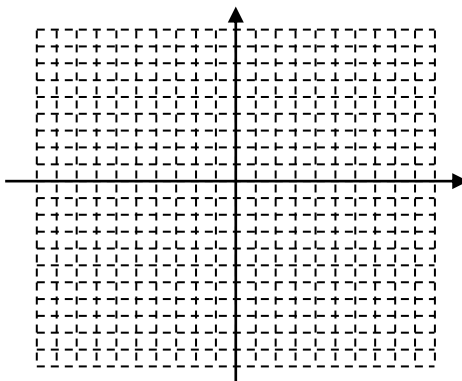
反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象是双曲线，有两个分支，这两个分支关于原点成中心对称。

例如：画出函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像：

列表：

描点：

连线。



典型例题

例1 当 k 为何值时，函数 $y = (k^2 + 5k + 4)x^{k^2-2}$ 反比例函数.

例2 平面直角坐标系中有六个点 $A(1,5)$, $B(-3, -\frac{5}{3})$, $C(-5, -1)$, $D(-2, \frac{5}{2})$, $E(3, \frac{5}{3})$,

$F(\frac{5}{2}, 2)$, 其中有五个点在同一反比例函数图象上, 找出不在这个反比例函数图象上的点.

例3 填空【基础】★

(1) 如果 y 与 $x+2$ 成反比例, 当 $x=4$ 时, $y=6$, 那么当 $y=4$ 时, $x=$ _____.

(2) 已知反比例函数的图象经过点 $(3, 2)$ 和 $(m, -2)$, 那么 m 的值是_____.

(3) 在平面直角坐标系中, O 是坐标原点. 点 $P(m, n)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上. 如果 $m=k$, $n=k-2$, 那么 $k=$ _____.

巩固练习: 【提高】★★

1、若反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象经过点 $A(2, m)$, 则 m 的值是 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

2、若 y 与 $2x+1$ 成反比例, 当 $x=1$ 时, $y=\frac{4}{3}$, 求 y 关于 x 的函数解析式.

3、若长方形的面积为 20 cm^2 , 长为 $x \text{ cm}$, 宽为 $y \text{ cm}$, 求 y 关于 x 的函数解析式及函数的定义域.

4、反比例函数的图像经过点 $P(2, -3)$ 、 $Q(2a+3, -2)$ 。

(1) 求函数解析式；(2) 求 Q 的值。

【知识要点 2】

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是实数, $k \neq 0$) 的性质:

1、 k 与 0 的大小:

(1) 当 $k > 0$ 时, 图象的两个分支分别在第一、三象限内, 在每个象限内, 当自变量 x 的值逐渐增大时, y 的值随着逐渐减小。

(2) 当 $k < 0$ 时, 图象的两个分支分别在第二、四象限内, 在每个象限内, 当自变量 x 的值逐渐增大时, y 的值随着逐渐增大。

(3) 图象的两个分支都无限接近于 x 轴和 y 轴, 但不会与 x 轴与 y 轴相交。

2、对称性

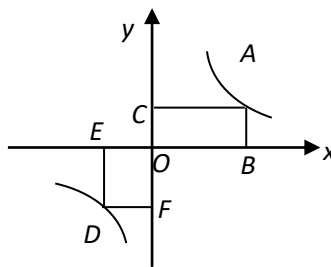
(4) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是实数, $k \neq 0$) 的图像关于原点对称。

(5) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是实数, $k \neq 0$) 的图像关于各象限的坐标轴夹角平分线所在直线 $y = x$ 或 $y = -x$ 对称。

(6) 当 $k_1 + k_2 = 0$ 时, 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ (k_1 是实数, $k_1 \neq 0$) 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ (k_2 是实数, $k_2 \neq 0$) 的图像关于坐标轴对称。

3、反比例函数的面积不变性

【提高】★★★例 1 如图: 点 A 、 D 是反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图像上的点, 过点 A 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足分别为 B 、 C , 过点 D 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足分别为 E 、 F , 试比较长方形 $OBAC$ 与长方形 $OEDF$ 的面积大小。



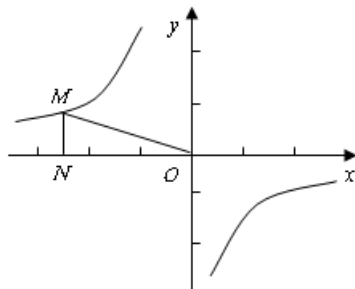
(1) 已知反比例函数, 就可以求出过反比例函数图像上任意一点作坐标轴的两条垂线, 围成的矩形面积等于反比例系数的绝对值. 也可以求出过反比例函数图像上任意一点作一条坐标轴的垂线, 再联结坐标原点和这个点围成的三角形面积等于反比例系数的绝对值的一半.

