

初三数学 新编教案

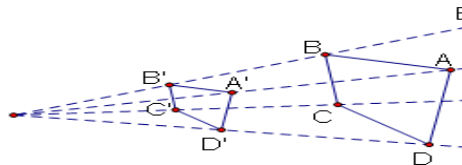
目 录

第一讲	相似形及比例线段 24.1~24.2	2
第二讲	三角形一边的平行线 24.3	8
第三讲	相似三角形的判定 24.4 (1)(2)(3)	14
第四讲	相似三角形的判定 24.4 (4)(5)	20
第五讲	相似三角形的性质 24.5 (1)(2)	25
第六讲	相似三角形的性质	32
第八讲	锐角三角比的意义	35
第九讲	求锐角三角的值	39
第十讲	解直角三角形	42
第十一讲	解直角三角形	46
第十二讲	二次函数 26.1~26.2 (3)	51
第十三讲	二次函数 26.3 (1)(2)	54
第十四讲	二次函数 26.3 (3)(4)(5)	57
第十六讲	二次函数 26.3 (6)(7)	60

第一讲 相似形及比例线段 24.1~24.2

【知识梳理】

1. 相似形：_____ 的两个图形



2. 相似多边形的性质：

如果两个多边形是相似形，那么这两个多边形的对应角_____，对应边的长度_____

3. 线段的比

两条线段长度的比叫做两条线段的比.

注意：

- 1) 求两条线段的比时，对这两条线段一定要用同一长度单位来度量.
- 2) 因为线段的长度是正数，所以两条线段的比值总是正数.

4. 比例线段

在四条线段 a 、 b 、 c 、 d 中，如果其中两条线段的比与另两条线段的比相等， $a:b=c:d$

(或 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$)，那么 这四条线段 a 、 b 、 c 、 d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**.

线段 a 、 d 是比例外项，线段 b 、 c 是比例内项.

5. 比例的基本性质：两个外项的积等于两个内项的积. 即如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么 $ad = bc$.

如果 $ad = bc$ ，那么一定能得到 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

6. 比例的合比性质：如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么_____①

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么_____②

7. 比例的等比性质：如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么 $\frac{a+c}{b+d} =$ _____.

8. 黄金分割的概念

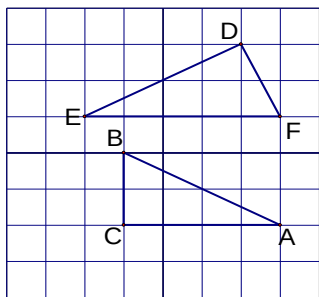
如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB ($AP > PB$) 两段，其中 AP 是 AB 和 PB 的比例中项，那么称这种分割为黄金分割，点 P 称为线段 AB 的黄金分割点， AP 与 AB 的比值为 _____，近似值为 _____，这个比值称做黄金分割数 (简称黄金数).

一条线段的黄金分割点有 _____ 个

【基础练习】(★第 1-13 题，★★第 14-18 题，★★★第 19-20 题)

一、填空题：

- 1、如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是否相似？_____；如果相似，请写出顶点 F 的对应顶点是_____； $\angle D$ 的对应角是_____； DE 的对应边是_____



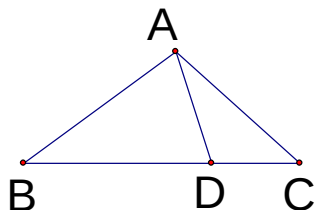
- 2、 $\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，则三边 $a : b : c =$ _____
- 3、若 $a : b = 3 : 2$ ， b 是 a 、 c 比例中项，则 $c : b =$ _____
- 4、已知线段长为 3 和 6，它们的比例中项是_____
- 5、如果 $a : b = c : d = 2 : 3$ ，那么 $(a+c) : (c+d) =$ _____
- 6、在比例尺为 200:1 的图纸上，量出某零件的长度是 50 cm，这个零件的实际长度是_____ cm
- 7、已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ，则 $\frac{x-y+3z}{3x-y} =$ _____.
- 8、已知 $\triangle ABC$ 的三边 $a=2$ ， $b=4$ ， $c=3$ ，那么三边上的高 $h_a : h_b : h_c =$ _____.
- 9、在比例尺为 1:20 的图纸上，零件的直径是 1 毫米，现要改画到比例尺为 10:1 的图纸上，这个零件的直径放大为_____毫米
- 10、如果三角形三边之比为 2:3:4，那么这三边上的高有小到大的比是_____
- 11、已知等腰梯形的两底长分别为 4cm 和 6cm，将它的两腰分别延长 3cm 后可相交，那么此等腰梯形的腰长是_____cm.
- 12、在 $Rt\triangle ABC$ 中，两直角边长分别为 3、4， G 是重心，那么点 G 到斜边中点的距离为_____
- 13、 $\triangle ABC$ 的重心为 G ，中线 AD ， $S_{\triangle AGC} : S_{\triangle ABC} =$ _____

二、解答题：

- 14、已知 $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8}$ 且 $3a - 2b + c = 9$ ，求 $2a + 4b - 3c$ 的值。

- 15、线段 AB 长为 6 厘米，它的中点为 C ，且 $AD^2 = AB \times BD$ ，求 CD 的长度。

16、已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D为边BC边上一点， $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle ADC$ 面积的比例中项，且BC=6厘米，求CD的长。



17、在等腰直角三角形ABC中， $\angle ACB=90^\circ$ ，高CD与中线AE交于点F，如果腰长为 $6\sqrt{2}$ ，求EF的长。

18、平行于 $\triangle ABC$ 的边BC的直线DE截直线AB、AC所成三角形是 $\triangle ADE$ ，D在直线AB上，E在直线AC上， $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的面积比是1:4，求AD:DB的值

19、过 $\triangle ABC$ 的重心G作 $DE \parallel AB$ ，交BC于D，交AC于E，联结AD，求 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADE$ 的面积比。

20、正方形ABCD中，E、F分别为AB、AD的中点，BF交DE于点G，求 $\frac{FG}{GB}$ 的值。

【拓展提高】(★第1-5题，★★第6-9题，★★★第10-11题，★★★★第12-13题，★★★★★第14-15题)

1、已知 $k = \frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{c+a}$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、在下列图形中，相似的图形有----- ()

(1) 两个等腰三角形 (2) 两边长为 1: 2 的两个矩形

(3) 两边长为 1: 2 的两个等腰三角形 (4) 两边长为 1: 2 的两个菱形

A 都是 B (2) (3) (4) C (2) (3) D (2) (4)

3、在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在 AB、AC 上, 下列比例式中能够判断 $DE \parallel BC$ 的是 ()

A、 $DE:BC=AD:BD$; B、 $DE:BC=AD:AB$; C、 $AD:AE=AC:AB$; D、 $DB:EC=AB:AC$ 。

4、下列命题中的假命题是 ()

A、如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例, 那么这条直线平行于三角形的第三边。

B、如果一条直线截三角形的两边延长线所得的对应线段成比例, 那么这条直线平行于三角形的第三边。

C、一组直线截两条直线, 所得的线段对应成比例, 那么这组直线平行。

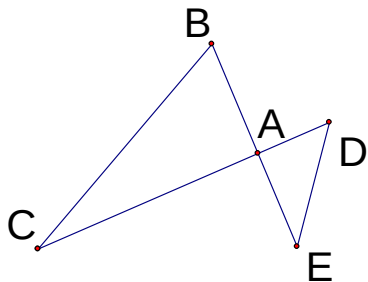
D、一条直线与梯形的两腰相交, 两腰上的四条线段对应成比例, 那么这条直线与梯形的底边平行。

5、直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 两直线 AC 和 DF 与 l_1, l_2, l_3 分别相交于点 A, B, C 和点 D, E, F。下

列各式中, 不一定成立的是 ()

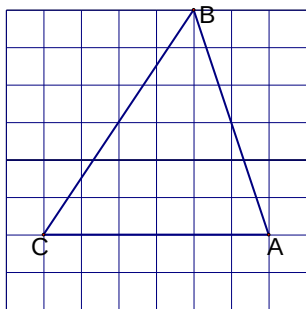
A、 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$; B、 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$; C、 $\frac{AD}{BE} = \frac{BE}{CF}$; D、 $\frac{EF}{FD} = \frac{BC}{CA}$ 。

6、已知: 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 相似, $AE=50\text{cm}$, $AC=60\text{cm}$, $BC=120\text{cm}$, $\angle BAC=85^\circ$, $\angle ACB=40^\circ$, $\angle B=\angle D$, 求 (1) $\angle AED$ 和 $\angle ADE$ 的度数; (2) DE 的长。

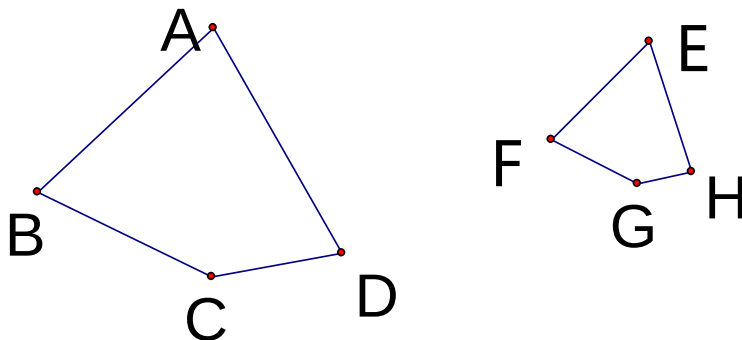


7、已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 且 A 与 D、B 与 E、C 与 F 是对应顶点, 若 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=5\text{cm}$, $AC=6\text{cm}$, $BC=9\text{cm}$, 而 $DE=4\text{cm}$, 你能求出 $\triangle DEF$ 另外两边的长度吗? 试说明理由。

8、在下列方格图中画出 $\triangle ABC$ 的一个与它不全等的相似三角形。

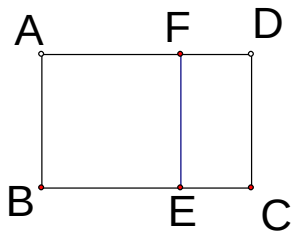


9、如图，四边形A B C D与四边形E F G H是相似的图形，点A与点E、点B与点F、点C与点G、点D与点H分别是对应顶点，已知 $BC=3$ ， $CD=2.4$ ， $EF=2.2$ ， $FG=2$ ， $\angle C=110$ 度， $\angle D=90$ 度， $\angle A=70$ 度，求边AB、GH的长和 $\angle E$ 的度数。

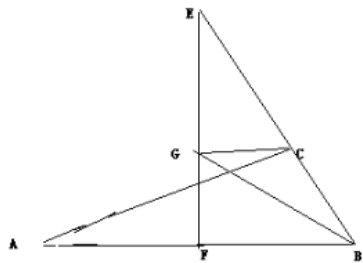


10、已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ ，且 $2x-3y+z=6$ ，求k的值。

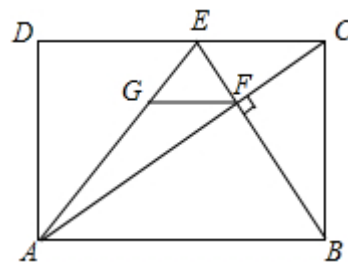
11、已知：如图，矩形ABCD的边上有点E、F，四边形ABEF是正方形，且矩形ABCD和矩形CDFE相似，求出AB：AD的值。



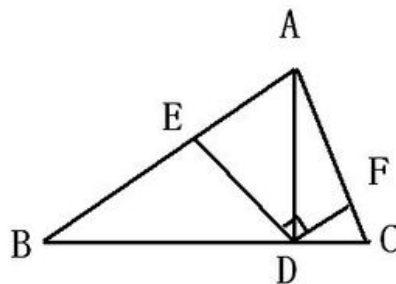
12. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 点 E 是 BC 的延长线上的一点, 且 $EF \perp AB$ 于点 F, $\angle CGB = \angle A$. 求证 $CG \cdot BE = EG \cdot BG$



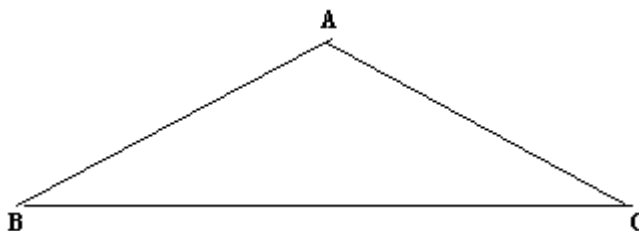
13. 如图, 在矩形 ABCD 中, E 是 CD 的中点, $BE \perp AC$ 交 AC 于 F, 过 F 作 $FG \parallel AB$ 交 AE 于 G, 求证: $AG^2 = AF \cdot FC$



14. 如图, AD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的高, $DE \perp DF$, 且 DE 和 DF 分别交 AB、AC 于点 E、F, 求证: $\frac{AF}{BE} = \frac{AD}{BD}$



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $\angle BAC=108^\circ$, 求 BC 长。



第二讲 三角形一边的平行线 24.3

【知识梳理】

1. 三角形一边的平行线性质的定理：平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例。

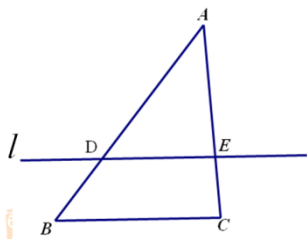


图 (1):

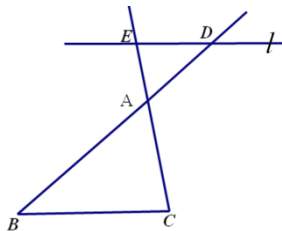


图 (2):

$\therefore$ _____

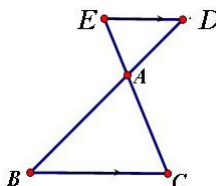
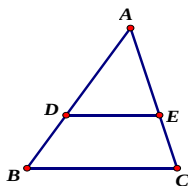
$\therefore$ _____

$\therefore$ _____

$\therefore$ _____

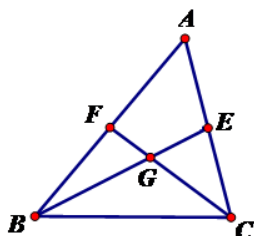
2. 三角形一边的平行线性质的推论：

平行于三角形一边的直线截其它两边所在的直线，截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例。

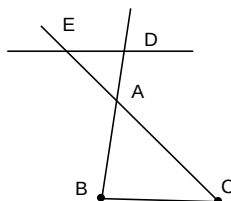
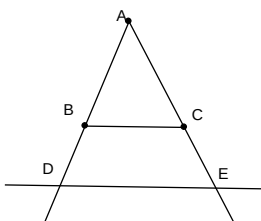


3. 三角形的三条中线交于一点. 三角形三条中线的交点叫做三角形的重心.

