

## 目 录

|        |                  |    |
|--------|------------------|----|
| 第 1 讲  | 一元二次方程根与系数关系     | 2  |
| 第 2 讲  | 集合及其表示方法         | 5  |
| 第 3 讲  | 集合之间的包含关系        | 9  |
| 第 4 讲  | 集合的运算            | 15 |
| 第 5 讲  | 命题的形式和等价关系       | 21 |
| 第 6 讲  | 充分和必要条件、子集和推出的关系 | 27 |
| 第 7 讲  | 不等式的基本性质         | 33 |
| 第 9 讲  | 一元二次不等式的解法       | 39 |
| 第 10 讲 | 其他不等式的解法         | 47 |
| 第 11 讲 | 基本不等式            | 54 |
| 第 12 讲 | 函数的概念            | 60 |
| 第 13 讲 | 函数的运算            | 64 |
| 第 14 讲 | 函数的奇偶性           | 70 |
| 第 16 讲 | 函数的单调性           | 75 |

## 第 1 讲 一元二次方程根与系数关系

### 一、知识梳理

探索：  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  这个方程的两根之和，两根之积与各项系数之间有什么关系？请猜想？

问题：对于一元二次方程的一般式  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  是否也具备这个特征？

结论 1：如果  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两个根是  $x_1, x_2$ ，那么  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ，  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

结论 2：如果方程  $x^2 + px + q = 0$  的两个根是  $x_1, x_2$ ，那么  $x_1 + x_2 = -p$ ，  $x_1 x_2 = q$ 。

### 二、典型例题

例 1. 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x + m = 0$  的一根为 2，求另一根和  $m$  的值。

例 2. 已知  $\alpha, \beta$  是方程  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  的两根，不解方程，求下列各式的值。

(1)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$                       (2)  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$

(3)  $\alpha^2 + \beta^2$                       (4)  $|\alpha - \beta|$

(5)  $\alpha^3 + \beta^3$

例 3. 已知  $x_1, x_2$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + px - p^2 = 0$  的两个实数根且  $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 0$ 。

(1) 求证：方程总有两个实数根；

(2) 求  $p$  的值。

例 4. 已知关于  $x$  的二次方程  $x^2 - 2(a-2)x + a^2 - 5 = 0$  有实数根，且两根之积等于两根之和的 2 倍，求  $a$  的值。

例 5. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 3x + k + 1 = 0$  的两根的平方和小于 5, 求  $k$  的取值范围。

例 6. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + (m-2)x + \frac{1}{2}m - 3 = 0$

(1) 求证: 无论  $m$  取什么实数值, 这个方程总是有两个不相等的实数根。

(2) 若这个方程的两个实数根  $x_1, x_2$  满足  $2x_1 + x_2 = m + 1$ , 求  $m$  的值。

### 三、巩固训练

\*1. 判断下面方程后面括号内的两个数是不是方程的两根

(1)  $x^2 - 8x - 20 = 0, (10, -2);$

(2)  $6y^2 + 19y + 10 = 0, (-\frac{2}{3}, -\frac{5}{2});$

(3)  $a^2 - 2\sqrt{2}a + 3 = 0, (\sqrt{2} + \sqrt{5}, -\sqrt{2} + \sqrt{5})$

\*\*2. 如果  $\alpha, \beta$  是方程  $3x^2 - \sqrt{5}x - 2\sqrt{2} = 0$  的两个实数根, 求代数式  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta}$  的值

\*\*3. 已知  $x_1, x_2$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根,  $x_1 + 1, x_2 + 1$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + qx + p = 0$  的两根, 求常数  $p, q$  的值。

\*\*4. 设:  $3a^2 - 6a - 1 = 0$ ,  $3b^2 - 6b - 1 = 0$  且  $a > b$ , 求  $a^2 - b^2$  的值。

\*\*\*5. 关于  $x$  的一元二次方程  $3x^2 - (4m^2 - 1)x + m(m + 2) = 0$  的两实根之和等于两个实根的倒数和, 求  $m$  的值。

\*\*\*\*6. 已知  $x_1, x_2$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + m^2x + n = 0$  的两个实数根;  $y_1, y_2$  是关于  $y$  的方程  $y^2 + 5my + 7 = 0$  的两个实数根, 且  $x_1 - y_1 = 2, x_2 - y_2 = 2$ , 求  $m, n$  的值。

#### 四、课后作业

\*\*1. 设  $x_1, x_2$  是方程  $2x^2 + 4x - 3 = 0$  的两根, 利用根与系数关系求下列各式的值。

$$(1) (x_1 + 1)(x_2 + 1) \qquad (2) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$$

\*\*2. 已知方程  $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$  的一个根为 2, 求另一个根以及  $m$  的值。

\*\*\*3. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 - 3mx + 2(m - 1) = 0$  的两根为  $x_1, x_2$ , 且  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4}$ , 求  $m$  的值。

\*\*\*4. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 - (k + 1)x + k + 2 = 0$  的两根的平方和等于 6, 求  $k$  的值。

\*\*\*\*5. 如果  $\alpha, \beta$  是方程  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  的两个根, 利用根与系数的关系, 求作一个一元二次方程使它的两个根分别等于  $\alpha + \frac{1}{\beta}$  和  $\beta + \frac{1}{\alpha}$ 。

## 第2讲 集合及其表示方法

### 一、知识梳理

#### 1. 集合的概念

(1) 集合：把能够确切指定的一些对象组成的整体叫做集合，简称集。

(2) 元素：集合中的各个对象。

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的

集合用大写的英文字母表示，集合中的元素用小写的英文字母表示

#### 2. 集合的表示法

(1) 列举法：将集合中的元素一一列出来（不考虑元素的顺序），并且写在大括号内，这种表示集合的方法叫做列举法；

(2) 描述法：在大括号内先写出这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线后面写上集合中元素所共同具有的特性，即： $A = \{x \mid x \text{ 满足的性质 } p\}$ ，这种表示集合的方法叫做描述法。

#### 3. 集合的性质

(1) 确定性：组成集合的对象必须是“确切”的，又是人为指定的

(2) 互异性：集合中的元素各不相同，不重复出现

(3) 无序性： $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{1, 3, 2\}$ 、 $\{3, 2, 1\}$ 表示同一集合

#### 3. 元素与集合的关系

如果  $a$  是集合  $A$  的元素，就说  $a$  属于集合  $A$ ，记作  $a \in A$ 。读作“ $a$  属于  $A$ ”

如果  $a$  不是集合  $A$  的元素，就说  $a$  不属于集合  $A$ ，记作  $a \notin A$ 。读作“ $a$  不属于  $A$ ”

#### 4. 集合的种类

有限集：含有有限个元素的集合

无限集：含有无限个元素的集合

#### 5. 常用数集用特定的字母表示

自然数集  $N$ ；不包含 0 的自然数集  $N^*$ ；整数集  $Z$ ；有理数集  $Q$ ；实数集  $R$ ；

以及  $Z^+$   $Z^-$   $Q^+$   $Q^-$   $R^+$   $R^-$

空集：不含有任何元素的集合，记作  $\emptyset$

注：1) 0 是元素； $\{0\}$  是指这个集合中含有一个元素 0； $\{\emptyset\}$  不是空集

## 二、典型例题

\*例 1. 下列对象的全体, 哪些可构成集合

- 1) 上海中学年纪较大的老师
- 2) 很接近 0 的数字
- 3) 著名的足球运动员
- 4) 绝对值最小的实数

\*例 2. 用符号填空

- 1)  $0$  \_\_\_\_\_  $\{0\}$
- 2)  $0$  \_\_\_\_\_  $\emptyset$
- 3)  $0$  \_\_\_\_\_  $N$
- 4)  $0$  \_\_\_\_\_  $Z$
- 5)  $\sqrt{2}$  \_\_\_\_\_  $Q$

\*例 3. 下面给出的四类对象中, 构成集合的是 ( )

- A) 某班个子较高的同学
- B) 相当大的实数
- C) 我国著名数学家
- D) 倒数等于它本身的数

试一试: 下列各项中, 不可以组成集合的是 ( )

- A. 所有的正数
- B. 等于 2 的数
- C. 接近于 0 的数
- D. 不等于 0 的偶数

\*\*例 4. 下列八个关系式 ①  $\{0\} = \phi$  ②  $0 \in \phi$  ③  $\phi \subseteq \{\phi\}$  ④  $\phi \in \{\phi\}$  ⑤  $\{0\} \supseteq \phi$

⑥  $0 \notin \{\{0\}, \phi\}$  ⑦  $\{\phi\} \subseteq \{0\}$  ⑧  $\phi \in \{0\}$  其中正确的个数 ( )

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

\*\*例 5. 用列举法表示下列集合:

- (1) 不大于 10 的非负偶数集;
- (2) 自然数中不大于 10 的质数集;
- (3) 方程  $x^2+2x-15=0$  的解。

\*\*例 6. 用描述法表示下列集合, 并指出它们是有限集还是无限集:

- (1) 所有被 2 整除的数;
- (2) 坐标平面内,  $x$  轴上的点的集合;

\*\*\*例 7. 若集合  $A = \{x \mid (k+1)x^2 + x - k = 0\}$  中只有一个元素, 求  $k$  的值

\*\*\*例 8. 已知:  $A = \{3, 2a+1, a^2+4a\}$ , 且  $5 \in A$ , 求  $a$  的值

### 三、巩固训练

\*1. 描述法表示下列集合:

- (1) 被 5 除余 1 的正整数所构成的集合
- (2) 平面直角坐标系中第一、第三象限的点构成的集合
- (3) 函数  $y = 2x^2 - x + 1$  的图像上所有的点

\*2. 用符号  $\in$  或  $\notin$  填空:

- (1)  $2\sqrt{3} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \{x \mid x < \sqrt{11}\}$
- (2)  $3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \{x \mid x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}^*\}$
- (3)  $(-1, 1) \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \{y \mid y = x^2\}$
- (4)  $(-1, 1) \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \{(x, y) \mid y = x^2\}$

\*\*3. 已知集  $A * B = \{z \mid z = xy, x \in A, y \in B\}$   $A = \{1, 2\}, B = \{0, 2\}$  合

$A * B$  的所有元素之和为 ( )

- A. 0;                      B. 2;                      C. 3;                      D. 6

\*\*4. 用列举法表示下列集合:

- (1)  $\{(x, y) \mid x + y = 5, x \in N, y \in N\}$
- (2)  $\{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0, x \in R\}$

### 四、拓展提高

\*\*\*1. 已知集合  $A = \{x \mid ax^2 + ax + 1 = 0\}$ , 如果  $A = \emptyset$ , 求  $a$  的取值范围.

\*\*\*2. 已知集合  $B = \{x \mid \frac{x+a}{x^2-2} = 1\}$  有唯一元素, 用列举法表示  $a$  的值构成的集合  $A$ .

\*\*\*3. 已知  $A = \{a \mid \frac{6}{3-a} \in N, a \in Z\}$ , 试用列举法表示集合  $A$ .

\*\*\*4. 已知集合  $A = \{x, 2, x^2 - 2x + 3\}, 3 \in A$ , 求  $x$  的值.