(2) 已知双曲线上任意一点作坐标轴的两条垂线, 围成的矩形面积就可以求出反比例系数的绝对值, 从而确定反比例系数. 也可以过反比例函数图像上任意一点作一条坐标轴的垂线, 再联结坐标原点和这个点围成的三角形面积等于反比例系数的绝对值的一半, 从而确定反比例系数.

【提高】★★★例 2 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象如图所示,

点 M 是该函数图象上一点, MN 垂直于 x 轴, 垂足是点 N , 如

果 $S_{\triangle MON} = 2$, 那么 k 的值为_____.



典型例题【提高】★★

例 3 填空:

(1) 函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象位于第_____象限, 当 $x > 0$ 时, y 的值随 x 的增大而_____.

(2) 已知反比例函数 $y = \frac{1-2m}{x}$ 的图象上两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, 有 $y_1 < y_2$, 那么 m 的取值范围是_____.

(3) 把函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图像沿 x 轴翻折, 其图像对应的解析式为_____.

(4) 已知反比例函数的图像经过第四象限, 且经过点 $A(2, 3a)$, $B(\frac{2}{a}, 12)$ 两点, 当 $y=12$ 时, x 的值为_____.

例 4 ★★★已知点 $A(2, y_1)$, $B(5, y_2)$, $C(-3, y_3)$ 是反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 图象上的三点. 请比较 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小.

巩固练习：★★

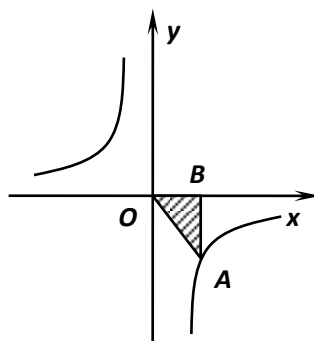
1、如果反比例函数 $y = \frac{3m-1}{x}$ 的图象在第一、三象限，那么 m 的范围是_____.

2、若反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象上有两点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$, 则 y_1 _____ y_2 (填 “>” 或 “=” 或 “<”).

3、下列函数中, y 随 x 的增大而减小的是 ()

- A. $y = -\frac{1}{x}$ B. $y = \frac{2}{x}$ C. $y = -\frac{3}{x}$ ($x > 0$) D. $y = \frac{4}{x}$ ($x < 0$)

4、如图: 点 A 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上, $AB \perp x$ 轴于 B , 且 $\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB} = 2$, 则 $k =$ _____.



第3题图

5、反比例函数的图象在第一象限内经过点 A , 过点 A 分别向 x 轴, y 轴引垂线, 垂足分别为 P , Q , 已知四边形 $APOQ$ 的面积为 4, 那么这个反比例函数的解析式为 ()

- A. $y = \frac{4}{x}$ B. $y = \frac{x}{4}$
C. $y = 4x$ D. $y = \frac{2}{x}$

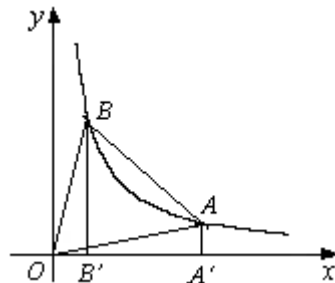
6、已知函数 $y = (m^2 + m - 6)x^{m^2 - 3m - 1}$, 若此函数为反比例函数, 且在每一象限内 y 的值随 x 的增大而减小, 求 m 的值, 并写出函数解析式.

【提高】★★★★7. 如图, 在反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ ($x > 0$) 的图象上有不重合的两点 A , B , 且 A 点的纵坐标是 2, B 点的横坐标是 2, BB' 和 AA' 都垂直于 x 轴, B' , A' 为垂足. 求:

(1) A 点的横坐标;

(2) $S_{\triangle OB'B}$;

(3) $S_{\triangle OAB}$.