三角形重心定理：_____



4. 三角形一边的平行线判定定理推论：_____

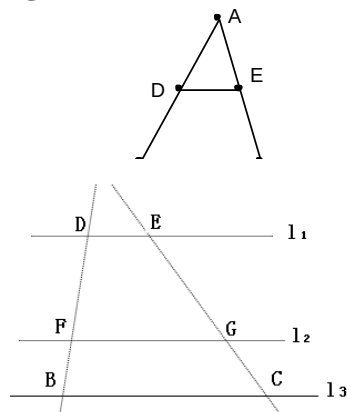


议一议：如图，点 D, E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上，如果 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ ，

那么能否得到 $DE \parallel BC$ ，为什么？

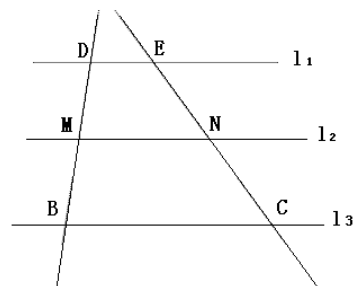
5. 平行线分线段成比例定理：_____

用符号语言表示：



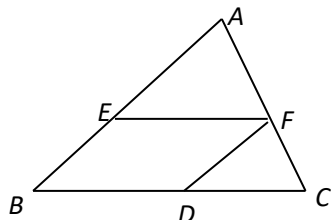
6. 平行线等分线段定理：_____

用符号语言表示：

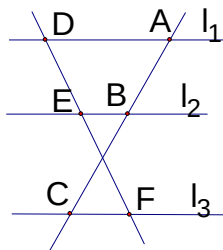


【基础练习】(★第 1-5 题，★★第 6-8 题，★★★第 9-10 题)

1、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $EF \parallel BC$ ， $FD \parallel AB$ ， $AE=18$ ， $BE=12$ ， $CD=14$ ，则 $BD=$ _____.

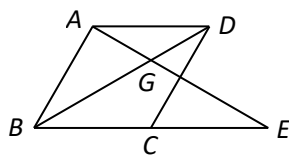


2、如图， $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ， $AB=2$ ， $AC=6$ ， $EF=3$ ，则 $DE=$ _____



3、梯形 $ABCD$ 中， E, F 分别在 AD, BC 上， $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $DC=2$ ， $AB=5$ ， $DE:EA=1:2$ ，则 $EF=$ _____

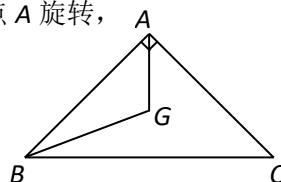
- 4、如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ ， $AE \perp AB$ ，交 BD 于点 G ，交 BC 的延长线于点 E ，



则 $\frac{DG}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

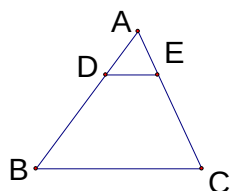
- 5、在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，两直角边长分别为 3、4， G 是重心，那么点 G 到斜边中点的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$

- 6、如图，点 G 是腰长为 1cm 的等腰直角三角形 ABC 的重心，把 $\triangle ABG$ 绕点 A 旋转，使点 B 与点 C 重合，此时，点 G 转到点 G' 处，那么 $S_{\triangle AGG'}$



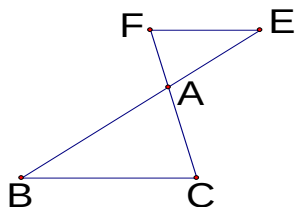
$= \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$.

- 7、如图， DE 分别与 AB 、 AC 的交于点 D 、 E ， $AD=3$ ， $AB=9$ ， $AE=2$ ， $EC=4$ ，

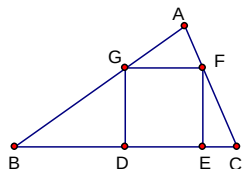


问： DE 与 BC 平行吗？

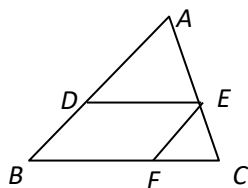
- 8、已知：如图，在 $\triangle ABC$ 的延长线上由两点 E 、 F ， $EF \parallel BC$ ， $5 AB=8 AC$ ， $AF=3$ ，求 AE 的长度。



- 9、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=BC=2$ ， $\angle B=45^\circ$ ，四边形 $DEFG$ 是它的内接正方形，求 $S_{\text{正方形} DEF}$ 。



- 10、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ，求证： $\frac{DE}{BC} + \frac{EF}{AB} = 1$.

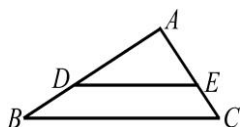


【拓展提高】(★第 1-2 题, ★★第 3-5 题, ★★★第 6-7 题, ★★★★★第 8-9 题, ★★★★★

★★第 10-11 题)

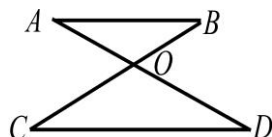
1、已知如图, $AD:BD=AE:EC$, 求证:

(1) $AD:AB=AE:AC$; (2) $BD:AB=CE:AC$;



2、已知如图, $AO \times OC = OB \times OD$, 求证:

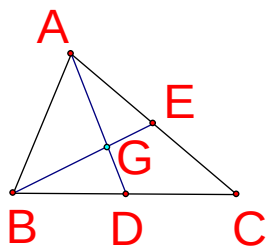
(1) $AO \times BC = OB \times AD$; (2) $AD \times OC = BC \times OD$



3、 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, F 为 BC 边上的一点, $BF:FD=5:1$, 求 $BF:FC$ 的值.

4、点 C 在直线 AB 上, $2CB=AB$, 求 $AC:BC$ 的值。

5、 G 为 $\triangle ABC$ 重心, 且 $AD \perp BE$, $AC=6$, $BC=7$, 求: AB 的长。

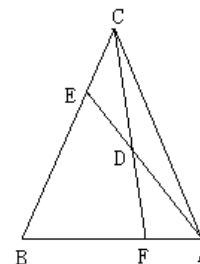


6、如图， $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$ ， F 为底边 AB 上的一点， $\frac{BF}{AF} = \frac{m}{n}$ ($m, n > 0$)，取 CF 的中点 D ，连结 AD 并延长交 BC 于 E 。

1) 求 $\frac{BE}{EC}$ 的值 (用含 m, n 的代数式表示)；

2) 如果 $BE=2EC$ ，那么 CF 所在直线与边 AB 有怎样的位置关系？证明你的结论；

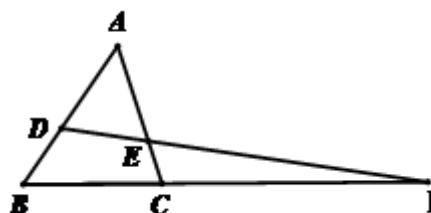
3) E 点能否为 BC 中点？如果能，求出相应的 $\frac{m}{n}$ 值，如果不能，证明你的结论。



7、在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 的中点， M 是 AD 上一点， BM, CM 的延长线分别交 AC, AB 于 F, E 。求证： $EF \parallel BC$ 。

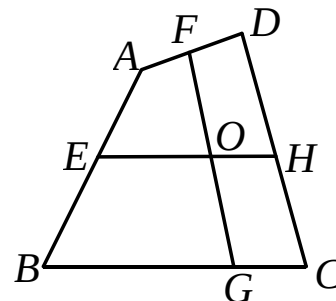
8、如图，已知 $BF:FC=3:1$ ， G 是 AF 的中点， BG 的延长线交 AC 于点 E 。求： $\frac{BG}{BE}$ 。

9、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD=AE$ ，求证： $\frac{BF}{CF} = \frac{BD}{CE}$ 。

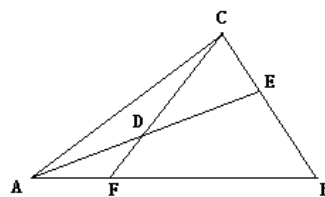


10、如图，E、G、H、F 分别是四边形 ABCD 各边上的点，且 $AE \cdot FD = EB \cdot AF$ ， $BG \cdot HC = GC \cdot DH$ ，联结 EH、GF 相交于 O。

求证： $EO \cdot GO = FO \cdot OH$ 。



11、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BF=3AF$ ， $CD=2DF$ ，求证： $BE=2EC$

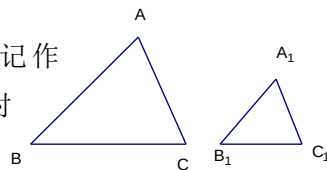


第三讲 相似三角形的判定 24.4 (1) (2) (3)

【知识梳理】

1. 相似三角形的表示方法:

$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ 是相似三角形, 则 $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ 相似可记作 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. 读作: $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle A_1B_1C_1$. 点 A 与点 A_1 对应, 点 B 与点 B_1 对应, 点 C 与点 C_1 对应.



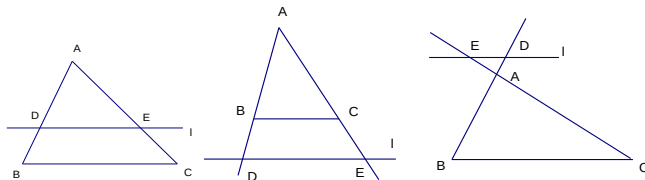
2. 两个相似三角形的对应边的比 k , 叫做这两个相似三角形的相似比 (或相似系数)

注意: 两个相似三角形的相似比与表述这两个三角形相似的顺序有关.

3. 当两个相似三角形的相似比 $k=1$, 这两个相似三角形有怎样的关系? _____

4. 三角形相似的传递性: 如果两个三角形分别与同一个三角形相似, 那么这两个三角形也相似.

5. 相似三角形的预备定理: 平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线, 截得的三角形与原三角形相似.



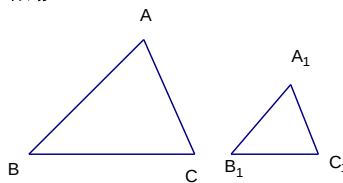
符号表达: $\because$ _____ $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$.

6. 相似三角形的判定定理 1 (两角对应相等, 两个三角形相似).

符号语言:

$\because$ _____

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

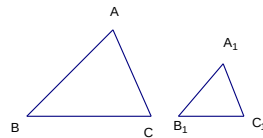


7. 相似三角形的判定定理 2: 如果一个三角形的两边与另一个三角形的两边 _____, 并且 _____, 那么这两个三角形相似.

简述为: 两边对应成比例且夹角相等, 两个三角形相似.

符号语言: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中 _____

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

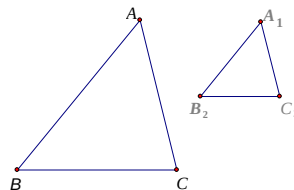


8. 相似三角形的判定定理 3: 如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边 _____ 那么这两个三角形相似. 简述为: 三边对应成比例, 两个三角形相似.

符号语言: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中

$\because$ _____

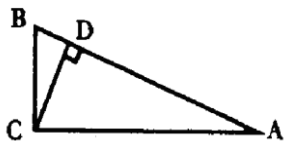
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



【基础练习】(★第 1-7 题, ★★第 8-11 题, ★★★第 12-14 题)

1、若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 k , 则 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 _____。

2、如图下左图， $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，若 $AB=10$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 15，则 $CD=$ 。



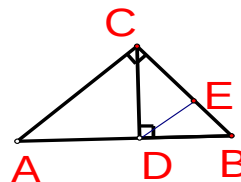
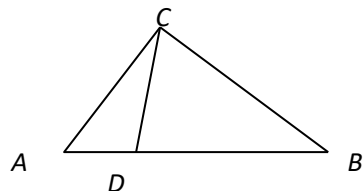
3、三角形的三条中位线组成的三角形与原三角形相似的判定方法可以是_____。

4、在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 和 $\text{Rt} \triangle DEF$ 中， $\angle C = \angle F = 90^\circ$ 。依据下列各组条件判定这两个三角形是否相似？并说明理由。

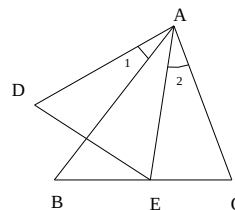
- (1) $\angle A=55^\circ$ ， $\angle D=35^\circ$ ；_____
- (2) $AC=9$ ， $BC=12$ ， $DF=6$ ， $EF=8$ ；_____
- (3) $AC=3$ ， $BC=4$ ， $DF=6$ ， $DE=8$ ；_____
- (4) $AB=10$ ， $AC=8$ ， $DE=15$ ， $EF=9$ 。_____

5、已知在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=3\text{cm}$ ， $AC=4\text{cm}$ ，点 M 、 N 分别在边 AC 、 AB 上，将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 对折后，点 A 正好落在对边 BC 上，且折痕 MN 截 $\triangle ABC$ 所成的小三角形（即对折后的重叠部分）与 $\triangle ABC$ 相似，则折痕 MN 的长为_____cm。

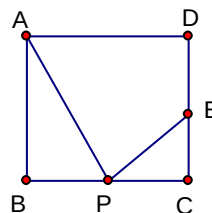
6、如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $DE \perp BC$ ，与 $\triangle ADC$ 相似的三角形有_____个



8、如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$ ，再增加一个条件_____可以得到结论 “ $AB \cdot DE = AD \cdot BC$ ”。



9、如图， $ABCD$ 是正方形， E 是 CD 的中点， P 是 BC 边上一点，下列条件中，能推出 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ECP$ 相似的是（ ）



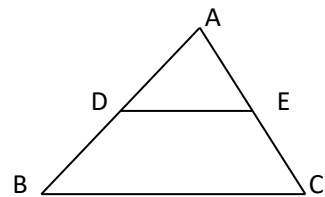
A、 $\angle APB = \angle EPC$ ； B、 $\angle APE = 90^\circ$ ； C、 P 是 BC 的中点； D、 $BP:BC=2:3$ 。

10、依据下列各组条件，判定 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 是不是相似,并说明为什么?

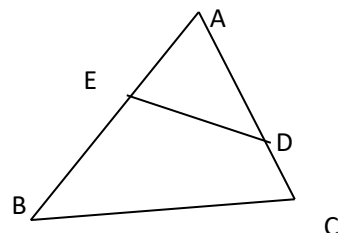
- (1) $AB=4, BC=6, A'B'=12, B'C'=18, AC=3A'C'$;
- (2) $AB=1, BC=2, AC=\sqrt{3}, A'B'=2\sqrt{3}, B'C'=2, A'C'=4$;
- (3) $AB=4, BC=4\sqrt{3}, AC=8, A'B'=2B'C', \angle C'=90^\circ$.