## 五、课后作业

\*1. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

- (1)  $2 \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{N}$       (2)  $\sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Q}$       (3)  $0 \underline{\hspace{1cm}} \emptyset$   
 (4)  $0 \underline{\hspace{1cm}} \{0\}$       (5)  $b \underline{\hspace{1cm}} \{a, b, c\}$       (6)  $0 \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{N}^*$

\*2. 写出下列集合中的元素 (并用列举法表示):

- (1) 既是质数又是偶数的整数组成的集合  
 (2) 大于 10 而小于 20 的合数组成的集合

\*\*3. 用描述法表示下列集合:

- (1) 被 5 除余 1 的正整数所构成的集合  
 (2) 平面直角坐标系中第一、第三象限的点构成的集合  
 (3) 函数  $y = 2x^2 - x + 1$  的图像上所有的点

(4)  $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7} \right\}$

\*\*4. 用列举法表示下列集合:

- (1)  $\{(x, y) \mid x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$   
 (2)  $\{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0, x \in \mathbf{R}\}$   
 (3)  $\{x \mid x^2 - 2x + 3 = 0, x \in \mathbf{R}\}$   
 (3)  $\left\{ x \mid \frac{12}{5-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z} \right\}$

\*\*\*5. 设  $A = \{x \mid ax + 1 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 求实数  $a$  的值。

### 第3讲 集合之间的包含关系

#### 一、知识梳理

##### 1. 子集的概念及记法:

如果集合  $A$  的任意一个元素都是集合  $B$  的元素, 我们就说这两个集合有包含关系, 则称集合  $A$  为集合  $B$  的子集 (subset), 记为\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_读作“\_\_\_\_\_”或“\_\_\_\_\_”.

符号语言可表示为: \_\_\_\_\_

图形语言可表示为: \_\_\_\_\_

注意: (1)  $A$  是  $B$  的子集的含义: 任意  $x \in A$ , 能推出  $x \in B$ ;

(2) 不能理解为子集  $A$  是  $B$  中的“部分元素”所组成的集合.

##### 2. 子集的性质:

①  $A \subseteq A$ ; ②  $\emptyset \subseteq A$ ; ③  $A \subseteq B, B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$

##### 3. 真子集的概念及记法:

如果  $A \subseteq B$ , 并且  $A \neq B$ , 这时集合  $A$  称为集合  $B$  的真子集 (proper set),

记为\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_读作“\_\_\_\_\_”或“\_\_\_\_\_”

符号语言可表示为: \_\_\_\_\_

##### 4. 真子集的性质:

①  $\emptyset$  是任何非空集合的真子集, 符号表示为\_\_\_\_\_

② 真子集具备传递性, 符号表示为\_\_\_\_\_

#### 二、典型例题

\*例 1. 写出集合  $\{a, b, c\}$  的所有子集;

\*\*例 2. 确定下列每组两个集合的包含关系和相等关系:

(1)  $A = \{n | n \text{ 为 } 12 \text{ 的正约数}\}$  与  $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(2)  $C = \{m | m = 2k, k \in N^+\}$  与  $D = \{m | m \text{ 为 } 4 \text{ 的正整数倍数}\}$ .

\*\*\*例 3. 若集合  $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$ ,  $B = \{x | mx + 1 = 0\}$ ,  $B \subsetneq A$ , 求  $m$  的值.

\*\*\*例 4. 设集合  $A = \{1, 3, a\}$ ,  $B = \{1, a^2 - a + 1\}$ , 且  $A \supseteq B$ , 求  $a$  的值.

\*\*\*\*例 5.

(1) 已知集合  $A = \{x | -2 < x \leq 5\}$ ,  $B = \{x | -m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$  且  $A \subseteq B$ , 求实数  $m$  的取值范围.

(2) 已知集合  $M = \{x | 2a - 1 < x < 4a, a \in \mathbb{R}\}$ ,  $N = \{x | 1 < x < 2\}$ , 若  $N \subseteq M$ , 求实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

\*例 6. 确定整数  $x, y$ , 使  $\{2x, x + y\} = \{7, 4\}$ .

\*\*例 7. 设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 试求集合  $C$ , 使  $C \subsetneq A$  且  $B \subseteq C$ .

\*\*例 9. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 求:

- (1)  $A$  的子集个数;
- (2)  $A$  的真子集个数;
- (3)  $A$  的非空真子集个数.

### 三、巩固训练

\*1. 下列命题正确的有

- ① 空集没有子集;
- ② 任何集合至少有两个子集;
- ③ 空集是任何集合的子集;
- ④ “0”是空集的一个元素.

\*\*2. (1) 如果  $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in N\}$ ,  $P = \{y | y = b^2 - 4b + 5, b \in N\}$ ,

则  $M, P$  的关系是\_\_\_\_\_.

(2) 若集合  $A = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in Z\}$ ,  $B = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\}$ ,

则  $A, B$  之间的关系是\_\_\_\_\_.

\*\*3. 已知  $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ ,  $B = \{y | y^2 - 2ay + b = 0, y \in R\}$ . 若非空集合  $B \subseteq A$ ,

求实数  $a, b$  的值.

\*\*\*4. 已知集合

$A = \{x | x^2 + x = 6\}$  与  $B = \{y | ay + 1 = 0, y \in R\}$ , 满足  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  所能取的一切值.

\*\*\*5. 已知  $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ ,  $B = \{x | 4x + a < 0\}$ , 当  $B \subseteq A$  的时候, 求实数  $a$  的取值范围

\*\*\*6. 已知集合  $A = \{x, y\}$ ,  $B = \{2x, 2x^2\}$ , 且  $A = B$ , 求集合  $A$

\*\*\*7. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - (a+1)x + a \leq 0\}$  且  $A = B$ , 求  $a$  的值.

\*\*8. 根据要求完成下列各题

(1) 写出满足  $M \subseteq \{a, b\}$  的所有集合  $M$ ;

(2) 写出满足  $\{a\} \subsetneq M \subseteq \{a, b, c\}$  的集合  $M$ .

\*\*9. 集合  $\{1, 3, 5\}$  的子集一共有\_\_\_\_\_个, 真子集共有\_\_\_\_\_个, 非空真子集共有\_\_\_\_\_个.

\*\*\*10. 已知若  $B = \{x | x^2 - 3x + a = 0\}$ , 若  $\{2\} \subsetneq B$ , 则实数  $a$  的值为

#### 四、拓展提高

\*\*\*1. 设  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{x | x \subseteq A\}$ , 问  $A$  与  $B$  什么关系?

\*\*2. 判断下列说法是否正确?

(1)  $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ; (2)  $\emptyset \subset A \subset A$ ; (3)  $\{\text{圆内接梯形}\} \supseteq \{\text{等腰梯形}\}$ ;

(4)  $N \in Z$ ; (5)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ; (6)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

\*\*\*3. 若  $\{1, 2, 3\} \subsetneq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ , 则  $A =$

\*\*\*\*4. 设数集  $A = \{1, 2, a\}$ ,  $B = \{1, a^2 - a\}$ , 若  $A \not\supseteq B$ , 求实数  $a$  的值

\*\*\*\*5.  $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in R\} \subsetneq M \subseteq \{x | x^2 - 1 = 0, x \in R\}$  的集合  $M$  求满足的个数.

#### 五、课后作业

\*1. 判断正误.

(1) 空集没有子集 . ( )

(2) 空集是任何一个集合的真子集 ( )

(3) 任一集合必有两个或两个以上子集 . ( )

(4) 若  $B \subseteq A$ , 那么凡不属于集合  $A$  的元素, 则必不属于  $B$  . ( )

\*\*2. 集合  $A = \{x \mid -1 < x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$ , 写出  $A$  的真子集.

\*\*3. (1) 下列命题正确的是 ( )

- A. 无限集的真子集是有限集                      B. 任何一个集合必定有两个子集  
C. 自然数集是整数集的真子集                      D.  $\{1\}$  是质数集的真子集

(2) 以下五个式子中, 错误的个数为 ( )

- ①  $\{1\} \in \{0, 1, 2\}$     ②  $\{1, -3\} = \{-3, 1\}$     ③  $\{0, 1, 2\} \subseteq \{1, 0, 2\}$   
④  $\emptyset \in \{0, 1, 2\}$     ⑤  $\emptyset \in \{0\}$

- A. 5                      B. 2                      C. 3                      D. 4

(3)  $M = \{x \mid 3 < x < 4\}$ ,  $a = \pi$ , 则下列关系正确的是 ( )

- A.  $a \subseteq M$     B.  $a \notin M$     C.  $\{a\} \in M$     D.  $\{a\} \subseteq M$

\*\*\*4. 判断如下  $A$  与  $B$  之间有怎样的包含或相等关系:

(1)  $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x \mid x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$

(2)  $A = \{x \mid x = 2m, m \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{Z}\}$

\*\*5. 已知  $A \subseteq B$ ,  $A \subseteq C$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $C = \{0, 2, 4, 8\}$ ,

则满足上述条件的集合  $A$  共有多少个?

\*\*6. 已知集合  $P = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ ,  $Q = \{x \mid ax + 1 = 0\}$  满足  $Q \subseteq P$ , 求  $a$  的值.

\*\*\*7. 已知集合  $P = \{x \mid x < 4\}$ ,  $Q = \{x \mid ax < 1\}$  满足  $Q \subseteq P$ , 求  $a$  的取值范围.

\*\*\*8. 设集合  $A = \{x \mid x^2 + 4x = 0, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

\*\*\*9. 集合  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$ ,  $B = \{x \mid m + 2 \leq x \leq 2m\}$ ,

(1) 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $m$  的取值范围.

(2) 当  $x \in \mathbb{Z}$  时, 求  $A$  的非空真子集个数.

(3) 当  $x \in \mathbb{R}$  时, 没有元素  $x$  使  $x \in A$  与  $x \in B$  同时成立, 求实数  $m$  的取值范围.

## 第4讲 集合的运算

### 一、知识梳理

#### 1、交集的概念：

由集合  $A$  和集合  $B$  的所有公共元素组成的集合叫做集合  $A$  与  $B$  的交集，记作  $A \cap B$ 。

即：  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ；

如：  $A = \{1, 2, 5, 10\}$ ，  $B = \{1, 3, 5, 15\}$ ， 则  $A \cap B = \{1, 5\}$ 。

特别地：当集合  $A$  与集合  $B$  没有公共元素时，则它们的交集为空集。

#### 2、并集的概念：

由所有属于集合  $A$  或者集合  $B$  的元素组成的集合叫做集合  $A$  与集合  $B$  的并集，记作  $A \cup B$ 。

即：  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ；

如：  $A = \{1, 2, 5, 10\}$ ，  $B = \{1, 3, 5, 15\}$ ， 则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 10, 15\}$ ；

#### 3、补集的概念：

(1) 全集：在研究集合与集合的关系时，若这些集合都是某个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集。全集常用符号  $U$  表示。

(2) 补集：

设  $U$  为全集，集合  $A$  是  $U$  的子集，则由集合  $U$  中所有不属于  $A$  的元素组成的集合称为  $A$  在全集  $U$  中的补集，记作  $C_U A$ 。读作：集合  $A$  在  $U$  中的补集。即

$$C_U A = \{x \mid x \notin A, x \in U\}.$$

如：  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，  $A = \{1, 3\}$ ， 则  $C_U A = \{2, 4, 5, 6\}$ 。

#### 4、交、并、补的性质：

$$\textcircled{1} A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A; A \cap B \subseteq A \cup B;$$

$$\textcircled{2} A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A;$$

$$\textcircled{3} C_U A \cap C_U B = C_U (A \cup B); C_U B = C_U (A \cap B) .$$

## 二、典型例题

题型 1: 交集与并集的运算

\*例 1: 已知  $A = \{x | -1 < x \leq 2\}$ ,  $B = \{x | -2 \leq x < 0\}$ , 求  $A \cap B$ 。

\*\*例 2: (1) 已知  $A = \{(x, y) | y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(x, y) | y = 2x^2 - x - 1, x \in \mathbb{R}\}$ , 求  $A \cap B$ 。

(2) 已知集合  $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $N = \{y | y = x + 1, x \in \mathbb{R}\}$ , 则  $M \cap N$  等于( )

A. (0, 1), (1, 2)      B.  $\{(0, 1), (1, 2)\}$

C.  $\{y | y = 1 \text{ 或 } y = 2\}$       D.  $\{y | y \geq 1\}$

\*\*例 3: 设集合  $A = \{-4, 2m-1, m^2\}$ ,  $B = \{9, m-5, 1-m\}$ , 又  $A \cap B = \{9\}$ , 求实数  $m$  的值.