第十二讲 函数的表示法

【知识要点】

1、函数的三种常用表示方法：**解析法**、**列表法**、**图像法**。

(1) **解析法**：用数学式子来表示两个变量之间的函数关系。

(2) **列表法**：用表格来表示两个变量之间的函数关系。

(3) **图像法**：用图像来表示两个变量之间的函数关系。

2、函数的三种表示方法的特点：

(1) **解析法**：全面、简单明了地概括了变量之间的依赖关系，能够精确计算，也便于对函数进行理论上的分析和研究；但并不是所有变量间的依赖关系都能用解析式表达。

(2) **列表法**：表示运动变化的规律相对比较直观，可以很清楚地找到自变量的值与其对应的函数值；但在表格中往往不可能把自变量的所有值与其对应的函数值都列在表中。

(3) **图像法**：表示运动变化的规律相对比较直观，可以清楚地看出函数的变化情况；但在图像中找对应值时往往不够准确，而且有的函数画不出图像，又有些函数得不到完整的图像。

典型例题

【提高】★★★例1 如图所示的图形是函数 $y=f(x)$ 对应的完整图像，根据图像回答：

(1) $f(0) =$ _____；

(2) 若 $f(t) = 0$ ，则 $t =$ _____；

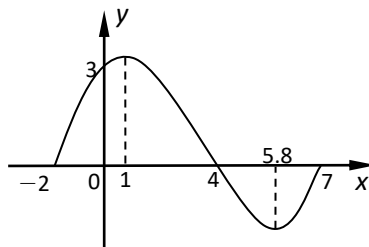
(3) 函数自变量 x 的取值范围 _____；

(4) 当 x 满足 _____ 时， $y > 0$ ；

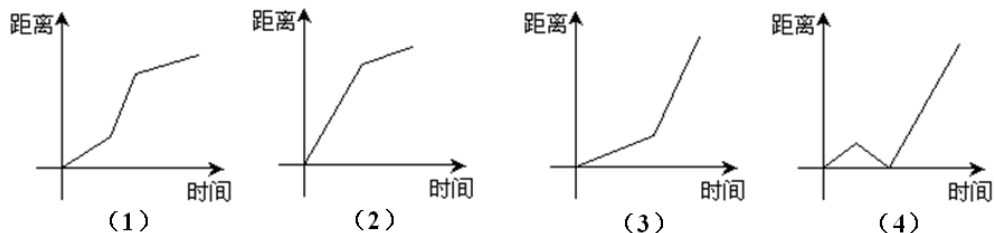
当 x 满足 _____ 时， $y < 0$ ；

(5) 当 x 满足 _____ 时， y 随 x 增大而增大；

当 x 满足 _____ 时， y 随 x 增大而减小。



【拓展】★★★例2 下列四个图形和三段文字说明，它们描述了住在甲地的学生骑自行车到乙地上学的情况，请将图形与文字说明配合起来，并且根据多余的一幅图，再编一段文字说明。



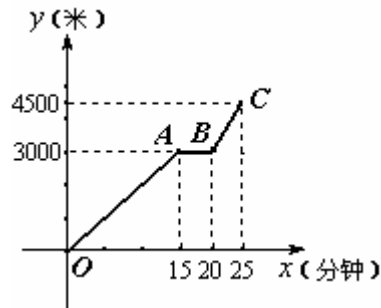
学生 A: 一开始以相同速度行进, 由于街道拥挤, 速度不快, 后来担心迟到设法加快速度, 直到离学校不远, 估计时间足够, 于是又放慢速度.

学生 B: 骑的是机动自行车, 速度很快, 半路突然发生故障, 只能推着走, 反而比普通自行车的速度还慢.

学生 C: 匆匆离家, 骑了一段路想起忘了带几何作图工具, 又回家去取, 耽误了时间, 后来就加快自行车速度, 总算还是准时到校.

例 3 ★★★ 为响应环保组织提出的“低碳生活”的号召, 李明决定不开汽车而改骑自行车上班. 有一天, 李明骑自行车从家里到工厂上班, 途中因自行车发生故障, 修车耽误了一段时间, 车修好后继续骑行, 直至到达工厂 (假设在骑自行车过程中匀速行驶). 李明离家的距离 y (米) 与离家时间 x (分钟) 的关系表示如下图:

- (1) 李明从家出发到出现故障时的速度为_____米 / 分钟;
- (2) 李明修车用时_____分钟;
- (3) 车修好后李明继续骑行的速度为_____米 / 分钟.