11、根据下列给出的条件，写出各组相似三角形的对应角和对应边的比例式。

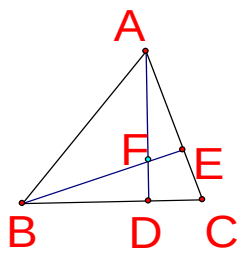
- (1) 如图， $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 其中 $DE \parallel BC$ 。



- (2) 如图， $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，其中 $\angle B = \angle ADE$ 。

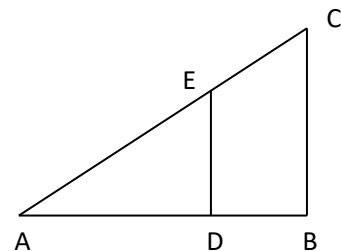


12、如图， $\triangle ABC$ 两高 AD 、 BE 交于点 F ，求证： $AF:CB = EF:EC$ 。证明 $\triangle AEF \sim \triangle BEC$;

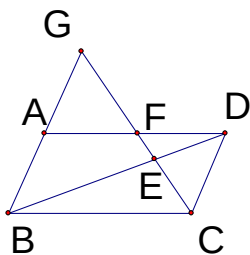


13、如图： $BC \parallel DE$ ， $AE=50\text{cm}$ ， $EC=30\text{cm}$ ， $BC=70\text{cm}$ ， $\angle BAC=45^\circ$ ，
 $\angle ACB=40^\circ$ 。

- (1) 求 $\angle AED$ 和 $\angle ADE$ 的度数。
- (2) 求 DE 的长。

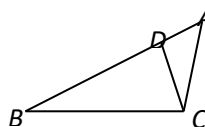


14、如图，在平行四边形 ABCD 中，CG 分别与 AB 延长线、AD、BD 交于点 G、F、E，问：图中有哪几对相似三角形？请一一写出，不必写出理由。

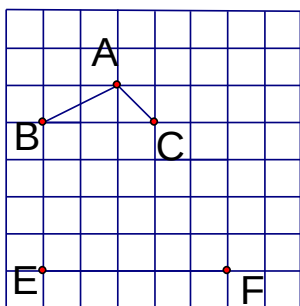


【拓展提高】(★第 1-2 题，★★第 3-4 题，★★★第 5-6 题，★★★★第 7-8 题，★★★★★第 9-10 题)

1、如图，已知 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点，且 $\angle ACD = \angle B$ ， $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle DBC} = 1 : 3$ 。求 $\frac{AC}{AB}$ 的值。



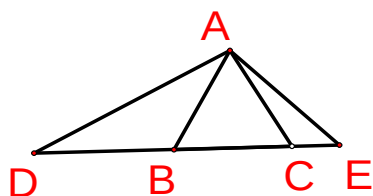
2、在格子图中，画出 $\angle DEF$ 与 $\angle ABC$ 相似，且点 D 在格子点上。



3、 $\triangle ABC$ 中， $AC=9$ ， $AB=8$ ， $BC=6$ ， $DE \parallel BC$ 交 AC 于 D ， AB 于 E ，联结 BD ，且 $\angle BCD$ 与 $\angle ADE$ 相似，求 (1) CD 的长；(2) BD 的长

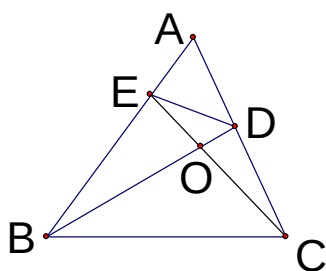
4、如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，D、B、C、E 在一条直线上， $\angle DAE=120^\circ$

求证：(1) $BC^2 = BD \cdot CE$ (2) $AD^2 : AE^2 = BD : CE$



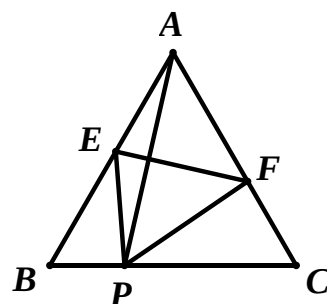
5、如图，DE 分别与 AB、AC 交于点 D、E，CE、BD 交于点 O，OD=1，OC=1.5，OB=3，OE=2，

(1) 求证： $\triangle COD \sim \triangle BOE$ (2) 图中还有哪些相似三角形？



6、梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAC=90^\circ$ 度， $AD=2$ ， $BC=8$ ， $AC=4$ ，求 $\angle D$ 的度数

7、如图，等边 $\triangle ABC$ ，P 是边 BC 上任意一点（不与 B、C 重合），联结 AP，线段 AP 的垂直平分线交 AB、AC 于点 E、F，联结 PE、PF。求证： $BE \cdot CF = BP \cdot PC$ 。

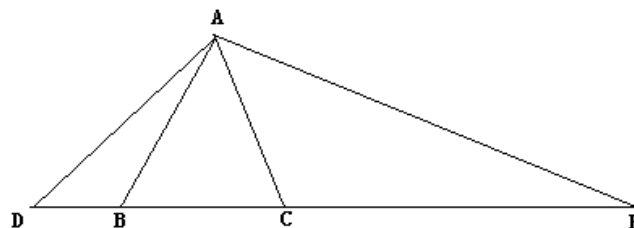


8、在 $\triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $AC=8$ ，D 在 AB 上且 $AD=2$ ，E 在 AC 上。若 $\triangle AED$ 与 $\triangle ACB$ 相似，求 AE 的长。

9、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点D、E是直线BC上的点，且满足 $AB^2 = DB \cdot CE$

(1) 求证： $\triangle ADB \sim \triangle EAC$ ；

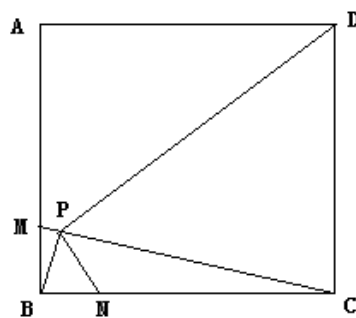
(2) 若 $\angle BAC=50^\circ$ ，求 $\angle DAE$ 的度数。



10、在正方形ABCD中，M、N分别是AB、BC上的点， $BM=BN$ ， $BP \perp CM$ 于点P，求证：

(1) $\triangle PBN \sim \triangle PCD$ ；

(2) $PN \perp PD$



第四讲 相似三角形的判定 24.4 (4) (5)

【知识梳理】

1. 直角三角形相似的判定定理:

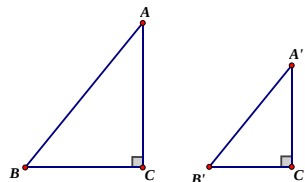
如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应成比例, 那么这两个直角三角形相似.

简述为: 斜边和直角边对应成比例, 两个直角三角形相似.

符号语言:

$\because$ _____
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

2. 相似三角形的定义



3. 相似三角形的判定

【基础练习】(★第 1-5 题, ★★第 9-12 题, ★★★第 13-15 题)

一、填空题:

1、在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $AD:DB=2:3$, $AC:BC=$ _____.

2、判断下列三角形是否相似, 把相似的三角形填在横线上, _____

(1) 两个全等三角形 (2) 两个直角三角形 (3) 两个等腰三角形

(4) 两个等腰直角三角形 (5) 两个等边三角形

二、选择题:

3、 AD 是 $\triangle ABC$ 的高, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F , 则以下四个结论:

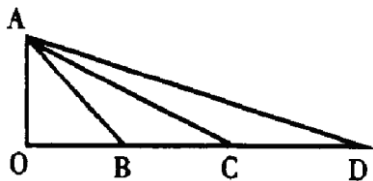
① $AD^2=AE \cdot AB$; ② $AD^2=BD \cdot CD$; ③ $AF \cdot AC=AD^2$; ④ $AC^2=AD^2+CF \cdot CA$ 中, 正确的有()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

4、 $\text{Rt} \triangle ABC$, $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $DE \perp BC$ 于 E , 则图中相似三角形的对数有()

A. 4 对 B. 6 对 C. 9 对 D. 10 对

5、如图, 已知 $\angle AOD=90^\circ$, $OA=OB=BC=CD$, 那么下列结论成立的是()



A. $\triangle OAB \sim \triangle OCA$; B. $\triangle OAB \sim \triangle ODA$;
 C. $\triangle BAC \sim \triangle BDA$; D. 以上结论都不对

6、下列命题中的假命题是()

A、有一个锐角相等的两个直角三角形相似;

B、在两个三角形中, 如果两边和第三边上的高对应成比例, 则这两个三角形相似;

C、有一个角等于 100° 的两个等腰三角形相似;

D、有一个角等于 60° 的两个平行四边形相似。

7、矩形 ABCD 中，AB=2，BC=5，点 P 在 BC 上，若 $\angle ABP$ 与 $\angle PCD$ 相似但不全等，则满足的条件不可以是（ ）

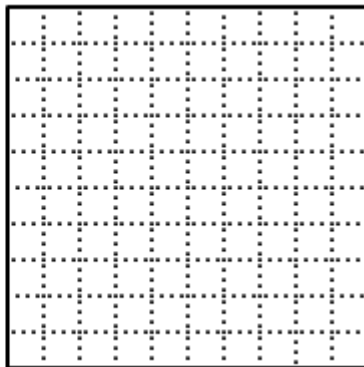
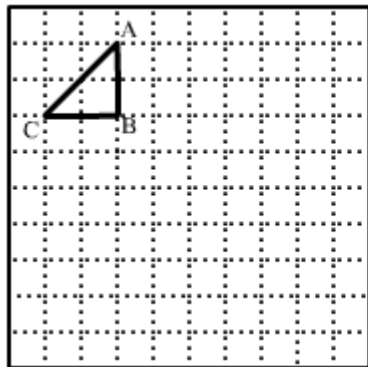
A $\angle APD=90^\circ$ B BP=1 C BP=4 D $\angle BAP=\angle PDC$

三、解答题：

8、已知， $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ，且 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3，6，8，而 $\triangle ABC$ 的最小边长为 9cm，求 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长是多少？

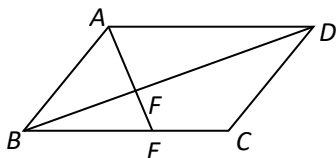
9、求证：直角三角形被斜边上的高分成的两个直三角形的与原三角形相似

10、如图是一个 10×10 格点正方形组成的网格. $\triangle ABC$ 是格点三角形(顶点在网格交点处), 在下列图中各画一个与 $\triangle ABC$ 相似的格点 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$, 且 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是 2, $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。



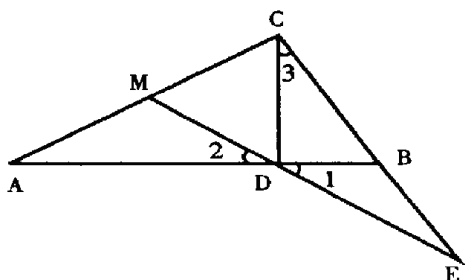
11、在 $\triangle ABC$ 中，AB=6，BC=8，CA=7，延长 CA 到 P，使 $\triangle PBC \sim \triangle PAB$ ，求 AP 的长。

12、如图，在平行四边形 ABCD 中， $\triangle ABE \sim \triangle BEF$ ，求证： $\triangle ABF \sim \triangle ABD$ 。

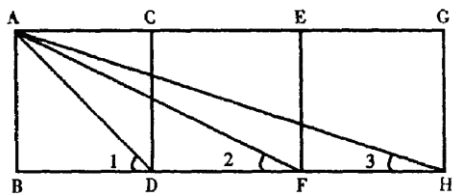


1 3、已知如图，在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，

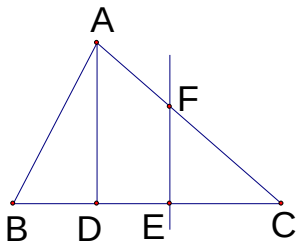
D 为垂足，M 是 AC 的中点，MD 交 CB 的延长线于点 E，求证： $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AC}$ 。



1 4、如图，已知四边形 ABDC，DCEF，EFHG 都是正方形，求证 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ 。



1 5、如图，AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的高，BC 边的垂直平分线分别交 BC 于 E，AC 于 F， $BC=42$ ， $CD=27$ ， $AC=45$ ，求 CF 的长

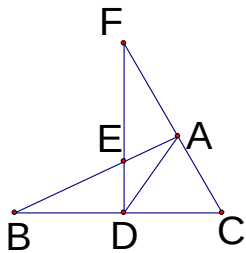


【拓展提高】(★第 1-2 题，★★第 3-5 题，★★★第 6-7 题，★★★★第 8-10 题，★★★★★第 11-12 题)

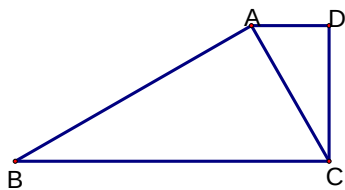
1、 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， $AC=4$ ， $\angle A=90^\circ$ ，D 是 AB 边的中点，点 E 在直线 AC 上， $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，求 CE 的长。

2、 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=2$ ， $AB=4$ ，D 为 AB 中点， $DE \perp AB$ 交 AC 于 E，求 DE 的长。

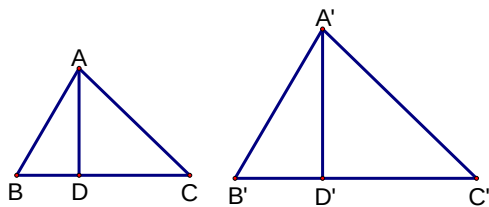
- 3、如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，D 为 BC 中点，过 D 作 BC 的垂线交 AB 于 E，交 CA 延长线于 F，求证： $AD^2=DE \times DF$



- 4、已知：如图，在四边形 ABCD 中， $\angle BAC=\angle ADC=90^\circ$ ， $AD=3$ ， $BC=27$ ， $AC=9$ 。
求证： $DC \perp BC$ 。



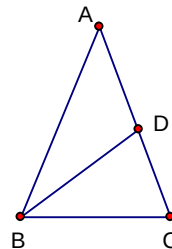
- 5、已知：如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $AD \perp BC$ ， $A'D' \perp B'C'$ ，垂足 D、D' 分别在边 BC、B'C' 上，
且 $AB:A'B'=AD:A'D'=AC:A'C'$ 。
求证： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。



- 6、已知：如图 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=72^\circ$ ， $\angle BAC=36^\circ$ ，BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 D。

求（1）写出图中所有的等腰三角形。

（2） $\frac{BC}{AB}$ 的值



7、如图，在平行四边形 ABCD 中， $\angle DBC=45^\circ$ ， $DE \perp BC$ 于 E， $BF \perp CD$ 于 F，DE、BF 相交于点 H，BF 与 AD 的延长线交于点 G。

求证：（1） $AB=BH$ ；

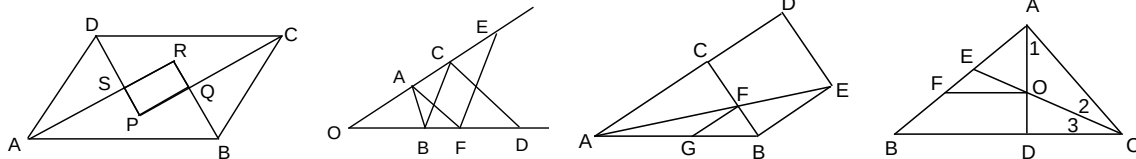
（2） $AB^2=AG \cdot HE$ 。

8、已知：如图 E、F 分别是正方形 ABCD 的边 AB 和 AD 上的点，且 $\frac{EB}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{1}{3}$ 。求证： $\angle AEF = \angle FBD$

9、平行四边形 ABCD，AR、BR、CP、DP 为四角的平分线，求证： $SQ \parallel AB$ ， $RP \parallel BC$

10、已知 A、C、E 和 B、F、D 分别是 $\angle O$ 的两边上的点，且 $AB \parallel ED$ ， $BC \parallel FE$ ，求证： $AF \parallel CD$

11、直角三角形 ABC 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，BCDE 是正方形，AE 交 BC 于 F， $FG \parallel AC$ 交 AB 于 G，求证： $FC=FG$



12、Rt $\triangle ABC$ 锐角 C 的平分线交 AB 于 E，交斜边上的高 AD 于 O，过 O 引 BC 的平行线交 AB 于 F，求证： $AE=BF$

第五讲 相似三角形的性质 24.5 (1) (2)

【知识梳理】

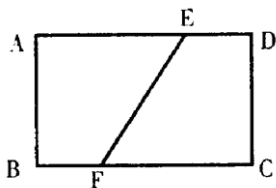
相似三角形的性质定理 1: 两个相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比等于相似比。

相似三角形的性质定理 2: 相似三角形周长的比等于_____

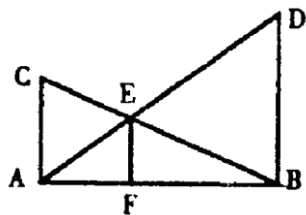
相似三角形的性质定理 3: 相似三角形面积的比等于_____

【基础练习】(★第 1-5 题, ★★第 6-10 题, ★★★第 11-14 题)

1、如图, 在矩形 ABCD 中, $AB=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$, 若将矩形折叠使 A 点与 C 点重合, 则折痕 EF=_____cm.