\*\*例 4: 已知集合  $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x + r = 0\}$ , 且  $A \cap B = \{1\}$ ,  $A \cup B = \{-2, 1, 3\}$ ,

求实数  $p, q, r$  的值。

\*\*\*例 5: 已知集合  $P = \{x | x^2 + (m+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ , 若  $P \cap \{\text{正实数}\} = \emptyset$ ,

求实数  $m$  的取值范围.

题型 2: 全集与补集的运算

\*例 1: 已知全集  $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $A = \{a, e, f\}$ ,  $B = \{a, b, c, e\}$ , 求  $A \cup B$ 、 $A \cap B$ 、 $C_U A \cup C_U B$ ,  $C_U (A \cap B)$

\*\*例 2: 若集合  $A = \{x | x > 2\}$ , 当全集  $U$  分别取下列集合时, 写出  $C_U A$ 。

①  $U = \{x | x \in R\}$       ②  $U = \{x | x \geq 0\}$       ③  $U = \{x | x \geq 2\}$

\*\*例 3: 已知  $U = \{-3, 0, 1, 2\}$ ,  $A = \{a^2, a+1, -3\}$ ,  $C_U A = \{2\}$ , 求  $a$  的值。

\*\*\*例 4: 已知集合  $A$ 、 $B$  是全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  的子集,  $A \cap B = \{2\}$ ,

$(C_U A) \cap (C_U B) = \{1, 9\}$ ,  $(C_U A) \cap B = \{4, 6, 8\}$ , 求  $A$ ,  $B$ 。

\*\*\*\*例 5: 已知  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$ , 其中  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ,  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4 \in N_+$ . 若  $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ , 且  $a_1 + a_4 = 10$ ,  $A \cup B$  中所有元素之和为 124, 求集合  $A$ 、 $B$ 。

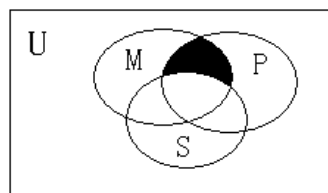
### 三、巩固训练

\*1. 已知  $A, B, C$  是三个集合, 若  $A \cup B = B \cap C$ , 则一定有 ( )

- A.  $A \subseteq C$       B.  $C \subseteq A$       C.  $C \neq A$       D.  $A = \emptyset$

\*\*1. 如果  $U$  是全集,  $M, P, S$  是  $U$  的三个子集, 则阴影部分所表示的集合为 ( )

- (A)  $(M \cap P) \cap S$ ;  
 (B)  $(M \cap P) \cup S$ ;  
 (C)  $(M \cap P) \cap (C_U S)$   
 (D)  $(M \cap P) \cup (C_U S)$



\*\*3. 设  $A, B$  是两个非空的集合, 定义集合  $A * B = \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$ , 依据上述规定,

集合  $A * (A * B) =$  ( )

- A.  $A \cap B$       B.  $A \cup B$       C.  $A$       D.  $B$

\*\*4. 已知集合  $M = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid x - y = 4\}$ , 那么集合  $M \cap N$  为\_\_\_\_\_

\*\*5. 设  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{3, 4, 5\}$ ,  $B = \{4, 7, 8\}$ . 则:

$$(C_U A) \cap (C_U B) = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(C_U A) \cup (C_U B) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

\*\*7. 某班有学生 55 人, 其中音乐爱好者 34 人, 体育爱好者 43 人, 还有 4 人既不爱好体育也不爱好音乐, 则班级中即爱好体育又爱好音乐的有\_\_\_\_\_人.

\*\*8. 设  $A, B$  都是不超过 9 的正整数组成的全集  $U$  的子集,  $(C_U A) \cap (C_U B) = \{1, 9\}$ ,

$(C_U A) \cap B = \{4, 6, 8\}$ , 求集合  $A, B$ 。

#### 四、拓展提高

\*\*1. 已知  $A = \{x | x < 3\}$ ,  $B = \{x | x > a\}$ , (1)  $A \cap B = \emptyset$ , (2)  $A \cup B = R$ ;

分别求  $a$  的取值范围。

\*\*2. 已知  $A = \{x | -1 \leq x < a\}$ ,  $B = \{x | 1 \leq x < 5\}$ ,  $A \cup B = \{x | -1 \leq x < 5\}$ ,

求  $a$  的取值范围。

\*\*\*3. 已知  $A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 5\}$ ,  $B = \{x | a \leq x \leq 8 + a\}$ ,  $A \cup B = R$ , 求  $a$  的取值范围。

\*\*\*\*4. 已知  $A = \{x | -2 < x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$ ,  $B = \{x | a \leq x \leq b\}$ ,  $A \cup B = \{x | x > -2\}$ ,

$A \cap B = \{x | 0 \leq x < 1\}$ , 求  $a, b$  的值。

#### 五、回家作业

\*1. 已知全集  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $A = \{c, d, e\}$ ,  $B = \{a, c, f\}$ , 那么集合  $\{b, g, h\}$  等于 ( )

A.  $A \cup B$       B.  $A \cap B$       C.  $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$       D.  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

\*2. 已知集合  $P = \{a, b, c, d, e\}$ , 集合  $Q \subsetneq P$ , 且  $a \in (P \cap Q)$ ,  $b \notin (P \cap Q)$ , 则满足上述条件的集合  $Q$  的个数为 ( )

A.7      B.8      C.15      D.24

\*\*3. 已知集合  $M$  有 3 个真子集, 集合  $N$  有 7 个真子集, 那么  $M \cup N$  的元素个数为 ( )

A.有 5 个元素      B.至多有 5 个元素      C.至少有 5 个元素      D.元素个数不能确定

\*\*6. 设全集  $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A \cap C_I B = \{1, 2\}$ , 则集合  $C_I A \cap B$  的个数为 ( )

- A.3                      B.4                      C.7                      D.8

\*\*7. 设  $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 若  $A \cap B = \{2\}$ ,  $(C_U A) \cap B = \{4\}$ ,  $(C_U A) \cap (C_U B) = \{1, 5\}$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $3 \notin A$  且  $3 \notin B$       B.  $3 \notin A$  且  $3 \in B$       C.  $3 \notin B$  且  $3 \in A$       D.  $3 \in A$  且  $3 \in B$

\*\*\*8. 已知集合  $M=\{(x, y) | x+y=3\}$ ,  $N=\{(x, y) | x-y=5\}$ , 那么集合  $M \cap N$  为 ( )

- A.  $x=4, y=-1$       B.  $(4, -1)$       C.  $\{4, -1\}$       D.  $\{(4, -1)\}$

\*\*\*9. 设集合  $A=\{x | -1 < x \leq 3\}$ ,  $B=\{y | y \subseteq A\}$ , 则 A、B 之间的关系为 ( )

- A.  $B \in A$                       B.  $A \subseteq B$                       C.  $A \in B$                       D.  $B \subseteq A$

\*\*\*11. 已知集合  $A=\{-1, 1\}$ ,  $B=\{x | mx=1\}$ , 且  $A \cup B = A$ , 则 m 的值为 ( )

- A. 1                      B. -1                      C. 1 或 -1                      D. 1 或 -1 或 0

\*\*\*12. 若集合  $P=\{x | 3 < x \leq 22\}$ , 非空集合  $Q=\{x | 2a+1 \leq x < 3a-5\}$ , 则能使  $Q \subseteq (P \cap Q)$  成立的所有实数 a 的取值范围为 ( )

- A.  $(1, 9)$                       B.  $[1, 9]$                       C.  $(6, 9)$                       D.  $[6, 9)$

\*\*\*13. 高一某班有学生 45 人, 其中参加数学竞赛的有 32 人, 参加物理竞赛的有 28 人, 另外有 5 人两项竞赛均不参加, 则该班既参加数学竞赛又参加物理竞赛的有\_\_\_\_\_人.

\*\*\*\*17. 已知全集  $U=\{x | -4 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ,  $A=\{-1, a^2+1, a^2-3\}$ ,  $B=\{a-3, a-1, a+1\}$ , 且  $A \cap B = \{-2\}$ , 求  $C_U (A \cup B)$ .

## 第5讲 命题的形式和等价关系

### 一、知识梳理

1. 命题的定义：用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的语句叫做命题。

2. 推出关系：

如果事件  $p$  成立可以推出  $q$  成立，就用“ $p \Rightarrow q$ ”表示，即以  $p$  为条件  $q$  为结论的命题是真命题；反之该命题为假命题。

推出关系具有传递性  $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma$ , 则  $\alpha \Rightarrow \gamma$ .

3. 四种命题形式

原命题：如果  $\alpha$ ，那么  $\beta$ ；

逆命题：如果  $\beta$ ，那么  $\alpha$ ；

否命题：如果  $\bar{\alpha}$ ，那么  $\bar{\beta}$ ；

逆否命题：如果  $\bar{\beta}$ ，那么  $\bar{\alpha}$ 。

注意：对一个命题进行否定时，命题中的关键性词语也要否定；

|       |   |   |            |    |     |     |      |       |      |
|-------|---|---|------------|----|-----|-----|------|-------|------|
| 词语    | 或 | 且 | 大于 $>$     | 是  | 都是  | 所有的 | 任意一个 | 至少一个  | 至多一个 |
| 词语的否定 | 且 | 或 | 不大于 $\leq$ | 不是 | 不都是 | 某些  | 某个   | 一个也没有 | 至少两个 |

4. 等价命题：如果两个命题， $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ ，那么这两个命题互为等价命题。

原命题  $\Leftrightarrow$  逆否命题 （逆命题  $\Leftrightarrow$  否命题）

5. 命题的逻辑关系：充分、必要、充要条件

如果  $A \Rightarrow B$ ，那么  $A$  是  $B$  的充分条件， $B$  是  $A$  的必要条件。

如果  $A \Leftrightarrow B$ ，那么  $A$  是  $B$  的充要条件。

6. 子集与推出关系.

设  $A, B$  是非空集合， $A = \{a | a \text{ 具有性质 } \alpha\}$ ， $B = \{b | b \text{ 具有性质 } \beta\}$ ，则  $A \subseteq B$  与  $\alpha \Rightarrow \beta$  等价。

### 二、典型例题

题型 1：命题的判定、推出符号的运用

\*例 1. 下列语句中，属于命题的是 （ ）

(1) 2 是质数；(2) 这朵花多好看呀！(3) 明天下午有会吗？(4) 请关上门；(5)  $x + y > 5$ ；

\*\*例 2. 用推出  $\Rightarrow$ 、 $\Leftarrow$ 、 $\Leftrightarrow$  符号连接下列事件.