例 4 ★★★★★ 某办公用品销售商店推出两种优惠方法: ①购

1 个书包, 赠送 1 支水性笔; ②购书包和水性笔一律按 9 折优惠. 书包每个定价 20 元, 水性笔每支定价 5 元. 小丽和同学需买 4 个书包, 水性笔若干支 (不少于 4 支).

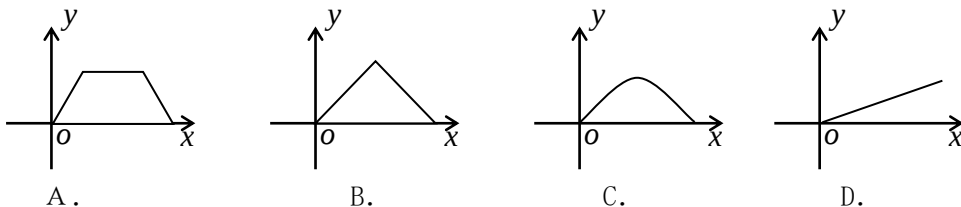
- (1) 分别写出两种优惠方法购买费用 y (元) 与所买水性笔支数 x (支) 之间的函数关系式;
- (2) 对 x 的取值情况进行分析, 说明按哪种优惠方法购买比较便宜;
- (3) 小丽和同学需买这种书包 4 个和水性笔 12 支, 请你设计怎样购买最经济.

巩固练习：【提高】★★★

1、如图，火车匀速通过隧道（隧道长大于火车长）时，火车进入隧道的时间 x 与火车在隧道内的长度 y 之间的关系用图象描述大致是（ ）

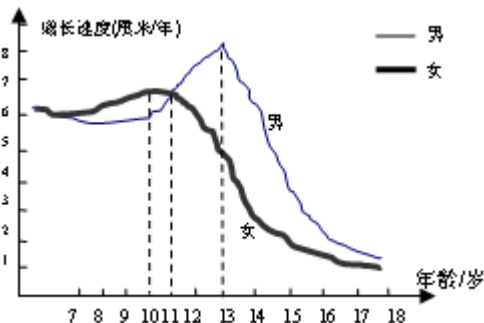


图 1

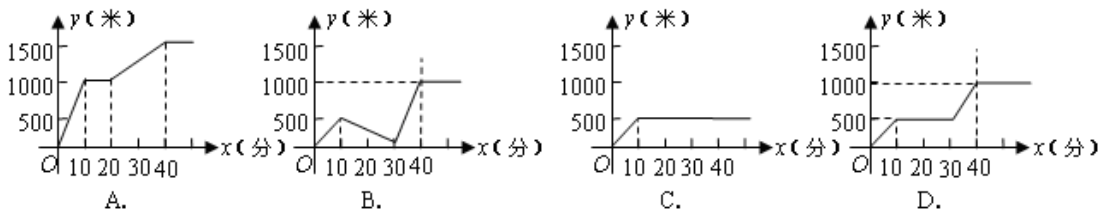


2、根据生物学研究结果，青春期男女生身高增长速度呈现如下图规律，由图可以判断，下列说法错误的是：（ ）

- A. 男生在 13 岁时身高增长速度最快
- B. 女生在 10 岁以后身高增长速度放慢
- C. 11 岁时男女生身高增长速度基本相同
- D. 女生身高增长的速度总比男生慢



3、小明今天到学校参加考试，从家里出发走 10 分钟到离家 500 米的地方吃早餐，吃早餐用了 20 分钟；再用 10 分钟赶到离家 1000 米的学校参加考试。下列图象中，能反映这一过程的是（ ）



4、某电视机厂要印制产品宣传材料，甲印刷厂提出：每份材料收 1 元印刷费，另收 1000 元制版费；乙厂提出：每份材料收 2 元印制费，不收制版费。

- (1) 分别写出两厂的收费 y (元) 与印制数量 x (份) 之间的函数关系式；
- (2) 电视机厂拟拿出 3000 元用于印制宣传材料，找哪家印刷厂印制的宣传材料能多一些？
- (3) 印刷数量在什么范围时，在甲厂的印制合算？

第十三讲 正、反比例函数综合运用 1

【知识要点】

1、正、反比例函数的基本概念

我们需要从以下几个方面进行复习：定义，解析式，定义域，图像，性质。

【提高】例 1 如果 z 与 y 成正比例， y 与 x 成反比例，那么 x 与 z _____. (填“成正比例”、“成反比例”或“不成比例”)