2、如图, $AC \parallel EF \parallel DB$, AD 和 BC 相交于 E, 已知 $AC=20$, $BD=30$, 则 EF 的长为_____.

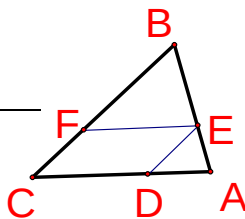


3、如果两个相似三角形的最大边长分别为 4cm 和 6cm , 较小的三角形的周长 12cm , 那么较大的三角形的周长为_____cm.

4、两相似三角形的面积之比是 $4:9$, 那么它们的相似比是_____

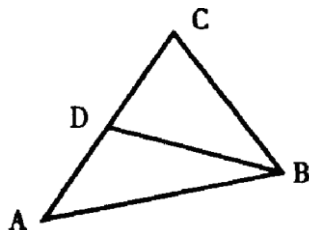
5、如图, $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $EF \parallel AC$, $AE:BE=2:5$, $AC=5$,

则 $CD=_____$, $S_{\triangle BEF}:S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADE}=_____$



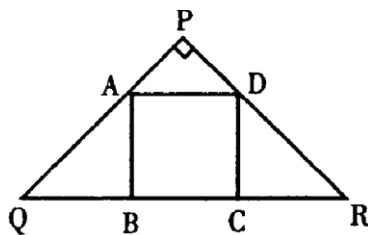
6、如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 边上一点, $\angle DBC = \angle A$, $BC=\sqrt{6}$, $AC=3$, 则 CD 的长为()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$



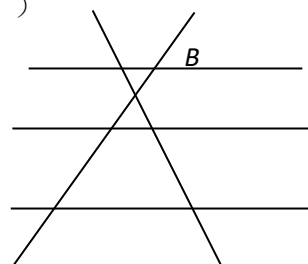
7、如图，正方形 ABCD 的边 BC 在等腰直角三角形 PQR 的底边 QR 上，其余两个顶点 A、D 在 PQ、PR 上，则 PA: AQ 等于()

- A. $1: \sqrt{2}$ B. $1: 2$ C. $1: 3$ D. $1: 4$



8、如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，下列比例式中正确的是()

- (A) $\frac{AD}{DF} = \frac{CE}{BC}$ (B) $\frac{AD}{BE} = \frac{BC}{AF}$
 (C) $\frac{CE}{DF} = \frac{AD}{BC}$ (D) $\frac{AF}{DF} = \frac{BE}{CE}$

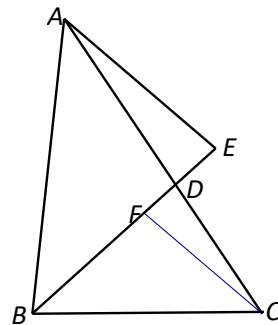


9、已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AC = \sqrt{5} + 1$ ，求 AB 的长。

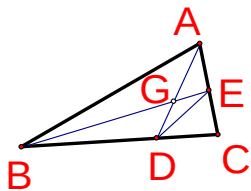
10、如图，在 $\triangle ABC$ 中，BD 平分 $\angle ABC$ ，交 AC 于点 D，点 E 在 BD 的延长线上， $BA \cdot BD = BC \cdot BE$ 。

(1) 求证：AE=AD;

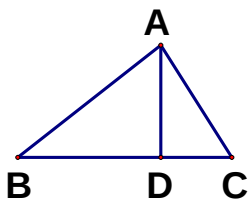
(2) 如果点 F 在 BD 上， $CF=CD$ ，求证： $BD^2 = BE \cdot BF$ 。



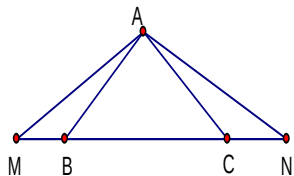
11、如图， $\triangle ABC$ 是，G 为 $\triangle ABC$ 重心， $S_{\triangle DEG} = a^2$ ，求 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle GBC}$ 的值。



12、如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 $AD \perp BC$ ，点 D 为垂足， $AB \cdot CD = AC \cdot AD$ 。求证： $AB^2 = BD \cdot BC$ 。



13、如图，如果等边三角形 ABC 的边长是 $6\sqrt{2}$ ，在 BC 所在直线上，点 M 从 B 出发向左以每秒 1cm 的速度运动，同时点 N 从 C 出发向右以每秒 2cm 的速度运动，求多少秒后， $\triangle ABM \sim \triangle NCA$ 。



14、 $\triangle ABC$ 中， $AB=2$ ， $BC=3$ ， D 、 E 、 F 分别在 BC 、 AC 、 AB 上，求内接菱形 $BDEF$ 的周长。

【拓展提高】(★第1-5题，★★第6-9题，★★★第10-13题，★★★★第14-15题，★★★★★第16-18题)

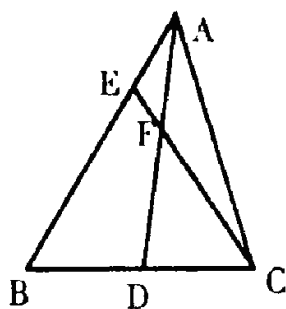
1、如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AF:FD=1:3$ ，连 CF 并延长交 AB 于 E ，则 $AE:EB$ 等于()

A. 1: 8

B. 1: 7

C. 1: 6

D. 1: 5



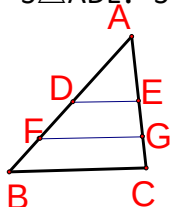
2、两个相似三角形的面积比为 9: 4, 周长和是 20cm, 则这两个三角形的周长分别是()

A. 16cm 和 4cm B. 13cm 和 7cm C. 12cm 和 8cm D. 11cm 和 9cm

二、填空题:

3、如图, $DE \parallel FG \parallel BC$, $AD: DF: FB=2: 3: 4$, 则 $DE: FG: BC=$ _____ ,

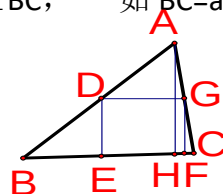
$S_{\triangle ADE}: S_{DFGE}: S_{FBCG}=$ _____



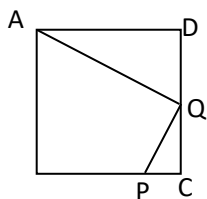
4、已知 $\triangle ABC$ 的两条中线 BD 、 CE 相交于 G , $\triangle ABC$ 的面积等于 36, 则 $\triangle DEG$ 的面积等于 _____ .

5、两相似三角形面积分别为 14cm^2 和 56cm^2 , 它们的周长之和为 57cm , 则较大三角形周长是_____cm

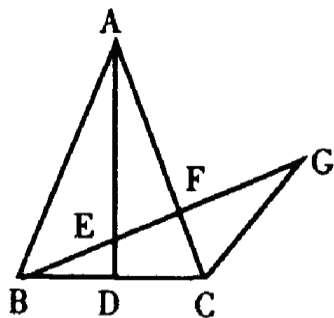
6、如图, $\square DEFG$ 一边在 BC 上, D 、 G 分别在 AB 、 AC 上, $AH \perp BC$, 如 $BC=a$, $AH=h$, 则 $S_{\square DEFG}=$ _____



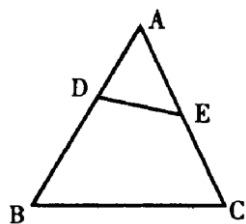
7、如图, 正方形 $ABCD$ 中, P 是 BC 上的点, 并且 $BP=3CP$, Q 是 CD 的中点. 求证: $AQ \perp QP$;



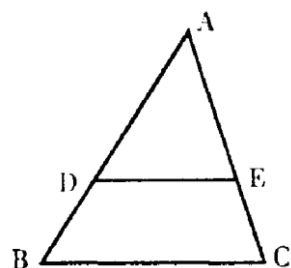
8、如图, 已知等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $AD \perp BC$ 于 D , $CG \parallel AB$, BG 分别交 AD 、 AC 于 E 、 F , 求证: $BE^2=EF \cdot EG$.



- 9、如图，已知 $\angle AED = \angle B$ ，且 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ACB} = 4 : 25$ ，求 $AD : AC$ 。

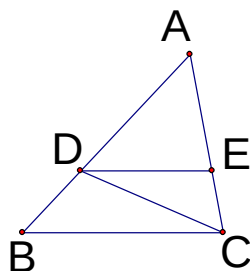


- 10、如图， $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{2}$ ，求 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}BCED}}$ 。

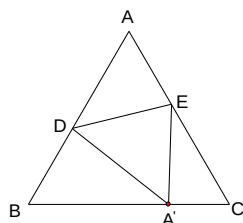


- 11、梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle BDC$ ， $AD = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 4\sqrt{3}$ ，求 BD 。

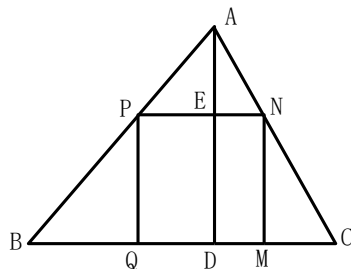
- 12、已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $\triangle ADE$ 的面积等于 4， $\triangle DBC$ 的面积等于 3，求 $AD : BD$ 的值。



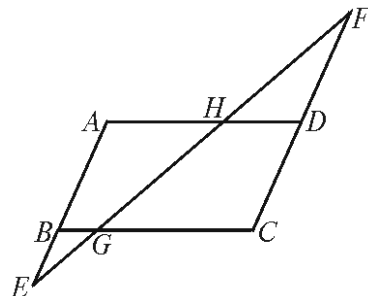
- 13、如图，正 $\triangle ABC$ 的边长为 1，沿 DE 将 $\triangle ABE$ 翻折，点 A 恰好落在 BC 上的 A' 处，已知 $AD : AE = 5 : 4$ ，求 BA' 的长。



- 14、如图， $\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料，边 $BC=60$ 毫米，高 $AD=40$ 毫米，要把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB 、 AC 上，这个正方形零件的边长是多少？



- 15、如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，延长 AB 到 E ，使 $BE = \frac{1}{2}AB$ ，延长 CD 到 F ，使 $DF=DC$ ， EF 交 BC 于 G ，交 AD 于 H ，求 $\triangle BEG$ 与 $\triangle CFG$ 的面积之比。

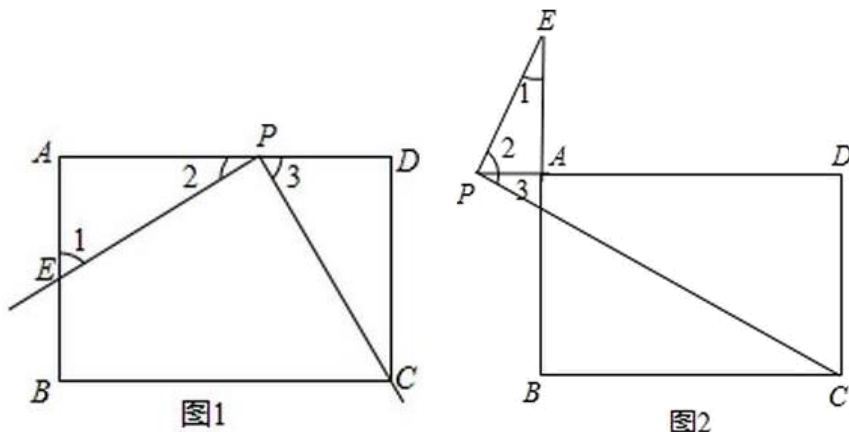


- 16、在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=9$ ， P 是射线 DA 上一点，将三角板的直角顶点置于点 P ，三角板的两直角边中的一边始终经过点 C ，另一直角边交射线 BA 于点 E 。

问：（1）如图 1，当 P 在边 AD 上时， $\triangle EAP$ 与 $\triangle PDC$ 一定相似吗？为什么？

（2）如图 2，当点 P 在 DA 延长线上时 $\triangle EAP$ 与 $\triangle PDC$ 一定相似吗？请说明理由；

（3）是否存在这样的点 P ，使 $\triangle EAP$ 的周长等于 $\triangle PDC$ 周长的 2 倍。

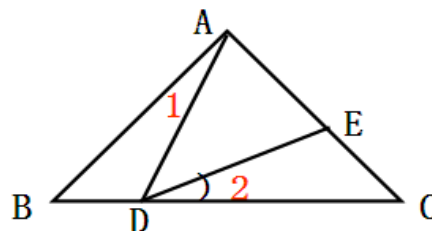


17、如图,在等腰 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=1$,点 D 是 BC 边上的一个动点(不与 B 、 C 重合), 在 AC 上取一点 E , 使 $\angle ADE=45^\circ$

(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle DCE$

(2) 设 $BD=x$, $AE=y$, 求 y 关于 x 函数关系式及自变量 x 值范围, 并求出当为何值时 AE 取得最小值?

(3) 在 AC 上是否存在点 E , 使得 $\triangle ADE$ 为等腰三角形? 若存在, 求 AE 的长; 若不存在, 请说明理由? .