1)  $x \in N$  \_\_\_\_\_  $x^2 \in N$ ；      2)  $a^2 > b^2$  \_\_\_\_\_  $|a| > |b|$ ；

3)  $x^2 = 9$  \_\_\_\_\_  $x = 3$  或  $x = -3$ ；      4)  $A \cap B = U$  \_\_\_\_\_  $A = U$  且  $B = U$ 。

题型 2: 命题的四种形式及相互关系

\*例 3. 设原命题是“若  $ab \leq 0$ , 则  $a \leq 0$  或  $b \leq 0$ ”, 写出它的逆命题、否命题与逆否命题; 并分别判断他们的真假;

\*\*例 4. 已知命题  $p$ : 方程  $x^2 + mx + 1 = 0$  有两个不相等的实负根, 命题  $q$ : 方程  $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$  无实根; 若  $p$  与  $q$  中有且仅有一个命题为真命题, 求实数  $m$  的取值范围.

题型 3: 充分条件与必要条件

\*\*例 5. 在空格内填上“充分非必要”, “必要非充分”, “充要”, “既非充分又非必要”:

1. “ $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的\_\_\_\_\_条件;
2. “ $x^2 + 5x + 6 \neq 0$ ”是“ $x \neq -2$ ”的\_\_\_\_\_条件;
3. “ $|x| > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的\_\_\_\_\_条件;
4. “ $a \neq 0$ ”是“方程  $ax = b$  有唯一解”的\_\_\_\_\_条件;
5. 对于集合  $A, B$ , “ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in A \cap B$ ”的\_\_\_\_\_条件;
6. 对于集合  $A, B, C$ , “ $A = B$ ”是“ $A \cap C = B \cap C$ ”的\_\_\_\_\_条件;

\*\*例 6. 已知  $p$  是  $r$  的充分不必要条件,  $s$  是  $r$  的必要条件,  $q$  是  $s$  的必要条件,

那么  $p$  是  $q$  成立的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

\*\*例 7. (1) 已知命题甲:  $a + b \neq 4$ , 命题乙:  $a \neq 1$  且  $a \neq 3$ ,

则命题甲是命题乙的\_\_\_\_\_条件

(2) 方程  $x^2 - x + m = 0$  有的一个充分条件可以是\_\_\_\_\_

#### 题型 4、子集与推出关系

**\*\*例 8.** 试用子集与推出关系说明  $\alpha$  是  $\beta$  的什么条件。

(1)  $\alpha: x = -2, \beta: x^2 - 4 = 0;$

(2)  $\alpha: |x| > 2, \beta: x < -2$

(3)  $\alpha: 1 \leq x \leq 3, \beta: m+1 \leq x \leq 2m+4, m \in R$

**\*\*\*例 9.** 已知  $\alpha: 1 \leq x \leq 3, \beta: m+1 \leq x \leq 2m+4, m \in R,$

分别求满足下列关系的实数  $m$  的取值范围。

(1)  $\alpha$  是  $\beta$  的充分非必要条件; (2)  $\alpha$  是  $\beta$  必要非充分条件;

**\*\*\*例 10.** 已知  $\alpha: m+1 \leq x \leq 2m+4, m \in R, \beta: -3 \leq x \leq 3,$  是否存在实数  $m,$

使  $\alpha$  是  $\beta$  的充分不必要条件? 若存在, 求出  $m$  的取值范围, 不存在, 说明理由。

**\*\*\*\*例 11.** 设集合  $A = \{x | x = a^2 + 2a + 4, a \in R\}, B = \{y | y = b^2 - 4b + 3, b \in R\};$

$\alpha: x \in A, \beta: x \in B,$  试判断  $\alpha$  是  $\beta$  的什么条件, 说明理由。

### 三、巩固训练

\*1. 给出下列四个命题: ① 垂直于同一条直线的两条直线平行; ②若  $\sqrt{x^2} = 1$ , 则  $x = \pm 1$ ;  
③命题“两个全等的三角形面积相等”的否命题; ④平行于同一平面的两条直线平行. 其中真命题有\_\_\_\_\_.

\*2. 命题“若  $ab = 0$ , 则  $a, b$  中至少有一个为零”的逆否命题是\_\_\_\_\_.

\*\*3. “当  $c > 0$  时, 若  $a > b$ , 则  $ac > bc$ ”的否命题是\_\_\_\_\_.

\*\*4. 已知  $p$  是  $r$  的充分非必要条件,  $s$  是  $r$  的必要条件,  $q$  是  $s$  的必要条件,

那么  $p$  是  $q$  成立的 ( )

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

\*\*5. “ $a + b$  是偶数”的\_\_\_\_\_条件是“ $a$  和  $b$  都是偶数” ( )

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

\*\*\*6.  $\begin{cases} x_1 > 3 \\ x_2 > 3 \end{cases}$  是  $\begin{cases} x_1 + x_2 > 6 \\ x_1 x_2 > 9 \end{cases}$  的\_\_\_\_\_条件.

\*\*7.  $0 < x < 5$  是  $|x - 2| < 3$  的\_\_\_\_\_条件.

\*\*8. 方程  $x^2 - x + m = 0$  有根的一个充分非必要条件是\_\_\_\_\_.

\*\*9. “ $x^2 - x - 6 \neq 0$ ”是“ $x \neq 3$ ”的 ( )

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

\*\*\*10. 判读命题：“若  $a$  与  $b$  的积不是有理数，则  $a, b$  至少有一个不是有理数”的真假，并说明理由.

\*\*\*11. 证明： $ac < 0$  是关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有两个不同的实数根的充分非必要条件.

#### 四、拓展提高

\*1. 已知  $a, b, c \in R$ ，“ $b^2 - 4ac < 0$ ”是“函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的图像恒在  $x$  轴上方”的 ( )

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件  
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

\*\*2. 钱大姐常说“便宜没好货”，她这句话的意思是：“不便宜”是“好货”的 ( )

A. 充分条件 B. 必要条件  
C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

\*\*\*3. 求证：二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有一根为 1 的充要条件是  $a + b + c = 0$

\*\*\*4. 已知命题  $p$ : 方程  $a^2x^2 + ax - 2 = 0$  在  $[-1, 1]$  上有解；命题  $q$ : 只有一个实数满足不等式  $x^2 + 2ax + 2a \leq 0$ . 若  $p, q$  都是假命题，求  $a$  的取值范围.

## 五、回家作业

\*1. 判断下列命题的真假，并说明理由。

- (1)  $\sqrt{2}$  是有理数；(2) 若集合  $A \cap B \neq \emptyset, B \subset C$ , 则集合  $A \cap C \neq \emptyset$ ；  
 (3) 若一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  满足  $ac < 0$ ，那么这个方程有实数根；  
 (4) 设  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ ，如果  $ab$  是  $c$  的倍数，那么  $a$ 、 $b$  中至少有一个  $c$  的倍数。

\*2. 下列命题为真命题的为 ( )

A、若  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ , 则  $x = y$

B、若  $x^2 = 1$ , 则  $x = 1$

C、若  $x = y$ , 则  $\sqrt{x} = \sqrt{y}$

D、若  $x < y$ , 则  $x^2 < y^2$

\*\*3. 已知  $a, b$  是实数，则“ $a > 0$  且  $b > 0$ ”是“ $a + b > 0$  且  $ab > 0$ ”的 ( )

A、充分而不必要条件

B、必要而不充分条件

C、充分必要条件

D、既不充分也不必要条件

\*\*\*4. 设  $x \in \mathbb{R}$ ，则“ $x = 1$ ”是“ $x^3 = x$ ”的 ( )

A、充分不必要条件

B、必要不充分条件

C、充要条件

D、既不充分也不必要条件

\*\*\*5. 命题“若  $a > b$ ，则  $a + 1 > b$ ”的逆否命题是 ( )

A、若  $a + 1 \leq b$ ，则  $a > b$

B、若  $a + 1 < b$ ，则  $a > b$

C、若  $a + 1 \leq b$ ，则  $a \leq b$

D、若  $a + 1 < b$ ，则  $a < b$

\*\*\*6. 命题“若一个数是负数，则他的平方是正数”的逆命题是 ( )

A、“若一个数是负数，则它的平方不是正数”

B、“若一个数的平方是正数，则它是负数”

C、“若一个数不是负数，则它的平方不是正数”

D、“若一个数的平方不是正数，则它不是负数”

\*\*\*7. “ $a < 0$ ”是方程“ $ax^2 + 2x + 1 = 0$ ”至少有一个负数根的 ( )

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

\*\*8. 写出命题“两个有理数的和为有理数”的逆命题、否命题和逆否命题，并判断真假。

\*\*9. 在空格内添入“充分非必要条件”等四种结论之一。

- (1) “ $x^2 - 4 = 0$ ”是“ $x - 2 = 0$ ”的\_\_\_\_\_;
- (2) “ $x > 1$ ”是“ $x < 3$ ”的\_\_\_\_\_;
- (3) 方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ , “ $ac < 0$ ”是“方程有实根”的\_\_\_\_\_;
- (4) “ $x^2 + y^2 \neq 0$ ”是“ $x, y$  不全为零”的\_\_\_\_\_;
- (5) “ $x^2 + y^2 < 1$ ”是“ $|x| < 1, |y| < 1$ ”的\_\_\_\_\_;
- (6) “ $|x + y| = |x| + |y|$ ”是“ $xy > 0$ ”的\_\_\_\_\_;

\*\*10. 设 A 是 B 的充分不必要条件, B 是 C 的充要条件, D 是 C 的必要不充分条件, 则 D 是 A 的什么条件?

\*\*\*11. 设  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则  $|x + y| = |x| + |y|$  成立的一个充分条件可以是\_\_\_\_\_

\*\*\*12. 已知条件  $p: x > 1$ , 条件  $q: \frac{1}{x} < 1$ , 则  $p$  是  $q$  成立的 ( )

- |           |              |
|-----------|--------------|
| A、充分非必要条件 | B、必要非充分条件    |
| C、充要条件    | D、既非充分也非必要条件 |

\*\*\*\*14. 设关于  $x$  的实系数一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

- (1) 方程有一个正根、一个负根的充要条件是\_\_\_\_\_;
- (2) 方程有两个正根的充要条件是\_\_\_\_\_;
- (3) 方程有两个负根的充要条件是\_\_\_\_\_;
- (4) 方程有一个正根、一根是零的充要条件是\_\_\_\_\_;
- (5) 方程的两根都比 2 小的充要条件是\_\_\_\_\_。

## 第6讲 充分和必要条件、子集和推出的关系

### 一、知识梳理

#### (一) 充分和必要条件

##### 1、充分条件、必要条件:

一般的,如果命题 $\alpha$ 成立,可以推出命题 $\beta$ 也成立,即 $\alpha \Rightarrow \beta$ ,那么 $\alpha$ 叫做 $\beta$ 的充分条件,同时 $\beta$ 叫做 $\alpha$ 的必要条件(也就是说,为了使 $\beta$ 成立,具备条件 $\alpha$ 就足够了)。

##### 2、充分不必要条件、必要不充分条件:

一般的,如果命题 $\alpha$ 成立,可以推出命题 $\beta$ 也成立,且命题 $\beta$ 成立,推不出命题 $\alpha$ 成立,那么 $\alpha$ 叫做 $\beta$ 的充分不必要条件,同时 $\beta$ 叫做 $\alpha$ 的必要不充分条件。

##### 3、充要条件:

如果既有 $\alpha \Rightarrow \beta$ ,又有 $\beta \Rightarrow \alpha$ ,即有 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ,那么 $\alpha$ 既是 $\beta$ 的充分条件,又是 $\beta$ 的必要条件,则称 $\alpha$ 是 $\beta$ 的充分且必要条件,简称充要条件。

#### (二)、子集与推出关系:

1、设 $A = \{a | a \text{具有性质}\alpha\}$ ,  $B = \{b | b \text{具有性质}\beta\}$ , 则 $A \subseteq B \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow \beta$ 。