2、待定系数法

【提高】例 2 已知 $y = y_1 + y_2$ ，其中 y_1 与 x^2 成正比例， y_2 与 x 成反比例，并且 $x = \frac{1}{2}$ 时， $y = 5$ ； $x = 1$ 时， $y = -1$ ，求 y 与 x 之间的函数关系式。

3、求两函数图像交点的方法

若两函数图像相交，则其交点坐标必分别满足两个函数的解析式，因此求两个函数图像的交点，即求解由这两个函数解析式组成的方程组。

【基础】例 3 设点 $P(2, 3)$ 是正比例函数 $y = k_1x (k_1 \neq 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0)$ 的交点，则此正比例函数的解析式为_____, 反比例函数的解析式为_____.

4、正反比例函数图像的交点

对于正比例函数 $y = k_1x (k_1 \neq 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0)$ 的图像，

(1) 当 $k_1 \cdot k_2 < 0$ 时，没有交点；

(2) 当 $k_1 \cdot k_2 > 0$ 时，有交点，且有两个交点，这两个交点关于原点对称。

典型例题

【提高】★★例4 已知正比例函数 $y=kx$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{5-k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$)

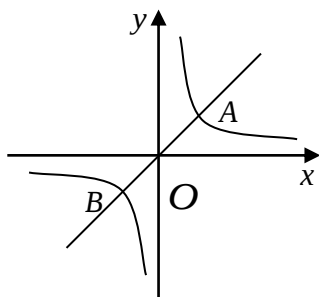
的图象有一个交点的横坐标是 2.

(1) 求两个函数图象的交点坐标.

(2) 若点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是反比例函数 $y=\frac{5-k}{x}$ 图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$,

试比较 y_1 、 y_2 的大小.

【拓展】★★★★例5 如图, 直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点, 那么 $2x_1y_2 - 7x_2y_1$ 的值等于_____.



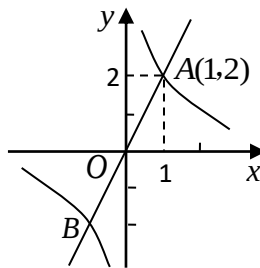
【提高】★★★★例6 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=-x$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到直线 l , 直线 l 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象的一个交点为 $A(a, 3)$, 试确定反比例函数的解析式.

巩固练习 1: 【提高】★★

1、下列各组函数的图像在同一直角坐标平面内没有交点的是 ()

- (A) $y=2x$ 与 $y=2$ (B) $y=\frac{x}{2}$ 和 $y=\frac{2}{x}$ (C) $y=\frac{x}{2}$ 与 $y=-\frac{2}{x}$ (D) $y=2x$ 与 $y=\frac{x}{2}$

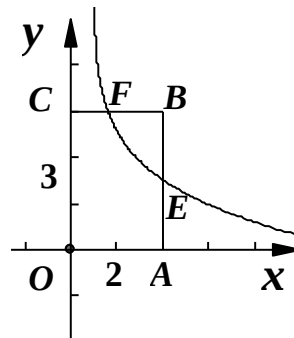
2、如图, 双曲线 $y=\frac{k_1}{x}$ 与直线 $y=k_2x$ 相交于 A 、 B 两点, 如果 A 点的坐标是 $(1, 2)$, 那么 B 点的坐标为_____.



3、已知正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$, $k_1 \cdot k_2 = -1$, 且 $y=k_1x$ 的图象经过点 $(\frac{m}{4}, -\frac{2m}{7})$, 则反比例函数的解析式为_____.

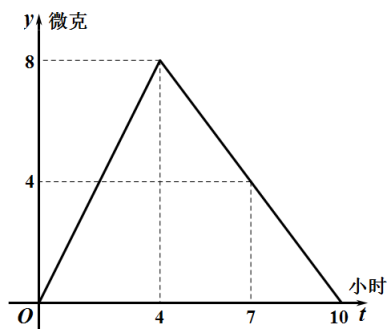
4. ★★★如图，将一个长方形放置在平面直角坐标系中， $OA=2, OC=3$ ， E 是 AB 的中点，反比例函数图像过点 E 且和 BC 相交于点 F 。

- (1) 求直线 OB 和反比例函数的解析式；
(2) 求四边形 $OEBF$ 的面积。



5. ★★★据医学研究，使用某种抗生素治疗心肌炎，人体内每毫升血液中的含药量不少于 4 微克时，治疗有效。如果一患者按规定剂量服用这种抗生素，服用后每毫升血液中的含药量 y (微克) 与服用后的时间 t (小时) 之间的函数关系如图所示：