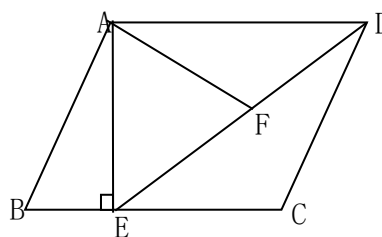


18、如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为 E , 连接 DE , F 为线段 DE

上一点, 且 $\angle AFE = \angle B$:

1) 求证: $\triangle ADF \sim \triangle DEC$;

2) 若 $AB=4$, $AD = 3\sqrt{3}$, $AE=3$, 求 AF 的长。



第六讲 相似三角形的性质

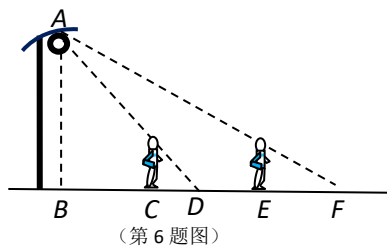
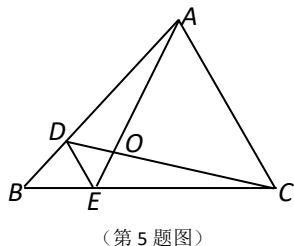
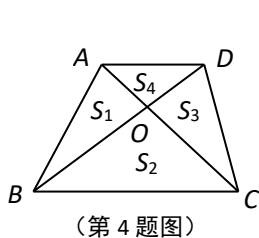
【预习新课】

1. 相似三角形的性质：相似三角形的对应角相等。
2. 相似三角形的性质定理 1：相似三角形的对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比。
3. 相似三角形的性质定理 2：相似三角形的周长的比等于相似比。
4. 相似三角形的性质定理 3：相似三角形的面积的比等于相似比的平方。

【概念练习】

一、选择题

- ★1. 在比例尺为 $1:10000$ 的地图上，一块面积为 2cm^2 的区域表示的实际面积约为 ()
- (A) 2000000cm^2 ; (B) 20000m^2 ; (C) 4000000m^2 ; (D) 40000m^2
- ★2. 如果两个相似三角形的面积比是 $1:6$ ，则它们的相似比 ()
- (A) $1:36$; (B) $1:6$; (C) $1:3$; (D) $1:\sqrt{6}$.
- ★3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点， $DE \parallel BC$ ，如果 $\triangle ADE$ 的面积等于 3，那么 $\triangle ABC$ 的面积等于 ()
- (A) 6; (B) 9; (C) 12; (D) 15.



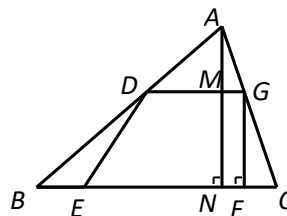
- ★4. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC=2AD$ 。如果对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle DOA$ 的面积分别记作 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，那么下列结论中，不正确的是 ()
- (A) $S_1=S_3$; (B) $S_2=2S_4$; (C) $S_2=2S_1$; (D) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ 。
- ★★5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是边 AB 、 BC 上的点，且 $DE \parallel AC$ ，若 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = 1:3$ ，则 $S_{\triangle EDO} : S_{\triangle AOC}$ 的值为 ()
- A.; B.; C.; D..
- ★★6. 如图，小明晚上由路灯 A 下的点 B 处走到点 C 处时，测得自身影子 CD 的长为 1 米。他继续往前走 3 米到达点 E 处（即 $CE=3$ 米），测得自己影子 EF 的长为 2 米。已知小明的身高是 1.5 米，那么路灯的高度 AB 是 ()
- (A) 4.5 米; (B) 6 米; (C) 7.2 米; (D) 8 米。

二、解答题

★★★

7. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC < 45^\circ$, $BC = 6$, BC 边上的高 $AN = 4$. 直角梯形 $DEFG$ 的底 EF 在 BC 边上, $EF = 4$, 点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $DG \parallel EF$, $GF \perp EF$, 垂足为 F . 设 GF 的长为 x , 直角梯形 $DEFG$ 的面积为 y .

求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出函数的定义域.

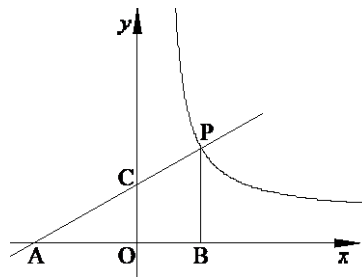


★★★

8. 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 分别交 x 、 y 轴于点 A 、 C , P 是该直线上在第一象限内的一点,

$PB \perp x$ 轴于 B , $S_{\triangle ABP} = 9$.

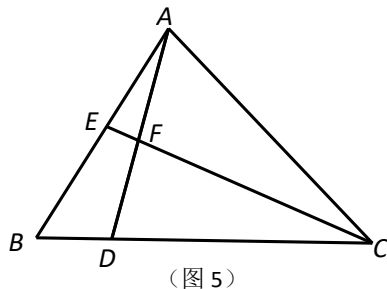
- (1) 求点 P 的坐标;
- (2) 设点 R 与点 P 在同一个反比例函数的图像上, 且点 R 在直线 PB 的右侧. 作 $RT \perp x$ 轴于 T , 当 $\triangle BRT$ 与 $\triangle AOC$ 相似时, 求点 R 的坐标.



★★★★★

9. 如图 5, $\triangle ABC$ 中, D 在边 BC 上, $\angle DAC = \angle B$, 角平分线 CE 交 AD 于 F , 已知 $BD = 1$, $DC = 3$.

- (1) 求 $\frac{CF}{EF}$ 的值;
- (2) 求 $\frac{AF}{DF}$ 的值;
- (3) 求四边形 $BDFE$ 的面积与 $\triangle ACF$ 面积的比值.

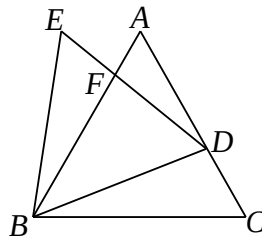


(图 5)

★★★★★

10. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDE$ 都是等边三角形, 点 D 在边 AC 上 (不与 A 、 C 重合), DE 与 AB 相交于点 F .

- (1) 求证: $\triangle BCD \sim \triangle DAF$;
- (2) 若 $BC = 1$, 设 $CD = x$, $AF = y$;
 - ① 求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;
 - ② 当 x 为何值时, $\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{7}{9}$?



第八讲 锐角三角比的意义

【知识梳理】

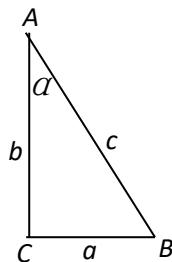
锐角三角比基础

正弦 $\sin \alpha$ ，余弦 $\cos \alpha$ ，正切 $\tan \alpha$ ，余切 $\cot \alpha$

$\sin \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\cos \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\tan \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\cot \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$.

【巩固练习】

一、选择题



★1. 在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=8$ ， $BC=6$ ，求锐角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的四个三角比.

★2. 在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $BC=20$ ， $\tan A = \frac{4}{3}$ ，求 AC 的长.

★3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=3$ ， $BC=4$ ， $\cos B = \frac{1}{3}$ ，求 AC 的长.

★4. 等腰三角形的底边长 6cm，周长 18cm，求底角的正弦值.

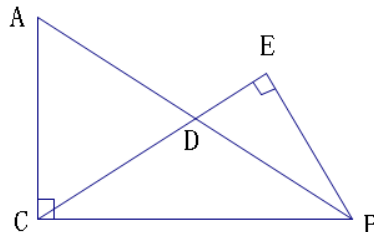
★★5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\tan A = \frac{12}{5}$ ， $\triangle ABC$ 的周长为 60，那么 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

★★6. 如图在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， D 是边 AB 的中点， $BE \perp CD$ ，垂足为点 E ，

已知 $AC=15$ ， $\cos A = \frac{3}{5}$.

(1) 求线段 CD 的长；

(2) 求 $\sin \angle DBE$ 的值.



二、填空题

★1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A = \frac{5}{13}$, 则 $\tan A$ 的值等于_____;

★2. 若 α 为锐角, $\sin \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, 求 $\cos \alpha =$ _____, $\tan \alpha =$ _____.

★3. 正比例函数 $y = 3x$ 的图像与 x 轴的正半轴的夹角为锐角 α , 则 $\cos \alpha =$ _____.

★4. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $\sin A = \frac{1}{3}$, 那么 $AB =$ _____.

★★5. 矩形的周长是 28, 对角线与一边的夹角的正弦值为 $\frac{3}{5}$, 那么这个矩形的面积为_____.

★★6. 若等腰三角形的两条边长分别是 6cm 和 8cm, 则此三角形底角的余弦值是_____.

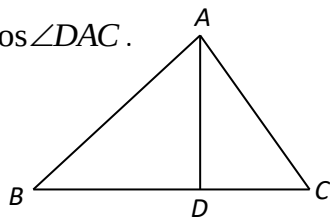
★★7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = x + 5$, $AB = 2x + 1$, $\cos A = \frac{2}{3}$, 求 x

★★★8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos B = \frac{12}{13}$, $AC = 10$, 求 $\triangle ABC$ 的周长和斜边 AB 上的高.

★★★★9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的高, $\tan \angle B = \cos \angle DAC$.

(1) 求证: $AC = BD$

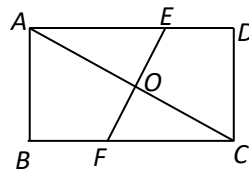
(2) 若 $\sin \angle C = \frac{12}{13}$, $BC = 12$, 求 AD 的长.



★★★★10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 6$, 则 $\sin \angle A =$ _____.

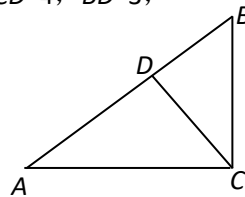
三、解答题

★★★★1. 如图, 将矩形 $ABCD$ 翻折, 点 A 、 C 可以重合, E 、 F 是折痕, 若 $AB = 2$, $BC = 5$, 则 $\tan \angle OFC =$ _____.



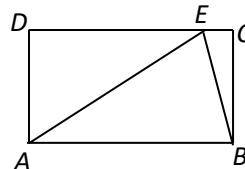
(第1题图)

- ★★★2. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , $CD=4$, $BD=3$,
则 $\sin \angle ACD =$ _____.



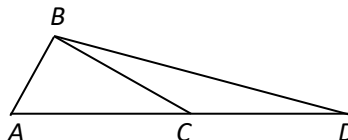
(第2题图)

- ★★★3. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=AE=5$, $AD=3$, 则 $\tan \angle AEB =$ _____.



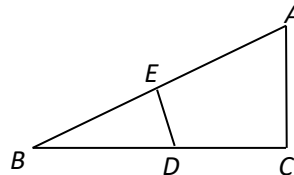
(第3题图)

- ★★★★4. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, D 为 AC 延长线上一点, $AC=CD$, 且 $\angle DBC = \frac{1}{3}$,
则 $\tan A$ 的值为_____.



(第4题图)

- ★★★★5. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, D 为 BC 的中点, $DE \perp AB$ 于点 E , $\tan \angle B = \frac{1}{2}$, $AE=7$,
则 DE 的长为_____.



(第5题图)

四、拓展题

- ★★★1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $S_{\triangle ABC}=48$, 则 $\angle BAC$ 的正弦值为_____;

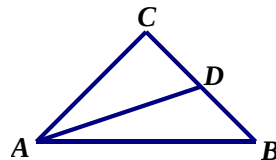
- ★★★2. $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $\cot A = \frac{3}{4}$, 则 $(\sin B + \cos B) \cdot \tan B =$ _____;

- ★★★3. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $BC=12$, 将对角线 BD 绕点 B 旋转, 点 D 落在 BC 的延长线上的点 D' 处, 那么 $\tan \angle BD'A$ 的值等于_____;

★★★★4. 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 若 $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, 则 $\angle AG$ = _____;

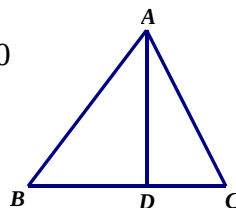
★★★

5. 已知: $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CA = CB$, $CD = BD$, 则 $\cot \angle DAB$ 的值为_____;



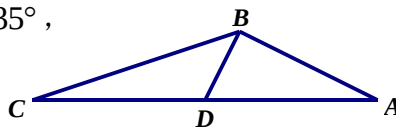
★★★

6. 如图, 在锐角三角形 ABC 中, $\sin B = \frac{4}{5}$, $\tan C = 2$, 且 $S_{\triangle ABC} = 10$ 则 BC 的长为_____;



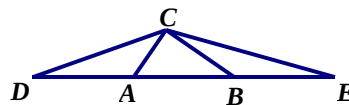
★★★★★

7. 如图: 已知在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 的中点, $\angle ABC = 135^\circ$, $\angle DBC = 45^\circ$, 则 $\sin \angle ADB$ = _____;



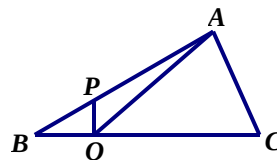
★★★★★

8. 如图: $\angle ACB = 90^\circ$, $DA = AB = BE$, $\angle DCA = \alpha$, $\angle BCE = \beta$, 则 $\tan \alpha \cdot \tan \beta$ 的值为_____;



★★★★★

9. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, P 为 AB 上一点, $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{2}$, $PQ \perp BC$ 于 Q , 连结 AQ , 则 $\cos \angle AQC$ = _____;

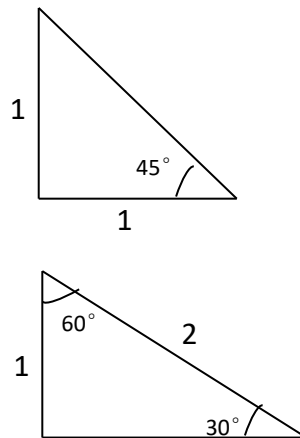


第九讲 求锐角三角的值

【知识梳理】

1. 特殊角

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$			
$\cos \alpha$			
$\tan \alpha$			
$\cot \alpha$			



2. 三角比的性质:

①锐角 A 的三角比值的取值范围:

$\sin A$: _____ $\cos A$: _____

$\tan A$: _____ $\cot A$: _____

②同角关系: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

③余角关系: 若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 则 $\sin A = \cos B$, $\tan A = \cot B$;

【巩固练习】

一、填空题(★第 1~9 题, ★★第 10~12 题, ★★★第 13~18 题)

1. 把 $\triangle ABC$ 三边扩大为原来的 2 倍, 锐角 A 的正弦值____ (填“变大”“变小”或“不变”).

2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\angle B =$ _____.

3. 若 $\sin 30^\circ = \cos \alpha$, 则 $\alpha =$ _____.

4. 若 α 是锐角 $2\sin(\alpha - 15^\circ) = 1$, 那么 $\alpha =$ _____.

5. 若 α 是锐角, 且 $\frac{1}{2}\tan \alpha = \sin 30^\circ$, 那么 $\alpha =$ _____.

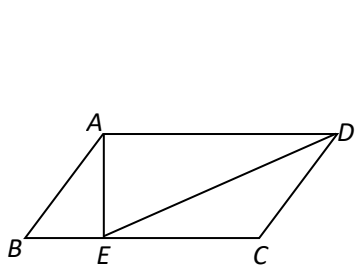
6. 已知 $\angle A$ 是锐角, 且 $\tan A = \sqrt{3}$, 则 $\sin \frac{A}{2} =$ _____.

7. 已知 $\cos \alpha = \sqrt{\sin 30^\circ}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

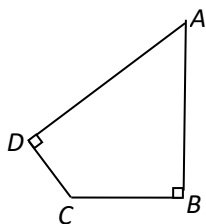
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状是_____.