##### 2、子集与推出关系的各种表述形式:

已知集合 $A = \{a | a \text{具有性质}\alpha\}$ ,  $B = \{b | b \text{具有性质}\beta\}$

①若 $A \subseteq B$ , 则 $\alpha$ 是 $\beta$ 的充分条件;      ②若 $A \subsetneq B$ , 则 $\alpha$ 是 $\beta$ 的充分不必要条件;

③若 $A \supseteq B$ , 则 $\alpha$ 是 $\beta$ 的必要条件;      ④若 $A \supsetneq B$ , 则 $\alpha$ 是 $\beta$ 的必要不充分条件;

⑤若 $A = B$ , 则 $\alpha$ 是 $\beta$ 的充要条件;      ⑥若 $A \not\subseteq B, B \not\subseteq A$  则 $\alpha$ 是 $\beta$ 的既不充分也不必要条件;

3、推出关系具有传递性: 若 $\alpha \Rightarrow \beta$ ,  $\beta \Rightarrow \gamma$ , 则 $\alpha \Rightarrow \gamma$ , 若 $\alpha \Rightarrow \beta$ ,  $\beta \Rightarrow \alpha$ , 则 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ , 称 $\alpha$ 与 $\beta$ 等价。

### 二、例题解析

#### 题型 1.判断充分、必要条件

\*\*例 1: (1) 设全集为 $U$ , 则“ $A \cap B = \phi$ ”的充要条件是“ $A \cap C_U B =$ \_\_\_\_\_”。

(2) “ $|x+y|=|x|+|y|$ ” 是 “ $xy>0$ ” 的 ( )

- (A) 充要条件 (B) 充分非必要条件  
(C) 必要非充分条件 (D) 既非充分又非必要条件

**\*\*例 2.** (1) 条件 “ $x \neq 3$  或  $y \neq 5$ ” 是条件 “ $x+y \neq 8$ ” 的什么条件?

(2) 设  $a_1$ 、 $b_1$ 、 $c_1$ 、 $a_2$ 、 $b_2$ 、 $c_2$  均为非零实数. 不等式  $a_1x^2+b_1x+c_1>0$  和

$a_2x^2+b_2x+c_2>0$  的解集分别为  $M$  和  $N$ , 那么 “ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M=N$ ” 的 ( )

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

题型 2、写出符合要求的条件

**\*例 3.** (1) 写出  $x>0$  的一个必要非充分条件;

(2) 写出  $x>0$  的一个充分非必要条件。

**小结:** 把充要条件中的条件范围缩小得到的条件是充分不必要条件;把充要条件中的条件范围扩大得到的条件是必要不充分条件.

**\*\*例 4.** 设  $A=\{y|y=x^2-4x+6\}$ ,  $B=\{x|x>a\}$ , 若  $B \subset A$ ;

(1) 求  $a$  的取值范围; (2) 写出它的一个充分非必要条件。

题型 3、求充要条件

**\*\*\*例 5.** 已知实系数一元二次方程  $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ , “ $b^2-4ac=0$ ” 是 “方程

$ax^2+bx+c=0$  有两个相等的实数根” 的什么条件? 为什么?

**\*\*例 6.** 已知实系数一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ,

试写出下列各条件的一个充要条件:

- (1) 方程有一个正根、一个负根;
- (2) 方程有两个正根;
- (3) 方程有两个不同负根;
- (4) 方程有一个正根、一个根为 0;
- (5) 方程有一个根大于 1、一个根小于 1。

#### 题型 4、证明充要条件

**\*\*例 7.** 求证: 二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有实根  $x=1$  的充要条件是  $a+b+c=0$ 。

**\*\*\*\*例 8.** 已知关于  $x$  的实系数二次方程  $x^2 + ax + b = 0$  有两个实数根  $\alpha, \beta$ , 证明:

“ $|\alpha| < 2$  且  $|\beta| < 2$ ” 是 “ $2|a| < 4+b$  且  $|b| < 4$ ” 的充要条件。

#### 题型 5、子集与推出关系

**\*\*\*例 9.** 设  $\alpha: -1 < x < 2$ ;  $\beta: x^2 - x - 2a^2 = 0$ , 若  $\alpha$  是  $\beta$  的必要条件, 求实数  $a$  的取值范围。

**\*\*例 10.** 设  $\alpha: 1 \leq x \leq 3$ ,  $\beta: m+1 \leq x \leq 2m+4$ ,  $m \in R$ ,  $\alpha$  是  $\beta$  的充分条件, 求  $m$  的范围。

**\*\*\*例 11.** 设  $\alpha: 2 \leq x < 3$ ,  $\beta: x \leq m-1$  或  $x > m+1$ ,  $m \in R$ ,  $\alpha$  是  $\beta$  的充分条件, 求  $m$  的范围。

### 三、基础训练

\*1.  $x > 0$  , 且  $y > 0$  的一个必要非充分条件是  
( )

- A)  $xy = 0$       B)  $x + y > 0$       C)  $x = 1, y = 1$       D)  $x - y > 0$

\*2. 试用子集与推出的关系来说明  $\alpha$  是  $\beta$  的什么条件。

(1)  $\alpha: x = 1$  且  $y = 2$ ;       $\beta: x + y = 3$

(2)  $\alpha: a + b > 0$ ;       $\beta: a > 0, b > 0$

(3)  $\alpha: xy > 0$ ;       $\beta: |x + y| = |x| + |y|$

\*\*3. 从“充分而不必要条件”，“必要而不充分条件”或“充要条件”中选出适当的一种填空：

(1)  $x \in A \cap B$  是  $x \in A$  的\_\_\_\_\_；

(2)  $x \in A \cup B$  是  $x \in B$  的\_\_\_\_\_；

(3)  $x \in (\complement_U A)$  是  $x \in U$  的\_\_\_\_\_；

(4)  $x \in (\complement_U A) \cup A$  是  $x \in A$  的\_\_\_\_\_；

(5) “ $A = \emptyset$ ” 是 “ $A \cup B = B$ ” 的\_\_\_\_\_；

(6) “ $A \subsetneq B$ ” 是 “ $A \cap B = A$ ” 的\_\_\_\_\_；

(7) “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in A \cap B$ ” 的\_\_\_\_\_；

(8) “四边形的对角线互相垂直平分” 是 “四边形为矩形” 的\_\_\_\_\_；

(9) “四边形内接于圆” 是 “四边形对角互补” 的\_\_\_\_\_；

(10) 设  $\odot O_1$ ,  $\odot O_2$  的半径为  $r_1$ ,  $r_2$ , 则 “ $O_1 O_2 = r_1 + r_2$ ” 是 “两圆外切” 的\_\_\_\_\_。

\*4. 写出命题  $p: (x-1)(x+2) < 0$  的一个必要不充分条件\_\_\_\_\_。

\*\*5. 命题  $A: |x-1| < 3$ , 命题  $B: (x+2)(x+a) < 0$ ; 若  $A$  是  $B$  的充分而不必要条件, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_

\*\*6. 集合  $A = \{x | -2 < x < 5\}$ , 集合  $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 且  $B$  为非空集合, 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

\*\*\*7. 求方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个负根的充要条件.

\*\*\*8. 已知  $a, b \in R$ , 求证: “关于  $x$  的不等式  $ax + b > 0$  对一切实数  $x$  都成立” 的充要条件是:  $a = 0, b > 0$ 。

#### 四、拓展提高

\*1. “ $x_1 > 3$  且  $x_2 > 3$ ” 是 “ $x_1 + x_2 > 6$  且  $x_1 x_2 > 9$ ” 的充要条件吗? 若是, 请说明理由; 若不是, 请给出 “ $x_1 > 3$  且  $x_2 > 3$ ” 的充要条件.

\*\*\*2. 已知关于  $x$  的一元二次方程: (1)  $mx^2 - 4x + 4 = 0$ , (2)  $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$   
求方程 (1) 和 (2) 都有整数解的充要条件. ( $m \in Z$ )

\*\*\*3. 已知  $p: \left\{ x \left| \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-10 \leq 0 \end{cases} \right. \right\}$ ,  $q: \{x | 1-m \leq x \leq 1+m, m > 0\}$ , 若  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件, 求实数  $m$  的取值范围.

\*\*4. 已知关于  $x$  的方程  $(1-a)x^2 + (a+2)x - 4 = 0$ ,  $a \in R$ . 求:

(1) 方程有两个正根的充要条件;

(2) 方程至少有一个正根的充要条件.

#### 四、回家作业

1. 设集合  $M = \{x | 0 < x \leq 3\}$ ,  $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$ , 则 “ $a \in M$ ” 是 “ $a \in N$ ” 的\_\_\_\_\_

条件.

2. 已知  $p$  是  $r$  的充分不必要条件,  $s$  是  $r$  的必要条件,  $q$  是  $s$  的必要条件. 那么  $p$  是  $q$  的:

( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 过原点的充要条件是\_\_\_\_\_.

4. 若  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $x > 1$  的一个必要不充分条件是\_\_\_\_\_.

5. 用 “充分不必要条件, 必要不充分条件, 充要条件和既不充分也不必要条件” 填空.

(1)  $\begin{cases} x > 2, \\ y > 2. \end{cases}$  是  $\begin{cases} x + y > 4, \\ xy > 4. \end{cases}$  的\_\_\_\_\_条件;

(2)  $(x-4)(x+1) \geq 0$  是  $\frac{x-4}{x+1} \geq 0$  的\_\_\_\_\_条件;

(3)  $x + y \neq 3$  是  $x \neq 1$  或  $y \neq 2$  的\_\_\_\_\_条件.

6. 已知命题 “ $a \geq b \Rightarrow c > d$ ” 和 “ $a < b \Leftrightarrow e \leq f$ ” 都是真命题, 则 “ $c \leq d$ ” 是 “ $e \leq f$ ” 的\_\_\_\_\_条件。

7. 设集合  $M = \{x | x > 2\}$ ,  $P = \{x | x < 3\}$ , 则 “ $x \in (M \cup P)$ ” 是 “ $x \in (M \cap P)$ ” 的\_\_\_\_\_条件.

8. 已知  $p$  是  $r$  的充分条件而不是必要条件,  $q$  是  $r$  的充分条件,  $s$  是  $r$  的必要条件,  $q$  是  $s$  的必要条件. 现有下列命题:

①  $s$  是  $q$  的充要条件; ②  $p$  是  $q$  的充分条件而不是必要条件; ③  $r$  是  $q$  的必要条件而不是充分条件; ④  $\neg p$  是  $\neg s$  的必要条件而不是充分条件; ⑤  $r$  是  $s$  的充分条件而不是必要条件, 其中正确命题序号是\_\_\_\_\_.

9. 已知条件  $p: A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + ax + 1 \leq 0\}$ , 条件  $q: B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ . 若  $\neg q$  是  $\neg p$  的充分不必要条件, 求实数  $a$  的取值范围.