- (1) 如果上午 9 时服用该药物，到_____时该药物的浓度达到最大值_____微克/毫升；
(2) 根据图像求出服用药物起到药物浓度最高时 y 与 t 之间的函数解析式_____；
(3) 如果上午 9 时服用该药物，从_____时该药物开始有效，有效时间一共是_____小时。



第十四讲 正、反比例函数综合运用 2

【知识要点】

正、反比例函数综合运用的问题中有很多的关于“面积”的问题.

典型例题【提高】

例2 正比例函数的图象经过点 $(4, -2)$, 点 A 在此图象上, 且与点 $P(0, -3)$ 所构成的 $\triangle OPA$ 的面积为 6, 求点 A 的坐标.

例3 已知 $A(-3, 0)$, $B(0, 6)$, 通过原点 O 的直线把 $\triangle AOB$ 分为面积比为 $1:2$ 的两部分, 求这条直线的解析式.

例4 如图, 已知直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 交于 A, B 两点, 且点 A 的横坐标为 4.

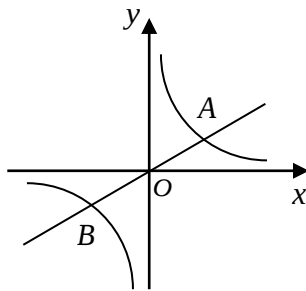
(1) 求 k 的值;

(2) 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 上一点 C 的纵坐标为 8,

求 $\triangle AOC$ 的面积;

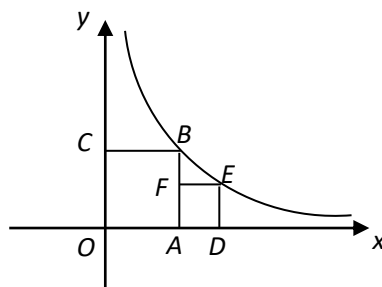
(3) 过原点 O 的另一条直线 l 交双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 于 P, Q 两点 (点 P 在第一象限), 若由点 A, B, P, Q 为

顶点组成的四边形面积为 24, 求点 P 的坐标.



【拓展】★★★★

例5 如图, 如果正方形 $OABC$ 的顶点 B 和正方形 $ADEF$ 的顶点 E 都在函数 $y = \frac{16}{x} (x > 0)$ 的图像上, 求点 E 的坐标.



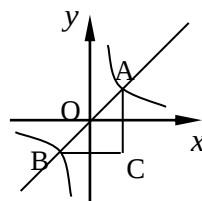
巩固练习: 【提高】★★

1、 已知点 $P(2a, 3b)$, 且 a 与 b 互为相反数, 点 P 到 y 轴作垂线, 垂足为 H , $S_{\triangle POH} = 15$.

(1) 求 OP 所在直线的解析式;

(2) 求 P 点坐标.

2、 如图, 反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象与直线 $y = kx (k > 0)$ 相交于 A 、 B 两点, $AC \parallel y$ 轴, $BC \parallel x$ 轴, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 _____ 个面积单位.

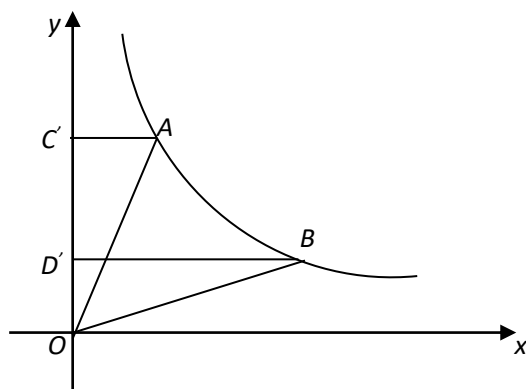


(第 2 题图)

3、 反比例函数图像上有一点 A , $AB \perp x$ 轴于 B , $\triangle AOB$ 的面积为 10, 求反比例函数解析式.