9. 已知 $\angle A$, $\angle B$ 分别为 $\triangle ABC$ 的两个锐角, 并且满足: $|\cot A - \sqrt{3}| + (2\sin^2 B - 1)^2 = 0$
则 $\angle C =$ _____ 度.
10. 已知 α 为锐角, 若 $2\sin^2 \alpha = 1$, 求 α 的值 _____.
11. 若 $1 - \sqrt{3}\tan(\alpha - 15^\circ) = 0$, 求 $\sin \alpha =$ _____.
12. 已知 α 为锐角, 若方程 $\sqrt{3}x^2 - 6x + 9\tan \alpha = 0$ 有两个相等的实数根,
求 α 的值 _____.
13. 如果 α 是锐角, 且 $\tan \alpha = \cot 20^\circ$, 那么 $\alpha =$ _____ 度.
14. 若 $\cos A = 0.4321$, 则 $\sin(90^\circ - A) =$ _____.
15. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 已知 $\tan A + \cot B = 2$, 则 $\angle B =$ _____.
16. 已知 $\sin \alpha = 2m - 3$, 且 α 为锐角, 则 m 的取值范围是 _____.
17. 若 $\tan \alpha = 2$, 那么 $\frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{3\cos \alpha - \sin \alpha} =$ _____.
18. 已知: $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha =$ _____.

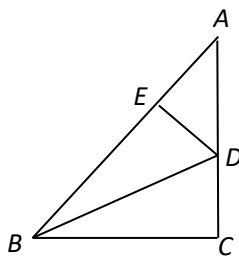
二、解答题(★★★★第 19~22 题, ★★★★★第 23~26 题)



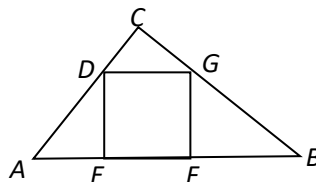
第 19 题图



第 20 题图



第 21 题图



第 22 题图

19. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BC$, 垂足为 E , 如果 $AB=5$, $BC=8$, $\sin B = \frac{4}{5}$.
那么 $\tan \angle CDE =$ _____.
20. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $AB=3$, $BC=2$, $\tan A = \frac{4}{3}$, 则 $CD =$ _____.

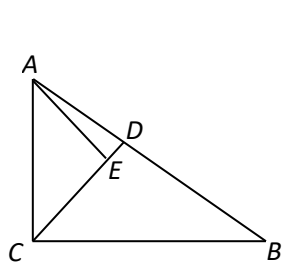
21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上, BD 平分 $\angle ABC$,

$DE \perp AB$, $AE=8$, $\cos A = \frac{4}{5}$, 则 $\tan \angle DBC =$ _____.

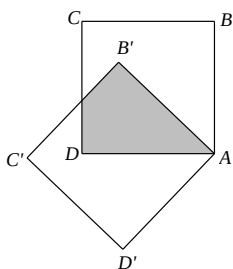
22. 如图, 正方形 $DEFG$ 内接于 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $AE=4$, $BF=9$, 则 $\tan A =$ _____.

23. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\tan B = \frac{2}{3}$, $AD = \frac{1}{3}AB$, $AE \perp CD$ 于点 E ,

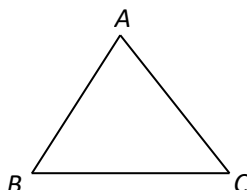
则 $\tan \angle CAE =$ _____.



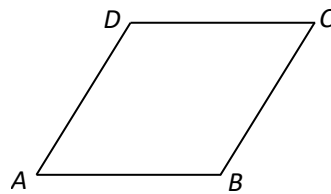
第 23 题图



第 24 题图



第 25 题图



第 26 题图

24. 如图, 正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转, 得到正方形 $AB'C'D'$. 当两正方形重叠部分的面积是原正方形面积的 $\frac{1}{4}$ 时, $\sin \frac{1}{2} \angle B'AD =$ _____.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=8$, $\tan C = \frac{3}{2}$, 如果将 $\triangle ABC$ 沿着直线 L 翻折, 点 B 落在边 AC 的中点处, 直线 L 与边 BC 交于点 D , 则 BD 的长为_____.

26. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $\angle A=60^\circ$, 点 E 在射线 CB 上, $BE=1$, 如果 AE 与射线 DB 相交于点 O , 则 $\tan \angle OAB =$ _____.

第十讲 解直角三角形

【知识梳理】

1. 直角三角形中，如果知道其中五个元素中的两个，其中一个元素是一条边，那么这个直角三角形的形状和大小都确定.
2. 在直角三角形中，由已知元素求出所有元素的过程，叫做解直角三角形.
3. 对任意三角形中的几何计算，常常把它化归为解直角三角形.
4. 构造等腰三角形底边上的高，可以求底角的三角比；构造等腰上的高，可以求顶角的三角比.

【巩固练习】

一、填空题

- ★1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，若已知 b 、 A 则 $a=$ _____。
- ★2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，若已知 a 、 A ，则 $b=$ _____。
- ★3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=4$ ， $AC=2\sqrt{2}$ ，那么 $BC=$ _____。
- ★4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， $BC=6$ ，则 $AC=$ _____。
- ★5. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $a+c=4+2\sqrt{3}$ ， $\angle A=60^\circ$ ，则 $b=$ _____。

二、解答题

- ★★6. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $a=6$ ，解这个直角三角形。
- ★★7. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $c=10$ ， $b=5$ ，解这个直角三角形。
- ★★8. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=2\sqrt{3}$ ， $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，解这个直角三角形。
- ★★9. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$ ， $AC=6$ ，解此直角三角形。

三、解三角形

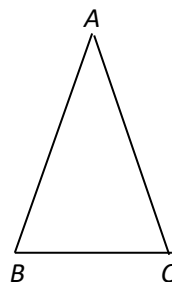
★★★

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=6$, $\cos B=\frac{1}{3}$.

(1) 求边 AB 的长;

(2) 求边 AC 上的高.

(3) 求 $\angle A$ 的正弦.

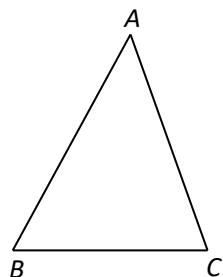


★★★

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=45^\circ$, $\angle C=75^\circ$, $AB=12$.

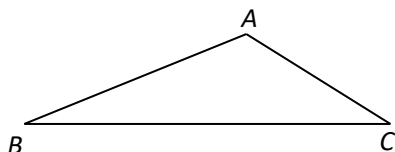
(1) 求边 AC 的长;

(2) 求 $\sin C$



★★★

12. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$, $\angle C$ 是锐角, $BC=20$, $\tan B=\frac{1}{2}$, $\tan C=\frac{3}{4}$, 求 AC 的长.

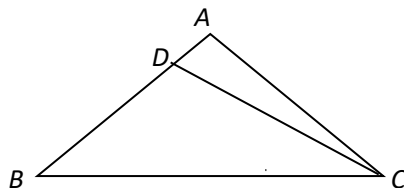


★★★

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=8$, D 是边 AB 上一点, 且 $\tan \angle BCD=\frac{1}{2}$.

(1) 试求 $\sin B$ 的值;

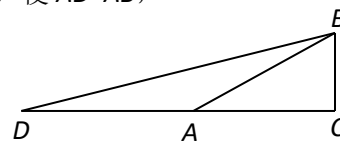
(2) 试求 $\triangle BCD$ 的面积.



四、特殊角的半角三角比

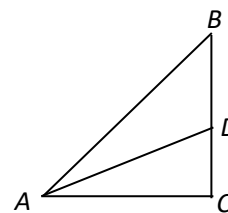
★★★★

1. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ，延长 CA 到 D ，使 $AD=AB$ ，利用这个图形求出 $\tan 15^\circ$ 和 $\cot 15^\circ$ 的值.



★★★★

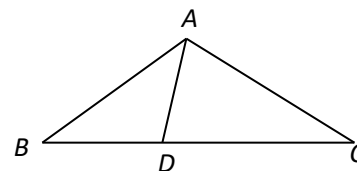
2. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， AD 为角平分线，利用这个图形求出 $\tan 22.5^\circ$ 的值.



★★★★

3. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 在 BC 上， $DC=AC$ ，且 $AD=BD$.

- (1) 求 $\angle B$ 的度数；
- (2) 求证：点 D 是线段 BC 的黄金分割点；
- (3) 利用上题结果求 $\cos 36^\circ$ 的值.



五、综合题 (★★★★★)

1. 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 点 P 是边 AB 上的一个动点, 联结 CP ,

过点 B 作 $BD \perp CP$, 垂足为点 D .

(1) 如图 1, 当 CP 经过 $\triangle ABC$ 的重心时, 求证: $\triangle BCD \sim \triangle ABC$;

(2) 如图 2, 若 $BC=2\text{cm}$, $\cot A=2$, 点 P 从点 A 向点 B 运动 (不与点 A 、 B 重合),

点 P 的速度是 $\sqrt{5}$ 厘米/秒. 设点 P 的运动时间为 t 秒, $\triangle BCD$ 的面积为 S 平方厘米,

求出 S 关于 t 的函数关系式, 并写出它的定义域;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 如果 $\triangle PBC$ 是以 CP 为腰的等腰三角形, 求 $\triangle BCD$ 的面积.

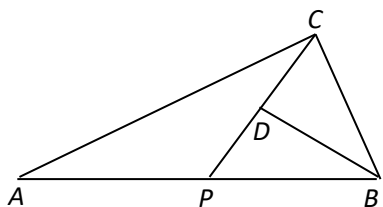


图 1

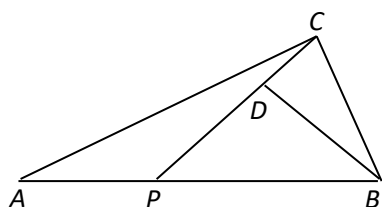
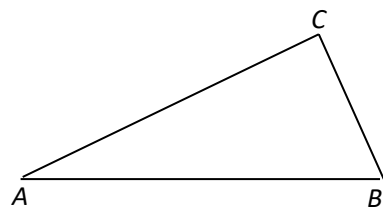


图 2



备用图

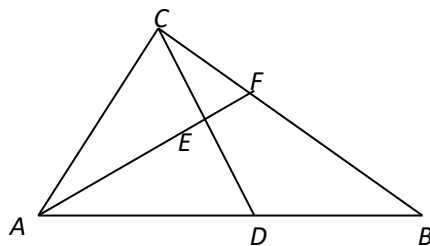
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=5$, $\sin \angle CAB = \frac{4}{5}$, D 是斜边 AB 上一点, 过点

A 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E , AE 交直线 BC 于点 F .

(1) 当 $\tan \angle BCD = \frac{1}{2}$ 时, 求线段 BF 的长;

(2) 当点 F 在边 BC 上时, 设 $AD = x$, $BF = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及其定义域;

(3) 当 $BF = \frac{5}{4}$ 时, 求线段 AD 的长.



第十一讲 解直角三角形

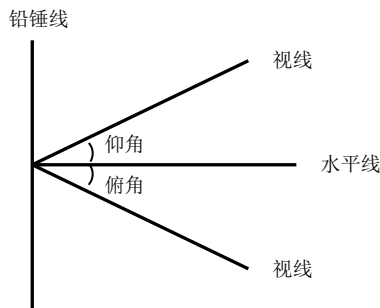
【新课预习】

1. 仰角、俯角

定义：视线与水平线所夹的角.

① 仰角特征：视线在水平线的上方.

② 俯角特征：视线在水平线的下方.



2. 坡度（坡比）、坡角

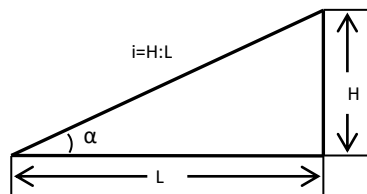
① 坡度： $i = \frac{H}{L}$

如图： H 为铅锤高度.

L 为水平宽度.

② 坡角 α ：坡面与水平面的夹角.

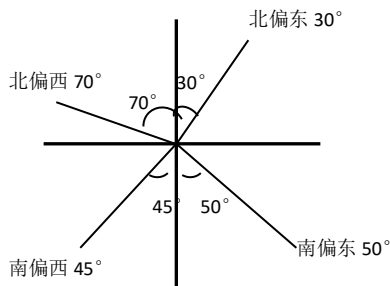
③ 坡度 i 与坡角 α 的关系： $i = \tan \alpha$.



3. 方位角

① 定义：指北或指南方向线与目标方向线所成的小于 90° 的角，叫做方向角.

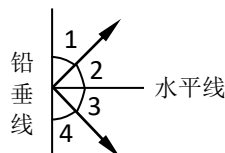
② 如图：北偏东 30° ，北偏西 70° ，
南偏东 50° ，南偏西 45° .



【巩固练习】

★1. 如图，图中俯角是 ()

(A) $\angle 1$; (B) $\angle 2$; (C) $\angle 3$; (D) $\angle 4$.



(第 1 题图)

★2. 在 A 处观察 B 处时的仰角为 36° ，那么在 B 处观察 A 处时的俯角为 ()

A. 36° ; B. 54° ; C. 126° ; D. 144° .

★★3. 高度为 h 米的飞机上观察地面控制点，测得俯角为 α ，那么飞机与控制点的距离 ()

(A) $\frac{h}{\sin \alpha}$; (B) $\frac{h}{\cos \alpha}$; (C) $h \sin \alpha$; (D) $h \cos \alpha$.

★4. 坡度等于 $1 : \sqrt{3}$ 的斜坡的坡角等于 ()

(A) 30° ; (B) 40° ; (C) 50° ; (D) 60° .

★5. 传送带和地面成一斜坡，它把物体从地面送到离地面 5 米高的地方，物体所经过的路程是 13 米，那么斜坡的坡度为

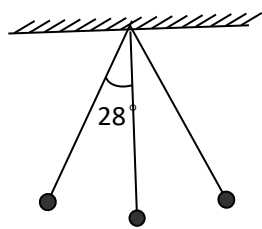
A. $1:2.6$; B. $1:\frac{5}{13}$; C. $1:2.4$; D. $1:\frac{5}{12}$.

★6. 如果从甲船看乙船，乙船在甲船的北偏东 30° 方向，那么从乙船看甲船，甲船在乙船的 ()

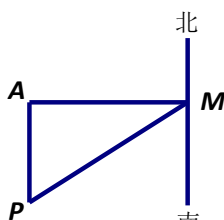
- (A) 南偏西 30° 方向; (B) 南偏西 60° 方向;
(C) 南偏东 30° 方向; (D) 南偏东 60° 方向.

★7. 如果在距离某大楼 20 米的地面上，测得这幢大楼顶端的仰角为 60° ，那么这幢大楼高为 _____ 米.

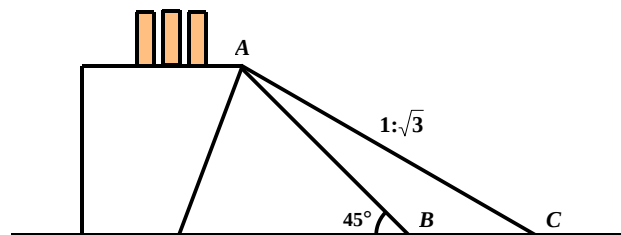
★★8. 在离某建筑物底部 30 米处的地方，用测角仪测得该建筑物顶部的仰角为 30° ，已知测角仪的高为 1.5 米，那么该建筑物的高为 _____ 米 (计算结果可以保留根号).