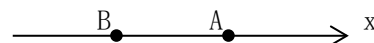
## 第7讲 不等式的基本性质

### 一、知识梳理

#### 1、不等式公理

我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的。在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大。

在右图中，点A表示实数a，点B表示实数b，点A在点B右边，那么 $a > b$ 。



而 $a - b$ 表示a减去b所得的差，由于 $a > b$ ，则差是一个正数，即 $a - b > 0$ 。

命题：“若 $a > b$ ，则 $a - b > 0$ ”成立；逆命题“若 $a - b > 0$ ，则 $a > b$ ”也正确。

类似地：若 $a < b$ ，则 $a - b < 0$ ；若 $a = b$ ，则 $a - b = 0$ 。逆命题也都正确。

结论：(1) “ $a > b$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $a - b > 0$ ”

(2) “ $a = b$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $a - b = 0$ ”

(3) “ $a < b$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $a - b < 0$ ” ——以上三条即为比较大小的依据：“作差比较法”。

正负数运算性质：

- (1) 正数加正数是正数；(2) 正数乘正数是正数；(3) 正数乘负数是负数；(4) 负数乘负数是正数。

#### 2、不等式的基本性质

(1) 如果 $a > b$ ，那么 $b < a$ ，如果 $b < a$ ，那么 $a > b$ 。（对称性）

(2) 如果 $a > b$ ，且 $b > c$ ，那么 $a > c$ 。（传递性）

(3) 如果 $a > b$ ，那么 $a + c > b + c$ 。即 $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ 。

(4) 如果 $a > b$ ，且 $c > d$ ，那么 $a + c > b + d$ 。（相加法则）

(5) 如果 $a > b$ ，且 $c > 0$ ，那么 $ac > bc$ ；

如果 $a > b$ ，且 $c < 0$ ，那么 $ac < bc$

(6) 如果 $a > b > 0$ ，且 $c > d > 0$ ，那么 $ac > bd$ 。（相乘法则）

(7) 若 $a > b > 0$ ，则 $a^n > b^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  且  $n > 1$ )

(8) 若 $a > b > 0$ ，则 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$  ( $n \in \mathbb{N}$  且  $n > 1$ )

## 二、例题解析

### 题型 1、利用不等式的性质判断

**\*例 1**、若  $a < b < 0$ ，则下列不等关系中不能成立的是（ ）

A.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$     B.  $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$     C.  $|a| > |b|$     D.  $a^2 > b^2$

**\*例 2**、判断下列命题是否正确，并说明理由。

(1) 若  $a < b < 0$ ，则  $a < b < 0$ ；(2) 若  $a < b < 0$ ，则  $a < b < 0$ ；

(3)  $a < b < 0$ ， $a < b < 0$ ，则  $a < b < 0$ ；(4) 若  $a < b < 0$ ，则  $a < b < 0$ 。

**\*\*例 3**、若  $a > b > 0$ ， $c < d < 0$ ， $e < 0$ ，求证： $\frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}$ 。

**\*\*例 4**、判断下列各命题的真假，并说明理由。

(1) 若  $ac^2 > bc^2$ ，则  $a > b$ 。    (2) 若  $a > b$ ，则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 。

(3) 若  $a < b, c < 0$ ，则  $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$ 。    (4) 若  $a > b, c > d$ ，则  $a-c > b-d$ 。

(5) 若  $a > b > 0, a > c$ ，则  $a^2 > bc$ 。    (6) 若  $a > b, m \in N^*$ ，则  $a^m > b^m$ 。

**\*\*例 5**、已知三个不等式：①  $ab > 0$ ；②  $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$ ；③  $bc > ad$ 。以其中两个作条件，余下一个作结论，则可组成\_\_\_\_\_个正确命题。

### 题型 2、利用性质求不等式范围

**\*\*例 6**、已知①  $-1 \leq a+b \leq 1$ ；②  $1 \leq a-b \leq 3$ ，求： $3a-b$  的取值范围。

题型 3、比较大小

**\*例 7**、比较  $x^2 + y^2$  与  $xy + x + y - 1$  的大小

**\*\*例 8**、比较  $x^6 + 1$  与  $x^4 + x^2$  的大小，其中  $x \in R$

**\*\*\*例 9**、若  $m > 0$ ,  $y > x > 0$ , 试比较  $\frac{x+m}{y+m}$  与  $\frac{x}{y}$  的大小。

**\*\*例 10**、甲、乙两人连续两天去市场买青菜。甲每次买青菜的数量不变，乙每次买青菜的费用不变。问甲、乙两人谁购买的方法比较合算？

题型 4、解含参不等式

**\*\*例 11**、解关于  $x$  的不等式  $m(x+2) > x+m$ 。

三、基础训练

**\*1**、已知非零实数  $a, b$  满足  $a > b$ ，则下列不等式成立的是  
( )

A)  $a^2 > b^2$       B)  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$       C)  $a^2b > ab^2$       D)  $\frac{a}{b^2} > \frac{b}{a^2}$

**\*2**、已知  $a, b, c, d \in R$ ，则下列选项正确的是 ( )

A .  $a > b \Rightarrow am^2 > bm^2$       B .  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Rightarrow a > b$       C .  $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

D.  $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

\*3、已知  $a, b$  都是实数，那么 “ $a^2 > b^2$ ” 是 “ $a > b$ ” 的\_\_\_\_\_条件。

\*\*4、若  $-1 < \alpha < \beta < 1$ ，则下面各式中恒成立的是  
( )。

(A)  $-2 < \alpha - \beta < 0$  (B)  $-2 < \alpha - \beta < -1$  (C)  $-1 < \alpha - \beta < 0$  (D)  $-1 < \alpha - \beta < 1$

\*5、比较  $a^2 + b^2$  与  $2a - 8b - 17$  的大小

\*\*6、已知  $-1 \leq x + y \leq 1$ ， $1 \leq x - y \leq 3$ ，则  $3x - y$  的取值范围是\_\_\_\_\_

\*\*7、对于实数  $a, b, c$  中，给出下列命题：

① 若  $a > b$ ，则  $ac^2 > bc^2$ ；② 若  $ac^2 > bc^2$ ，则  $a > b$ ；③ 若  $a < b < 0$ ，则  $a^2 > ab > b^2$ ；

④ 若  $a < b < 0$ ，则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ；⑤ 若  $a < b < 0$ ，则  $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$ ；⑥ 若  $a < b < 0$ ，则  $|a| > |b|$ ；⑦

若  $c > a > b > 0$ ，则  $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$ ；⑧ 若  $a > b$ ， $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，则  $a > 0, b < 0$ 。

其中正确的命题是\_\_\_\_\_

\*\*8、实数  $a, b, c, d$  满足条件：①  $a < b, c < d$ ；②  $(a-c)(b-c) > 0$ ；③

$(a-d)(b-d) < 0$ ，则有( )

A.  $a < c < d < b$  B.  $c < a < b < d$  C.  $a < c < b < d$  D.  $c < a < d < b$

\*\*9、解关于  $x$  的不等式： $(m^2 - 4)x < m + 2$ 。

#### 四、拓展提高

\*\*1、如果  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ，则  $2\alpha - \beta$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

\*\*\*2、已知  $a > b > c$ ，且  $a + b + c = 0$ ，则  $\frac{c}{a}$  的取值范围是\_\_\_\_\_

\*\*\*3、若不等式  $|3x - b| < 4$  的解集中的整数有且仅有 1, 2, 3，则  $b$  的取值范围\_\_\_\_\_。

\*\*\*4、设互不相等的正数  $a, b, c$  满足  $a^2 + c^2 = 2bc$ ，则下列不等式中可能成立的是

( )

- A)  $a > b > c$       B)  $b > a > c$       C)  $b > c > a$       D)  $c > a > b$

#### 五、回家作业

1、若  $a > b > c$ ，则一定成立的不等式是 ( )

- A.  $a|c| > b|c|$       B.  $ab > ac$       C.  $a - |c| > b - |c|$       D.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

2、若  $a < b < 0$ ，则下列不等式一定成立的是 ( )

- A.  $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{b}$       B.  $a^2 < ab$       C.  $a^a > b^a$       D.  $|\frac{b}{a}| < \frac{|b|+1}{|a|+1}$

3、已知  $a > b > 0$ ，则下列不等式中总成立的是 ( )

- A.  $a + \frac{1}{b} > b + \frac{1}{a}$       B.  $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$       C.  $\frac{b}{a} > \frac{b+1}{a+1}$       D.  $b - \frac{1}{b} > a - \frac{1}{a}$

4、已知四个条件：(1)  $b > 0 > a$ ；(2)  $0 > a > b$ ；(3)  $a > 0 > b$ ；(4)

$a > b > 0$ ；能推出  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  成立的有\_\_\_\_\_个。

5、求证： $a > b, \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a > 0, b < 0$ .

6、比较  $(a+1)^2$  与  $a^2-a+1$  的值的大小。

7、如果一辆汽车每天行驶的路程比原来多  $19\text{km}$ ，那么在  $8$  天内它的行程就超过  $2200\text{km}$ ，如果它每天行驶的路程比原来少  $12\text{km}$ ，那么它行驶同样的路程得花  $9$  天多的时间，这辆汽车原来每天行驶的路程  $(\text{km})$  范围是\_\_\_\_\_。

8、二次函数  $f(x)$  图像关于  $y$  轴对称，且  $1 \leq f(1) \leq 2$ ， $3 \leq f(2) \leq 4$ ，求  $f(3)$  的范围。

## 第9讲 一元二次不等式的解法

### 一、知识梳理

#### (一) 一元二次方程与二次函数

1、一元二次方程的一般形式： $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  ①其中  $a, b, c$  为常数， $x$  为未知数。

根的判别

式： $\Delta = b^2 - 4ac$ ，求根公式：在  $\Delta \geq 0$  时，方程①的实根  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

一元二次方程根的个数与根的判别式的关系：

- (1)  $\Delta < 0$  时，方程①无实根；
- (2)  $\Delta = 0$  时，方程①有且只有一个实根，或者说方程①有两个相等的实根；
- (3)  $\Delta > 0$  时，方程①有两个不相等的实根。

2、二次函数的一般形式：形如  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  其中  $a, b, c$  为常数， $x$  为自变量。

顶点坐标为  $P\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ，其中直线  $x = -\frac{b}{2a}$  为对称轴，

(1)  $a < 0$  时，函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象开口向下，函数  $y = ax^2 + bx + c$  在  $x = -\frac{b}{2a}$

取到最大值，即  $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，对任意  $x \in R, y \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

(2)  $a > 0$  时，函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象开口向上，函数  $y = ax^2 + bx + c$  在  $x = -\frac{b}{2a}$

取到最小值，即  $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，对任意  $x \in R, y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

3、二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  与  $x$  轴交点个数的判断：

- (1)  $\Delta < 0$  时，函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  与  $x$  轴无交点；
- (2)  $\Delta = 0$  时，函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  与  $x$  轴相切，有且只有一个交点；
- (3)  $\Delta > 0$  时，函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  与  $x$  轴有两个交点。

## (二) 一元二次不等式

### 1、一元二次不等式的定义

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式。比如：

$$x^2 - 5x < 0.$$

任意的一元二次不等式，总可以化为一般形式： $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$  或

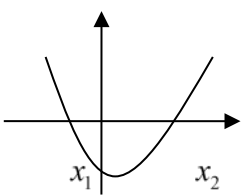
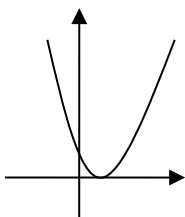
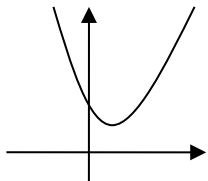
$$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$$

### 2、一般的一元二次不等式的解法

一元二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0 (< 0) (a > 0)$  的解集可以联系二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图像，图像在  $x$  轴上方部分对应的横坐标  $x$  值的集合为不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集，图像在  $x$  轴下方部分对应的横坐标  $x$  值的集合为不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集。

设一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两根为  $x_1, x_2$  且  $x_1 \leq x_2$ ， $\Delta = b^2 - 4ac$ ，则相应的不等式的解集的各种情况如下表：