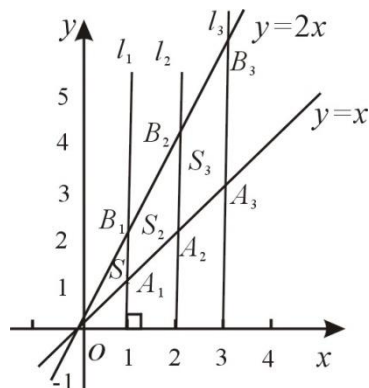
- 4、 正比例函数 $y = kx (k > 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像相交于 A, C 两点, 过点 A 作 x 轴的垂线 AB , 垂足为 B , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

- 5、 ★★★如图, 已知 A, B 两点是反比例函数 ($x > 0$) 的图象上任意两点, 过 A, B 两点分别作 y 轴的垂线, 垂足分别为 C, D , 连结 AB, AO, BO , 探索梯形 $ABDC$ 的面积与 $\triangle ABO$ 的面积的值是多少?



【拓展】★★★★★

- 6、 如图, 直线 $l_1 \perp x$ 轴于点 $(1, 0)$, 直线 $l_2 \perp x$ 轴于点 $(2, 0)$, 直线 $l_3 \perp x$ 轴于点 $(3, 0)$, ... 直线 $l_n \perp x$ 轴于点 $(n, 0)$. 函数 $y = x$ 的图象与直线 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 分别交于点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$; 函数 $y = 2x$ 的图象与直线 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 分别交于点 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$. 如果 $\triangle OA_1B_1$ 的面积记作 S_1 , 四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积记作 S_2 , 四边形 $A_2A_3B_3B_2$ 的面积记作 $S_3, \dots$ 四边形 $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ 的面积记作 S_n , 那么 $S_{2011} =$ _____.



第十六讲 综合测试训练

- 1、化简 $\sqrt{\frac{4}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 2、使 $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ 有意义的 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 3、方程 $\sqrt{2x-1} = x$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 4、方程 $x^2 + 6x + 9 = 0$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 5、直线 $y = 2x - 1$ 向下平移 3 个单位得到的直线解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 6、当 $x < 0$ 时，反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 中函数值 y 随着自变量 x 的增大而 $\underline{\hspace{2cm}}$. (填入“增大”或“减少”)
- 7、已知一次函数 $y = \frac{1}{2}x - 1$ ，当 $x < 2$ 时 y 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 8、关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - x - m^2 = 0$ 有一个根是 -1 ，则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 9、将方程 $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 = 0$ 分解为两个二元一次方程得： $\underline{\hspace{2cm}}$ 和 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择

- 10、一次函数 $y = (2-k)x + k + 1$ 的图像不经过第二象限，则 k 的取值范围是 $\dots$ ()
A. $k \leq -1$; B. $k < -1$; C. $-1 \leq k < 2$; D. $-1 < k < 2$.
- 11、若方程 $mx^2 - (m+2)x + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是 ()
A. $m > 2$; B. $0 < m < 2$; C. $m \neq 2$; D. $m \neq 2$ 且 $m \neq 0$.

三、简答题

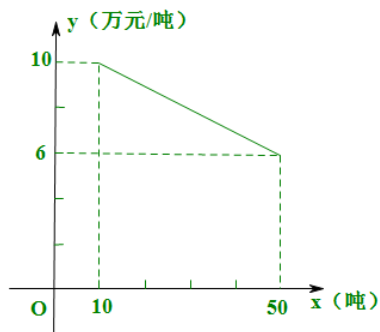
- 12、计算： $(3\sqrt{18} + \frac{1}{5}\sqrt{50} - 3\sqrt{8}) \div \sqrt{32}$
- 13、关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m-1)x + 2m-1 = 0$ ，其判别式的值为 1，求 m 的值及方程的根.

14. 某工厂生产一种产品，当生产数量至少为 10 吨，但不超过 50 吨时，每吨的成本 y （万元/吨）与生产数量 x （吨）的函数关系式如图所示.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域；

(2) 当生产这种产品的总成本为 280 万元时，求该产品的生产数量.

(注：总成本=每吨的成本 $\times$ 生产数量)



四、 解答题

15. 某超市进了一批成本为 6 元/个的文具. 调查后发现：这种文具每周的销售量 y （个）与销售价 x （元/个）之间的关系满足一次函数关系，如下表所示：

销售价 x （元/个）	8	9.5	11	14
销售量 y （个）	220	205	190	160

(1) 求 y 与 x 之间的函数解析式（不必写出定义域）；

(2) 已知该超市这种文具每周的销售量不少于 60 个，若该超市某周销售这种文具（不考虑其它因素）的利润为 800 元，求该周每个文具的销售价.