(第 9 题图)



(第 10 题图)



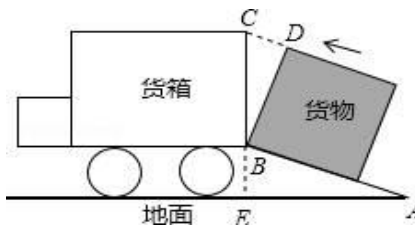
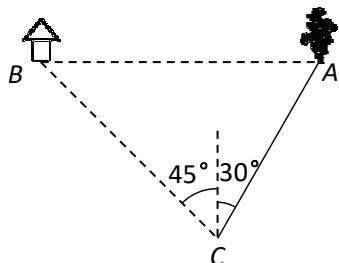
第 11 题

★★9. 如图，一条细绳系着一个小球在平面内摆动. 已知细绳的长度为 20 厘米，当小球摆动到最高位置时，细绳偏转的角度为 28° ，那么小球在最高位置与最低位置时的高度差为 _____ 厘米 (用所给数据表示即可).

★★10. 如图，在港口 M 的南偏西 60° 方向有一座小岛 P，一船以每小时 20 千米的速度从港口 M 出发，沿正西方向行驶，半个小时后，这艘船在 A 处测得小岛在船的正南方向，那么小岛 P 与港口 M 相距 _____ 千米.

★★11. 某货站用传送带传送货物. 为了提高传送过程的安全性，工人师傅将原坡角为 45° 的传送带 AB，调整为坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$ 的新传送带 AC (如图 5 所示). 已知原传送带 AB 的长是 $4\sqrt{2}$ 米. 那么新传送带 AC 的长是 _____ 米.

- ★★★12. 如图，湖心岛上有一凉亭 B ，在凉亭 B 的正东湖边有一棵大树 A ，在湖边的 C 处测得 B 在北偏西 45° 方向上，测得 A 在北偏东 30° 方向上，又测得 A 、 C 之间的距离为 100 米，则 A 、 B 之间的距离是_____米（结果保留根号形式）。

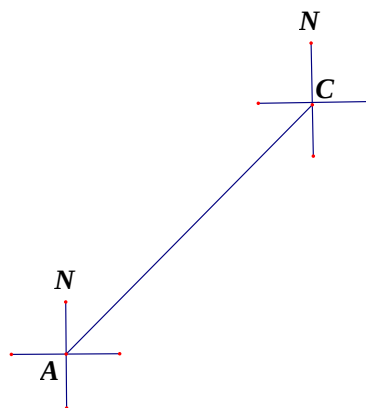


- ★★★13. 如图是将一正方体货物沿坡面 AB 装进汽车货厢的平面示意图。已知长方体货厢的高度 BC 为 2.6 米，斜坡 AB 的坡比为 1:2.4，现把图中的货物继续向前平移，当货物顶点 D 与 C 重合时，仍可把货物放平装进货厢，则货物的高度 BD 不能超过_____米。

【解答题】

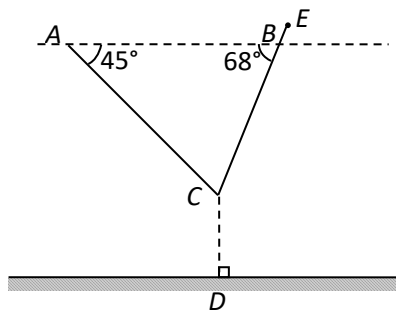
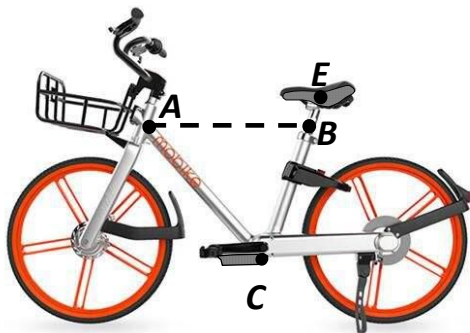
★★★★

14. 已知在港口 A 的南偏东 75° 方向有一礁石 B ，轮船从港口出发，沿正东北方向（北偏东 45° 方向）前行 10 海里到达 C 后测得礁石 B 在其南偏西 15° 处，求轮船行驶过程中离礁石 B 的最近距离。



★★★★★

15. 如图，一辆摩拜单车放在水平的地面上，车把头下方 A 处与坐垫下方 B 处在平行于地面的同一水平线上， A 、 B 之间的距离约为 49cm ，现测得 AC 、 BC 与 AB 的夹角分别为 45° 与 68° ，若点 C 到地面的距离 CD 为 28cm ，坐垫中轴 E 处与点 B 的距离 BE 为 4cm ，求点 E 到地面的距离(结果保留一位小数)。(参考数据： $\sin 68^\circ \approx 0.93$ ， $\cos 68^\circ \approx 0.37$ ， $\cot 68^\circ \approx 0.40$)



第 22 题图

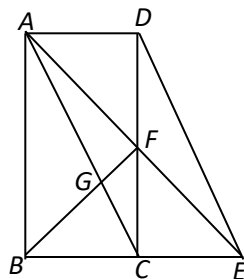
【疑难解析】

★★★★★

1. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $DE \parallel AC$ ，与 BC 延长线交于 E ，

AE 交 CD 于 F ， BF 交 AC 于 G ，

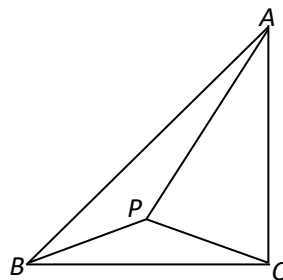
若 $\cos \angle DAF = \frac{2}{3}$ ，求证： $\angle BCG = \angle BGC$



★★★★★

2. 如图，在等腰 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，在 $Rt \triangle ABC$ 内取一点 P ，且 $AP=AC=a$ ，

$BP=CP=b$ ($a > b$) .求 $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ 的值.



★★★★★

3. 若 $0^\circ < \theta < 30^\circ$ ，且 $\sin \theta = km + \frac{1}{3}$ (k 为常数， $k < 0$)，求 m 的取值范围.

第十二讲 二次函数 26.1~26.2 (3)

【知识梳理】

1、一般的，解析式形如 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$) 的函数叫做二次函数。

2、抛物线 $y = ax^2$ (其中 a 是常数，且 $a \neq 0$) 的对称轴是 y 轴，即直线 $x = 0$ ；顶点是原点。抛物线的开口方向由 a 所取之的符号决定，当 $a > 0$ 时，它的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a < 0$ 时，它的开口向下，顶点是抛物线的最高点。

【基础训练】

★1、矩形周长是 20cm，一边长是 x cm，面积是 y cm²，则 y 与 x 的函数关系式是_____，这个函数称作 _____ 次函数。

★2、下列函数 $y = \frac{1}{2}x - 1$ ， $y = 3x^2$ ， $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$ ， $y = x(x - 2)$ ， $y = (x - 1)^2 - x^2$

中，二次函数的个数为 ()

(A) 2 个 (B) 3 个 (C) 4 个 (D) 5 个

★3、已知函数 $y = ax^2$ 的图象过点 (2, -4)，则 $a =$ ____，对称轴是_____，顶点坐标是_____，抛物线的开口方向_____，抛物线的顶点是最_____点。

★★4、二次函数 $y = 2x^2$ 与 $y = -2x^2$ 的图像_____相同，它们关于_____对称。

★★5、对于函数 $y = 2x^2$ 下列说法：①当 x 取任何实数时， y 的值总是正的；② x 的值增大， y 的值也增大；③ y 随 x 的增大而减小；④图象关于 y 轴对称。其中正确的是_____。

★★6、已知函数 $y = x^2$ 的图象过点 (a, b) ，则它必通过的另一点是 ()

(A) $(a, -b)$ (B) $(-a, b)$ (C) $(-a, -b)$ (D) (b, a)

★★7、抛物线 $y = ax^2$ 过 A (-1, 2)，试判断 B (-2, -3)，C ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) 是否在抛物线上。

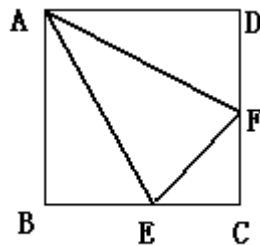
★★★8、 k 取哪些值时，函数 $y = (k^2 - k)x^2 + kx + (k + 1)$ 是以 x 为自变量是一次函数？二次函数？

★★★9、已知等腰直角三角形的斜边长为 $x\text{cm}$ ，面积为 $y\text{cm}^2$ ，(1) 请写出 y 与 x 的函数关系式，并判断它是什么函数？(2) 画出这个函数的图象。

【拓展提高】

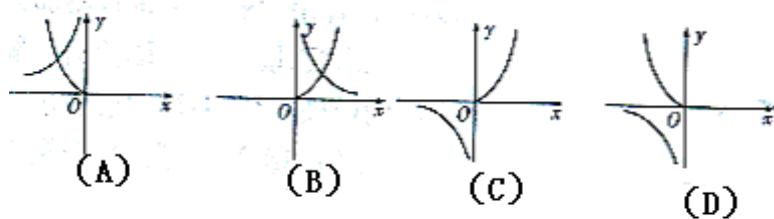
★★★10、(19 年虹口一模) 如果抛物线 $y = (m-1)x^2$ 有最低点，那么 m 的取值范围为_____。

★★★11、如图，正方形 ABCD 边长是 4，E、F 分别在 BC、CD 上，设 $\triangle AEF$ 面积是 y ， $EC = x$ ，如果 $CE = CF$ ，试求出 y 与 x 的函数关系及自变量取值范围，并判断 y 是 x 的什么函数？



★★★12、已知二次函数 $y = ax^2 + c$ ，当 $x = 0$ 时， $y = -3$ ，当 $x = 1$ 时， $y = -1$ ，求当 $x = -2$ 时， y 的值。

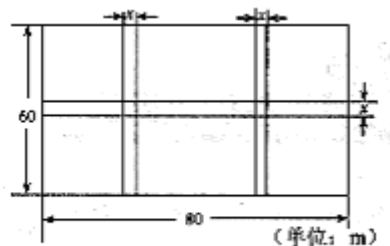
★★★★13、 $x < 0$ 时，函数 $y = x^2$ 与 $y = -\frac{1}{x}$ 在同一坐标系中的大致是 ()



【补充】

★★★★14、一块矩形耕地大小尺寸如下图，要在这块地上沿东西方向挖一条水渠，沿南北方向挖两条水渠，水渠宽为 $x\text{cm}$ ，余下的可耕地面积为 $y\text{cm}^2$ ，

- (1) 请你写出 y 与 x 之间的函数关系式；
- (2) 根据你写出的函数关系式，求出水渠宽为 1m 时，余下的可耕地面积为多少？
- (3) 若耕除去水渠剩余部分面积为 4408m^2 ，求此时水渠的宽度。



★★★★15、抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 与直线 $y = 4x - 3$ 交于点 $A(m, 1)$ ，求：

- (1) 点 A 的坐标及抛物线顶点 C 的坐标和对称轴；
- (2) 抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = 4x - 3$ 是否还有其他交点？若有，请求出这个交点 B 的坐标，若没有，请说明理由。并求点 A 、 B 、 C 三点构成的三角形的面积。

第十三讲 二次函数 26.3 (1) (2)

【知识梳理】

1、抛物线 $y = ax^2 + c$ (其中 a 、 c 是常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴是 y 轴, 即直线 $x = 0$; 顶点坐标是 $(0, c)$. 抛物线的开口方向由 a 所取之的符号决定, 当 $a > 0$ 时, 它的开口向上, 顶点式抛物线的最低点; 当 $a < 0$ 时, 它的开口向下, 顶点式抛物线的最高点.

2、抛物线 $y = a(x+m)^2$ (其中 a 、 m 是常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴是过点 $(-m, 0)$ 且平行 (或重合) 于 y 轴的直线, 即直线 $x = -m$; 顶点坐标是 $(-m, 0)$. 当 $a > 0$ 时, 它的开口向上, 顶点式抛物线的最低点; 当 $a < 0$ 时, 它的开口向下, 顶点式抛物线的最高点.

【基础训练】

★1、函数 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$ 的图象开口方向_____, 对称轴是_____.

顶点坐标是_____, 当 $x =$ _____时, y 的最大值为_____.

★★2、把抛物线 $y = -x^2$ 向上平移 4 个单位后, 得到的抛物线的函数解析式为_____, 平移后的抛物线的顶点坐标是_____, 对称轴是_____, 与 y 轴的交点坐标是_____, 与 x 轴的交点坐标是_____.

★★3、(19 年奉贤一模) 关于二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图像, 下列说法正确的是 ()

- (A) 开口向下; (B) 经过原点;
(C) 对称轴右侧的部分是下降的; (D) 顶点坐标是 $(-1, 0)$.

★★★4、将抛物线 $y = 3x^2$ 向左平移 3 个单位所得的抛物线的函数关系式为 ()

- A、 $y = 3x^2 - 3$ B、 $y = 3(x-3)^2$
C、 $y = 3x^2 + 3$ D、 $y = 3(x+3)^2$

★★★5、(19 年奉贤一模) 如果将抛物线 $y = -2x^2$ 向右平移 3 个单位, 那么所得到的新抛物线的对称轴是直线_____.

★★★6、抛物线 $y = -(x-1)^2$ 是由抛物线_____向_____平移_____个单位得到的, 平移后的抛物线对称轴是_____, 顶点坐标是_____, 当 $x =$ _____时, y 有最_____值, 其值是_____.

★★7、(19 年金山一模) 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$, 那么抛物线在 y 轴右侧部分是_____▲

(填“上升的”或“下降的”).

★★★8、用配方法把下列函数化成 $y = a(x-h)^2$ 的形式，并指出开口方向、顶点坐标和对称轴.

$$(1)y = x^2 + 4x + 4$$

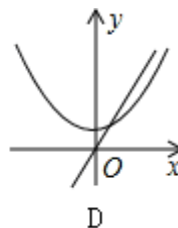
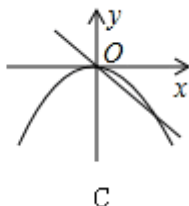
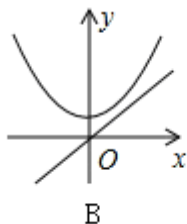
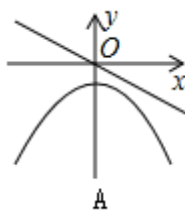
$$(2)y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$$

★★★9、已知抛物线的对称轴是 y 轴，顶点的纵坐标为 5，且过点 (1, 2) 求这条抛物线的解析式.

【拓展提高】

★★★★10、(19 年普陀一模) 已知二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$) 的图像上有纵坐标分别为 y_1 、 y_2 的两点 A 、 B ，如果点 A 、 B 到对称轴的距离分别等于 2、3，那么 y_1 _____ y_2 . (填“<”、“=”或“>”)

★★★★11、若正比例函数 $y = mx$ ($m \neq 0$)， y 随 x 的增大而减小，则它和二次函数 $y = mx^2 + m$ 的图象大致是 ()



★★★★12、若一个二次函数的图像与抛物线 $y = x^2 - 3x - 4$ 的形状相同，顶点 P 在 y 轴上，且 P 到 x 轴的距离为 6，则这个二次函数的解析式为_____.