三个二次（一元二次方程、一元二次不等式、二次函数）之间的关系

| 三个二次 $\Delta$                  | $\Delta > 0$                                                                        | $\Delta = 0$                                                                         | $\Delta < 0$                                                                          |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 图像 |  |  |  |
| $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 根  | $x = x_1$ 或 $x = x_2$                                                               | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$                                                          | 无解                                                                                    |
| $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 解集 | $\{x   x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$                                                | $\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$                                         | $R$                                                                                   |
| $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 解集 | $\{x   x_1 < x < x_2\}$                                                             | $\emptyset$                                                                          | $\emptyset$                                                                           |

|                                     |                                               |                                           |             |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------|
| $ax^2 + bx + c \geq 0 \ (a > 0)$ 解集 | $\{x \mid x \leq x_1 \text{ 或 } x \geq x_2\}$ | $R$                                       | $R$         |
| $ax^2 + bx + c \leq 0 \ (a > 0)$ 解集 | $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$              | $\left\{x \mid x = -\frac{b}{2a}\right\}$ | $\emptyset$ |

注意:

(1) 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两根  $x_1$ 、 $x_2$  是相应的不等式的解集的端点

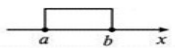
的取值, 是抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴的交点的横坐标;

(2) 表中不等式的二次系数均为正, 如果不等式的二次项系数为负, 应先利用不等式的性质转化为二次项系数为正的形式, 然后讨论解决;

(3) 解集分  $\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$  三种情况, 得到一元二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  与  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集。

### 3、区间的表示

设  $a, b$  均为实数, 且  $a < b$ ,

| 含 义                          | 名 称   | 区 间 表 示  | 数 轴 表 示                                                                               |
|------------------------------|-------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ | 闭 区 间 | $[a, b]$ |  |
| $\{x \mid a < x < b\}$       |       |          |                                                                                       |
| $\{x \mid a < x \leq b\}$    |       |          |                                                                                       |
| $\{x \mid a \leq x < b\}$    |       |          |                                                                                       |
| $R$                          |       |          |                                                                                       |
| $\{x \mid x > a\}$           |       |          |                                                                                       |
| $\{x \mid x \geq a\}$        |       |          |                                                                                       |
| $\{x \mid x < a\}$           |       |          |                                                                                       |
| $\{x \mid x \leq a\}$        |       |          |                                                                                       |

①其中,  $a, b$  叫做相应区间的\_\_\_\_\_。

②符号“ $\infty$ ”读作\_\_\_\_\_,“ $+\infty$ ”读作\_\_\_\_\_,“ $-\infty$ ”读作\_\_\_\_\_。

#### 4、解一元二次不等式的步骤

(1) 先看二次项系数是否为正, 若为负, 则将二次项系数化为正数;

(2) 写出相应的方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a > 0$ ), 计算判别式  $\Delta$ :

①  $\Delta > 0$  时, 求出两根  $x_1$ 、 $x_2$ , 且  $x_1 < x_2$  (注意灵活运用因式分解和配方法);

②  $\Delta = 0$  时, 求根  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ;

③  $\Delta < 0$  时, 方程无解

(3) 根据不等式, 写出解集.

#### 规律方法指导

(1) 解一元二次不等式首先要看二次项系数  $a$  是否为正; 若为负, 则将其变为正数;

(2) 若相应方程有实数根, 求根时注意灵活运用因式分解和配方法;

(3) 写不等式的解集时首先应判断两根的大小, 若不能判断两根的大小应分类讨论;

(4) 根据不等式的解集的端点恰为相应的方程的根, 我们可以利用韦达定理, 找到不等式的解集与其系数之间的关系;

(5) 若所给不等式最高项系数含有字母, 还需要讨论最高项的系数。

## 二、例题解析

**\*例 1**、解下列一元二次不等式

$$(1) x^2 - 5x < 0; \quad (2) x^2 - 4x + 4 > 0; \quad (3) -x^2 + 4x - 5 > 0$$

**\*例 2**、解下列不等式

$$(1) 2x^2 - 3x - 2 > 0; \quad (2) -3x^2 + 6x - 2 > 0$$

$$(2) 4x^2 - 4x + 1 \leq 0; \quad (4) -x^2 + 2x - 3 > 0.$$

**\*\*例 3、**解不等式： $-6 \leq x^2 - x - 6 < 6$

**\*\*例 4、**不等式  $x^2 + mx - n < 0$  的解集为  $x \in (4, 5)$ ，求关于  $x$  的不等式  $nx^2 + mx - 1 > 0$  的解集。

变式：若关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + 6 > 0$  的解集为  $(-3, 5)$ ，求  $a, b$

**\*\*例 5、**已知关于  $x$  的不等式  $(m^2 + 4m - 5)x^2 - 4(m - 1)x + 3 > 0$  对一切实数  $x$  恒成立，求实数  $m$  的取值范围。

**\*\*例 6、**若关于  $x$  的不等式  $mx^2 - (2m + 1)x + m - 1 \geq 0$  的解集为空集，求  $m$  的取值范围。

**\*\*例 7、**解关于  $x$  的一元二次不等式  $x^2 - (3 + a)x + 3a > 0$ 。

**\*\*\*\*例 8、**解关于  $x$  的不等式： $ax^2 - 2(a + 1)x + 4 < 0$ 。

### 三、基础训练

\*1、不等式  $x^2 > x$  的解集是\_\_\_\_\_。

\*\*2、不等式  $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ ，对一切  $x \in R$  恒成立，则  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_。

\*3、解下列不等式：

(1)  $-2x^2 - 5x + 3 > 0$ ;

(2)  $-1 \leq x^2 + 2x - 1 \leq 2$ ;

\*\*4、不等式  $ax^2 + 4x + a > 1 - 2x^2$  对一切  $x \in R$  恒成立，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

\*\*5、已知  $ax^2 + 2x + c > 0$  的解为  $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ ，试求  $a$ 、 $c$ ，并解不等式

$-cx^2 + 2x - a > 0$ 。

\*\*6、解关于  $x$  的不等式  $x^2 - (a+1)x + a < 0$ 。

\*\*\*7、若关于  $x$  的不等式  $mx^2 - (2m+1)x + m - 1 \geq 0$  的解为一切实数，求  $m$  的取值范围。

\*\*8、若关于  $x$  的不等式  $mx^2 - (2m+1)x + m - 1 \geq 0$  的解集为非空集，求  $m$  的取值范围。

\*\*9、已知方程  $ax^2 + bx + 2 = 0$  的两根为  $-\frac{1}{2}$  和 2。

(1) 求  $a$ 、 $b$  的值；

(2) 解不等式  $ax^2 + bx - 1 > 0$ 。

#### 四、拓展提高

\*\*1、若关于  $x$  的不等式  $\frac{ax}{x-1} < 1$  的解集是  $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$ ，求实数  $a$  的值.

\*\*2、求不等式  $12x^2 - ax > a^2 (a \in \mathbf{R})$  的解集.

\*\*\*3、已知二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbf{R})$  满足：对任意实数  $x$ ，都有  $f(x) \geq x$ ，

且当  $x \in (1, 3)$  时，有  $f(x) \leq \frac{1}{8}(x+2)^2$  成立；

(1) 证明：  $f(2) = 2$ ；

(2) 若  $f(-2) = 0$ ，求  $f(x)$  的表达式；

\*\*\*4、对任意  $a \in [-1, 1]$  不等式  $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a > 0$  恒成立，则实数  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

#### 五、回家作业

1、下列不等式的解集是  $\emptyset$  的为( )

- A.  $x^2 + 2x + 1 \leq 0$       B.  $\sqrt{x^2} \leq 0$       C.  $(\frac{1}{2})^x - 1 < 0$       D.  $\frac{1}{x} - 3 > \frac{1}{x}$

2、若  $x^2 - 2ax + 2 \geq 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立，则实数  $a$  的取值范围是( )

- A.  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$       B.  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$       C.  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2})$       D.  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

3、已知不等式  $ax^2+bx+c<0$  ( $a\neq 0$ ) 的解集是  $\mathbf{R}$ , 则( )

A.  $a<0, \Delta>0$  B.  $a<0, \Delta<0$  C.  $a>0, \Delta<0$  D.  $a>0, \Delta>0$

4、不等式  $2x^2+mx+n>0$  的解集是  $\{x|x>3 \text{ 或 } x<-2\}$ , 则二次函数  $y=2x^2+mx+n$  的表达式是( )

A.  $y=2x^2+2x+12$  B.  $y=2x^2-2x+12$  C.  $y=2x^2+2x-12$  D.  $y=2x^2-2x-12$

5、不等式  $x^2+mx+\frac{m}{2}>0$  恒成立的条件是\_\_\_\_\_.

6、设  $x\in\mathbf{R}$ , 则 “ $x>\frac{1}{2}$ ” 是 “ $2x^2+x-1>0$ ” 的( )

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7、若函数  $y=\sqrt{kx^2-6kx+k+8}$  的定义域是  $\mathbf{R}$ , 求实数  $k$  的取值范围.

8、求下列关于  $x$  的不等式的解集:

(1)  $-x^2+7x>6$ ;

(2)  $x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$ . 新课标第一网

9、解不等式  $0\leq x^2-x-2\leq 4$ .

10、已知关于  $x$  的不等式  $x^2+ax+b<0$  的解集为  $(1,2)$ , 求关于  $x$  的不等式

$bx^2+ax+1>0$  的解集.

## 第 10 讲 其他不等式的解法

### 一、知识梳理

#### 1. 分式不等式

(1) 分母上带有未知数的不等式称为分式不等式.

(2) 一般特征: 可以化为形如  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  或  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ , 其中  $f(x), g(x)$  为整式,  $g(x) \neq 0$  的形

式.

#### 2. 同解原理

(1) 如果两个不等式的解集相等, 那么这两个不等式就叫做同解不等式, 一个不等式变形为另一个不等式时, 如果两个不等式是同解不等式, 这种变形叫做不等式的同解变形.

(2) 解分式不等式的关键是将它变形为同解不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 (< 0) \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0 (< 0); \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 (\leq 0), \\ g(x) \neq 0 \end{cases}.$$

#### 3. 高次不等式

(1) 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数大于 2 的整式不等式称为高次不等式.

(2) 解形如  $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n) > 0 (< 0)$  的高次不等式,

令  $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)$ , 其中  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ , 显然当  $x > a_n$  时,

$f(x) > 0$ ; 当  $x \in (a_{n-1}, a_n)$  时,  $f(x) < 0$ ; 当

$x \in (a_{n-2}, a_{n-1})$  时,  $f(x) > 0$ ;  $\dots$ : 由此可得

$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n) > 0 (< 0)$  的解集.

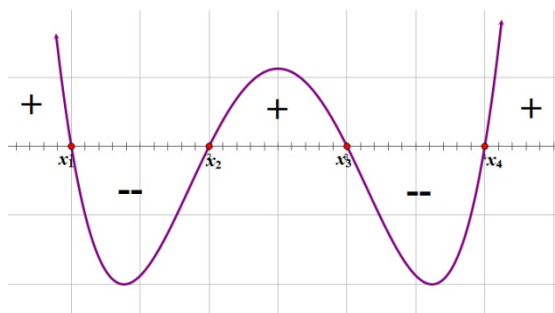
(3) 上述过程在数轴上形象地表示出来, 称为数轴标根法.

(4) 步骤归纳

① 将不等式化为  $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n) > 0 (< 0)$  形式, 使各因式  $x$  的最高次项系数为正.

② 求根, 并在数轴上表示出来

③ 由右上方穿线, 经过数轴上表示各根的点, 看图像写出解集, 注意奇次根穿透, 偶次根不穿透.