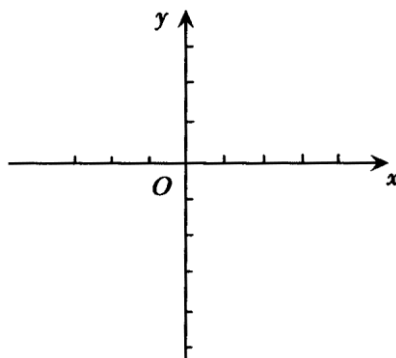
★★★13、在同一坐标系中，画出函数 $y = -x^2 + 2$ 与 $y = x^2 - 2$ 的图像请分别说出图象的顶点坐标、对称轴及开口方向，并比较两个图像之间有何联系？

★★★★14、已知二次函数图像的顶点在 x 轴上，且图像经过点 $(2, -2)$ 与 $(-1, -8)$ 求此函数解析式.

【补充】

★★★15、抛物线 $y = a(x - 2)^2$ 经过 $(1, -1)$. (1) 确定 a 的值；(2) 画出这个函数图象；(3) 求出抛物线与坐标轴的交点坐标.

★★★16、把二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ 配方成 $y = a(x - k)^2 + h$ 的形式，并求出它的图象的顶点坐标、对称轴方程， $y < 0$ 时 x 的取值范围，并画出图象.



第十四讲 二次函数 26.3 (3) (4) (5)

【知识梳理】

抛物线 $y = a(x+m)^2 + k$ (其中 a 、 m 、 k 是常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴是过点 $(-m, 0)$ 且平行 (或重合) 于 y 轴的直线, 即直线 $x = -m$; 顶点坐标是 $(-m, k)$. 当 $a > 0$ 时, 它的开口向上, 顶点是抛物线的最低点; 当 $a < 0$ 时, 它的开口向下, 顶点是抛物线的最高点.

【基础训练】

★1、填表

函数式	顶点坐标	开口方向	对称轴
$y = -5x^2$			
$y = -x^2 + 3$			
$y = 3(x-1)^2$			
$y = -(x+2)^2 + 5$			

★2、下列抛物线顶点是 $(2, 1)$ 的是 ()

- A、 $y = 2(x-2)^2 - 1$ B、 $y = 3(x-1)^2 + 2$
 C、 $y = 2(x-2)^2 + 1$ D、 $y = 4(x-1)^2 + 2$

★★★3、抛物线 $y = 3x^2$ 先向上平移 2 个单位, 后向右平移 3 个单位, 所得抛物线是 ()

- A、 $y = 3(x+3)^2 - 2$ B、 $y = 3(x+3)^2 + 2$
 C、 $y = 3(x-3)^2 - 2$ D、 $y = 3(x-3)^2 + 2$

★★4、抛物线的顶点在 $(-1, -2)$ 且又过 $(-2, -1)$. (1) 确定抛物线的解析式; (2) 画出这个函数的图象.

★★★★5、若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(-2, 10)$, 且一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 $-\frac{1}{2}$ 和 2, 则该二次函数的解析关系式为_____.

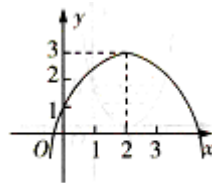
★★★6、(19 年虹口一模) 如果抛物线 $y = (x-m)^2 + m+1$ 的对称轴是直线 $x=1$, 那么它的顶点坐标为_____.

★★★★7、(19年黄浦一模) 如果点 $A(-1, m)$ 、 $B(\frac{1}{2}, n)$ 是抛物线 $y = -(x-1)^2 + 3$ 上的两个点, 那么 m 和 n 的大小关系是 m _____ n (填 “>” 或 “<” 或 “=”).

【拓展提高】

★★★★8、(19年静安一模) 抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 沿某条直线平移一段距离, 我们把平移后得到的新抛物线叫做原抛物线的 “同簇抛物线”. 如果把抛物线 $y = x^2$ 沿直线 $y = x$ 向上平移, 平移距离为 $\sqrt{2}$ 时, 那么它的 “同簇抛物线” 的表达式是 _____.

★★★★9、如图所示, 求: (1) 抛物线的解析式, (2) 抛物线与 x 轴的交点坐标.



★★★★10、某商业公司为指导某种应季商品的生产和销售, 对三月份至七月份该商品的售价和生产进行了调研, 结果如下: 一件商品的售价 M (元) 与时间 t (月) 的关系可用一条线段上的点来表示(如图甲), 一件商品的成本 Q (元) 与时间 t (月) 的关系可用一条抛物线上的点来表示, 其中 6 月份成本最高(如图乙).

根据图象提供的信息解答下面问题:

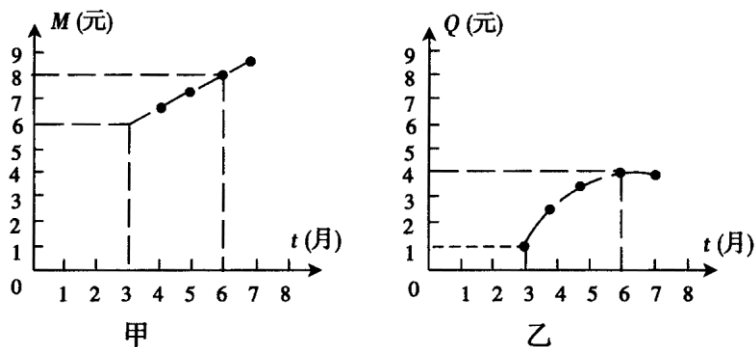
面问题:

(1) 一件商品在 3 月份出售时的利润是多少元?(利润 = 售价 - 成本)

(2) 求出图(乙)中表示的一件商品的成本 Q (元) 与时间 t (月)

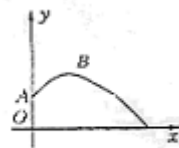
之间的函数关系式;

(3) 你能求出 3 月份至 7 月份一件商品的利润 W (元) 与时间 t (月) 之间的函数关系式吗? 若该公司能在一个月內售出此种商品 30000 件, 请你计算该公司在一个月內最少获利多少元?



★★★★11、某同学在推铅球时，推球经过的路线是抛物线的一部分（如图），出手处 A 点坐标是 $(0, 2)$ ，最高点 B 坐标是 $(6, 5)$ 。

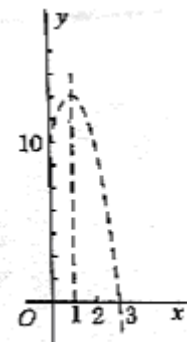
(1) 求此抛物线的函数表达式。(2) 你能算出这位学生推出的铅球有多远吗？



【补充】

★★★12、已知抛物线 $y = 2(x+3)^2 + 4$ ，它关于 x 轴对称的抛物线的解析式为_____；它关于 y 轴对称的抛物线的解析式为_____；它关于原点对称的抛物线的解析式为_____。

★★★★13、如图，在一幢建筑物里，从 10m 高的窗户处用水管斜着向外喷水，喷出的水，在垂直于墙壁的平面内画出一条抛物线，其顶点离墙 1m，并且在离墙 3m 处落到地面上，问抛物线的顶点比喷出的水高出多少？



★★★★14、已知二次函数 $y = a(x-m)^2 + \sqrt{3}$ 的图象经过原点 $O(0, 0)$ ， $A(2, 0)$ 。

(1) 写出该函数图象的对称轴；

(2) 若将线段 OA 绕点 O 逆时针旋转 60° 到 OA' ，试判断点 A' 是否为该函数图象的顶点？

第十六讲 二次函数 26.3 (6) (7)

【知识梳理】

1、抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$,

顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, 与 y 轴交点为 $(0, c)$. 当 $a > 0$ 时, 它的开口向上, 顶点

式抛物线的最低点; 当 $a < 0$ 时, 它的开口向下, 顶点式抛物线的最高点.

2、一般地, 对于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 沿着 x 轴正方向看, 可见它的变化情况如下:

当 $a > 0$ 时, 抛物线在对称轴 (即直线 $x = -\frac{b}{2a}$) 左侧部分是下降的, 在对称轴的右侧部分是上升的;

当 $a < 0$ 时, 抛物线在对称轴 (即直线 $x = -\frac{b}{2a}$) 左侧部分是上升的, 在对称轴的右侧部分是下降的.

【基础训练】

★1、抛物线 $y = -x^2 + 15$ 有最_____点, 其坐标是_____.

★★2、抛物线经过点 $A(1, 5)$, $B(7, 5)$, 则抛物线的对称轴方程是_____.

★★3、若抛物线 $y = x^2 - 2x - 2$ 的顶点为 A , 与 y 轴的交点为 B , 则过 A, B 两点的直线的解析式为_____.

★★★4、若抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 的图象关于 y 轴对称, 则函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的解析式为_____.

★★★5、若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 A , 与 x 轴正半轴交于 B, C 两点, 且 $BC = 2$, $S_{\triangle ABC} = 3$, 则 $b =$ _____.

★★★6、二次函数 $y = x^2 - 6x + c$ 的图象的顶点与原点的距离为 5, 则 $c =$ _____.

★★★7、二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$ 的图象在坐标平面内绕顶点旋转 180° , 再向左平移 3 个单位, 向上平移 5 个单位后图象对应的二次函数解析式为_____.

★★★8、把二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ 的图象向右平移 2 个单位后, 再向上平移 3 个单位, 所得的函数图象顶点是()

A. $(-5, 1)$ B. $(1, -5)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, 3)$

★★★9、已知函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$, 当函数值 y 随 x 的增大而减小时, x 的取值范围是()

A. $x < 1$ B. $x > 1$ C. $x > -2$ D. $-2 < x < 4$

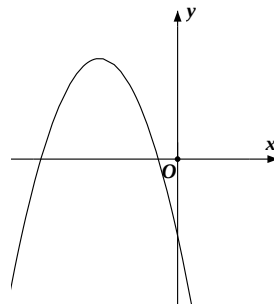
★★★10、二次函数 $y=a(x+k)^2+k$ ，当 k 取不同的实数值时，图象顶点所在的直线是()

- A. $y=x$ B. x 轴
C. $y=-x$ D. y 轴

★★★★11、(19 年金山一模) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 如

图所示，那么 a 、 b 、 c 的取值范围是 ()

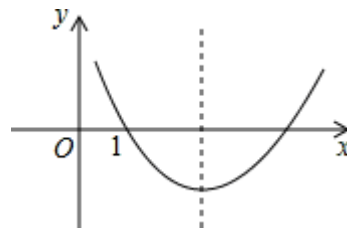
- A. $a < 0$ 、 $b > 0$ 、 $c > 0$ B. $a < 0$ 、 $b < 0$ 、 $c > 0$
C. $a < 0$ 、 $b > 0$ 、 $c < 0$ D. $a < 0$ 、 $b < 0$ 、 $c < 0$



★★★★12、二次函数 $y=x^2-8x+n$ 的部分图象如图所示，若

关于 x 的一元二次方程 $x^2-8x+n=0$ 的一个解为 $x_1=1$ ，则另

一个解为 $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.



【拓展提高】

★★★★13、(19 年奉贤一模) 某同学在利用描点法画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图像时，先取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y ，如下表所示：

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	-3	0	-1	0	3	...

接着，他在描点时发现，表格中有一组数据计算错误，他计算错误的一组数据是 ()

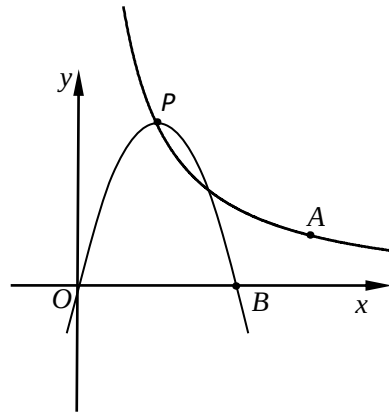
- (A) $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$; (C) $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

★★★★14、(19 年黄浦一模) 已知抛物线 $y=(x+1)^2+k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点， $AB=4$ ，点 C 是抛物线上一点，如果线段 AC 被 y 轴平分，那么点 C 的坐标为_____.

★★★★15、有一矩形的苗圃，其四周是总长为 40m 篱笆，假设它的一边长为 xm ，面积为 ym^2 。

- (1) y 随 x 的变化的规律是什么？请分别用函数的表达式、表格、函数的图象表示出；
(2) 由函数的图象指出当 x 取何值时，苗圃的面积最大？最大面积是多少？

★★★★16、(19 年静安一模) 已知: 如图, 反比例函数的图像经过点 A 、 P , 点 $A(6, \frac{4}{3})$, 点 P 的横坐标是 2. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过坐标原点, 且与 x 轴交于点 B , 顶点为 P . 求: (1) 反比例函数的解析式; (2) 抛物线的表达式及 B 点坐标.



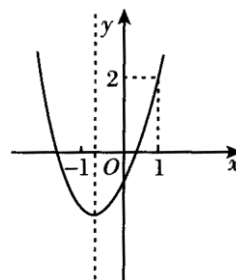
★★★★17、若抛物线的顶点坐标是 $(1, 16)$, 并且抛物线与 x 轴两交点间的距离为 8, 试求该抛物线的关系式, 并求出这条抛物线上纵坐标为 10 的点的坐标.

★★★★★18、已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示,

有下列结论: ① $abc > 0$; ② $a + b + c = 2$; ③ $a > \frac{1}{2}$; ④ $b < 1$. 其中正

确的结论是()

- A. ①② B. ②③
C. ②④ D. ③④



★★★★★19、下列命题中, 正确的是()

- ①若 $a + b + c = 0$, 则 $b^2 - 4ac < 0$;
②若 $b = 2a + 3c$, 则一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根;
③若 $b^2 - 4ac > 0$, 则二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与坐标轴的公共点的个数是 2 或 3;
④若 $b > a + c$, 则一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 有两个不相等的实数根.

- A. ②④ B. ①③ C. ②③ D. ③④

【补充】

★★★★20、心理学家发现，学生对概念的接受能力 y 与提出概念所用的时间 x （单位：min）之间满足函数关系 $y = -0.1x^2 + 2.6x + 43$ ($0 \leq x \leq 30$)， y 值越大，表示接受能力越强。（1） x 在什么范围内，学生的接受能力逐步增强？ x 在什么范围内，学生的接受能力逐步降低？（2）第 10min 时，学生的接受能力是多少？（3）多长时间内，学生的接受能力最强？

★★★★21、已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(m, 0)$ ， $B(n, 0)$ ，且 $m + n = 4$ ， $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ 。（1）求此抛物线的解析式；（2）设此抛物线与 y 轴的交点为 C ，过 C 作一条平行 x 轴的直线交抛物线于另一点 P ，求 $\triangle ACP$ 的面积。

★★★★22、(19 年普陀一模)在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，且 $OB = 3OA$ ，与 y 轴交于点 C ，此抛物线顶点为点 D 。

（1）求抛物线的表达式及点 D 的坐标；

（2）如果点 E 是 y 轴上的一点（点 E 与点 C 不重合），当 $BE \perp DE$ 时，求点 E 的坐标；

（3）如果点 F 是抛物线上的一点，且 $\angle FBD = 135^\circ$ ，求点 F 的坐标。