#### 4.绝对值不等式

(1)绝对值：一个数在数轴上所对应的点到原点的距离.

$$\textcircled{1}\text{代数意义: } |a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

②几何意义： $|a|$ 表示实数  $a$  所对应的点到原点的距离，进一步地， $|a-b|$ 表示实数  $a$  所对应的点到  $b$  对应的点的距离.

(2)同解不等式：

①当实数  $a > 0$  时， $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ ， $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$  或  $x > a$ .

②  $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$ ， $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$  或  $f(x) < -g(x)$ .

③  $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$

二、例题分析

**\*1.解下列分式不等式**

$$(1) \frac{2x+1}{x-1} \geq 0; \quad (2) \frac{2x+1}{x-2} \geq 4; \quad (3) \frac{x+8}{x^2+2x+3} \leq 2; \quad (4) \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{2x+1}.$$

**\*\*2.含参数方程和不等式**

(1)当  $m$  为何实数时，关于  $x$  的方程  $m(x-3) = 3(x+1)$  的解 ①为正数；②在 $[1,2)$ 范围内.

(2)当实数  $a \neq 0$  时，解关于  $x$  的不等式  $\frac{a(x-1)}{x-2} > 1$ .

**\*\*3.解下列高次方程**

$$(1)(1-x)(x+1)(x-2) > 0;$$

$$(2)x^3 + 3x^2 \geq 2x + 6;$$

$$(3)(x+2)^2(x-1)^3(x+1)(x-2) < 0;$$

$$(4)\frac{x(x+1)^2(x-2)}{(x-3)^3(x-5)} \leq 0;$$

$$(5)x \geq \frac{1}{x};$$

$$(6)(x+5)(x+2)(x-1)(x-4) + 80 \leq 0.$$

**\*\*4.解下列绝对值不等式(定义法)**

$$(1)3 \leq |2x-1| < 7;$$

$$(2)|x^2 - 5x + 5| \leq 1.$$

$$(3)|x^2 - 2x| < \frac{1}{2}x;$$

$$(4)5|x+2| > 3x+14.$$

**\*\*\*5.解下列绝对值不等式(零点分段法)**

$$(1)|x+2| + |x-1| < 4;$$

$$(2)x^2 - 2|x| - 15 > 0$$

**\*\*6.解下列绝对值不等式(两边平方法)**

$$(1)|3x-1| \leq |x+2|;$$

$$(2)\left|\frac{x+2}{3x-1}\right| \geq 1.$$

## 7.恒成立问题

\*\*\* (1) 当实数  $a$  为何值时,  $-3 < \frac{3x^2 + ax + 6}{x^2 - x + 1} \leq 6$  恒成立.

\*\*\* (2) 如果不等式  $|x+1| + |x+2| \geq m$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

\*\*\* (3)  $|x+1| + |x+2| < m$  的解是非空集合, 求实数  $m$  的取值范围.

\*\*\* (4) 不等式  $|x+3| - |x-1| \leq a^2 - 3a$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

\*\*\*\* (5) 关于  $x$  的不等式  $|\frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1}| < 3$  的解集为  $\mathbb{R}$ , 求实数  $k$  的取值范围.

\*\*\*\* (6) 不等式  $|x+1| \geq kx$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

### 三、基础训练

#### 1. 解下列不等式

$$^{**}(1) \frac{x+1}{2x-3} < 1; \quad ^{**}(2) x \geq \frac{1}{x}; \quad ^{***}(3) \frac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2} < x.$$

#### 2. 解下列不等式

$$^{**}(1) (x+4)(x+5)^2(2-x)^3 < 0; \quad ^{**}(2) \frac{3x-5}{x^2+2x-3} \leq 2.$$

$^{***}3$ . 若关于  $x$  的不等式  $ax-b > 0$  的解集为  $(1, +\infty)$ , 求关于  $x$  的不等式  $\frac{ax+b}{x-2} > 0$  的解集.

$^{***}4$ . 解关于  $x$  的不等式  $\frac{a(x+1)}{x} > 1$ .

$^{***}5$ . 关于  $x$  的不等式  $|ax+2| < 6$  的解集为  $(-1, 2)$ , 求关于  $x$  的不等式  $\frac{x}{ax+2} \leq 1$  的解集.

#### $^{**}6$ . 求下列不等式的解集

$$(1) \left| \frac{x+1}{x+2} \right| > 1; \quad (2) \frac{1}{|2x-3|} > 2; \quad (3) \left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}; \quad (4) |x^2-5x+10| > x^2-18.$$

$^{***}7$ . 若存在实数  $x$  使  $|x-a| + |x-1| \leq 3$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

\*\*\*8. 当  $a > 0$  时, 求不等式  $|\frac{ax-1}{x}| > a$  的解集.

\*\*9. 若关于  $x$  的不等式  $|a| \geq |x+1| + |x-2|$  存在实数解, 求实数  $a$  的取值范围.

\*\*\*10. 已知关于  $x$  的不等式  $|x-a| < |x| + |x+1|$  的解集为  $\mathbb{R}$ , 求实数  $a$  的取值范围.

#### 四、拓展提高

\*\*\*1. 解无理不等式:  $\sqrt{3x-4} > \sqrt{x-3}$ ;  $\sqrt{5-4x-x^2} \geq x$ .

\*\*\*\*2. 已知不等式  $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c} \geq 0$  的解集为  $[-1, 2] \cup (3, +\infty)$ , 求不等式

$\frac{x-c}{(x-a)(x-b)} \leq 0$  的解集.

\*\*\*\*3. 若  $\frac{x^2 - (a+a^2)x + a^3}{x^2 + 4x + 3} < 0$  的解集是  $\{x | -1 < x < 9\}$ , 求实数  $a$  的值.

\*\*\*\*4. 已知集合  $M = \{x | \frac{ax-5}{x^2-a} < 0\}$ , 若  $3 \in M, 5 \notin M$ , 求实数  $a$  的取值范围.

\*\*\*\*5. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 若  $x > 0$  时均有  $[(a-1)x-1](x^2-ax-1) \geq 0$ , 求  $a$  的值.

\*\*\*\*\*6. 设集合  $A = \{x \mid x - \frac{1}{2}(a+1)^2 \leq \frac{1}{2}(a-1)^2\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0\}$ ,  
若果  $A \subseteq B$ , 求实数  $a$  的取值范围.

## 五、回家作业

1. 不等式  $\frac{x-3}{2-x} > 0$  的解集为\_\_\_\_\_； 2. 设集合  $A = \{x \mid \frac{x-1}{3-x} \leq 2\}$ , 那么  $\complement_{\mathbb{R}} A =$ \_\_\_\_\_

3. 若不等式  $\frac{x^2 - 8x + 24}{mx^2 - mx - 1} < 0$  对一切  $x \in \mathbb{R}$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_

4. 不等式  $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2} \geq 0$  的解集为\_\_\_\_\_； 5. 关于  $x$  的不等式  $|x-2| < 3$  的解集\_\_\_\_\_

6. 若  $|\frac{2x-1}{x+1}| = \frac{2x-1}{x+1}$ , 则实数  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

7. 下列不等式中与不等式  $\frac{x-3}{x-2} \geq 0$  同解的是( )

A.  $(x-2)(x-3) \geq 0$ ; B.  $(x-2)(x-3) \geq 0$  或  $x \neq 2$ ;

C.  $(x-2)(x-3) > 0$  且  $x = 3$ ; D.  $(x-2)(x-3) > 0$  或  $x = 3$ .

8. 不等式  $x < \frac{1}{x}$  的解集为( )

A.  $(0,1)$ ; B.  $(-\infty, -1)$ ; C.  $(-\infty, 1)$ ; D.  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ .

9. 不等式  $|x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2$  的解集为( )

A.  $\mathbb{R}$ ; B.  $\emptyset$ ; C.  $(1, 2)$ ; D.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ .

10. 解不等式:  $\frac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$ .

11. 若关于  $x$  的不等式  $ax > b$  的解集是  $(-\infty, -1)$ , 求关于  $x$  的不等式  $\frac{ax+b}{x-3} > 0$  的解集.

12. 若不等式  $|x+1| - |x-2| > m$  的解集为  $\mathbb{R}$ , 求实数  $m$  的取值范围.

## 第 11 讲 基本不等式

### 【知识点总结】

#### 1、基本不等式原始形式

$$(1) \text{ 若 } a, b \in R, \text{ 则 } a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (2) \text{ 若 } a, b \in R, \text{ 则 } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

#### 2、基本不等式一般形式(均值不等式)

$$\text{若 } a, b \in R^*, \text{ 则 } a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

#### 3、基本不等式的两个重要变形

$$(1) \text{ 若 } a, b \in R^*, \text{ 则 } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (2) \text{ 若 } a, b \in R^*, \text{ 则 } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

总结: 当两个正数的积为定植时, 它们的和有最小值;

当两个正数的和为定植时, 它们的积有最小值;

特别说明: 以上不等式中, 当且仅当  $a = b$  时取 “=”

#### 4、求最值的条件: “一正, 二定, 三相等”

#### 5、常用结论

$$(1) \text{ 若 } x > 0, \text{ 则 } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ (当且仅当 } x = 1 \text{ 时取 “=”)}$$

$$(2) \text{ 若 } x < 0, \text{ 则 } x + \frac{1}{x} \leq -2 \text{ (当且仅当 } x = -1 \text{ 时取 “=”)}$$

$$(3) \text{ 若 } ab > 0, \text{ 则 } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (当且仅当 } a = b \text{ 时取 “=”)}$$

$$(4) \text{ 若 } a, b \in R, \text{ 则 } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$(5) \text{ 若 } a, b \in R^*, \text{ 则 } \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

特别说明: 以上不等式中, 当且仅当  $a = b$  时取 “=”

#### 6、柯西不等式

$$(1) \text{ 若 } a, b, c, d \in R, \text{ 则 } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

$$(2) \text{ 若 } a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in R, \text{ 则有:}$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$(3) \text{ 设 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 与 } b_1, b_2, \dots, b_n \text{ 是两组实数, 则有}$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

## 二、例题分析

### 题型一：利用基本不等式证明不等式

\*例 1、(1) 已知  $ab > 0$ ，求证： $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ，并指出等号成立的条件。

(2) 若  $ab < 0$ ，则代数式  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$  的取值范围是什么？

(3) 若  $ab \neq 0$ ，则代数式  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$  的取值范围是什么？ $\left| \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right|$  呢？

\*\*例 2、已知  $a, b, c$  为两两不相等的实数，求证： $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$

\*\*例 3、已知  $a, b, c \in R^+$ ，且  $a + b + c = 1$ ，求证： $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$

### 题型二：利用不等式求函数值域

\*例 4、求下列函数的值域

$$(1) y = 3x^2 + \frac{1}{2x^2}$$

$$(2) y = x(4-x)$$

$$(3) y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$$

### 题型三：利用不等式求最值 (一) (凑项)

\*例 5、已知  $x > 2$ ，求函数  $y = 2x - 4 + \frac{4}{2x - 4}$  的最小值；

变式：已知  $x > 2$ ，求函数  $y = 2x + \frac{4}{2x - 4}$  的最小值；

\*\*例 6、(1)  $0 < x < 1$  时， $u = x(1-x)$  的最大值为\_\_\_\_\_。

(2) 若  $0 < x < \frac{1}{2}$ ，函数  $y = x(1-2x)$  的最大值为\_\_\_\_\_。

(3) 设  $x, y \in \mathbb{R}^+$  , 且  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  , 则  $x \cdot \sqrt{1+y^2}$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

#### 题型四：利用不等式求最值（二）

\*\*\*例 7、求函数  $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x}$  ( $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$ ) 的最大值；

（提示：平方，利用基本不等式）

\*\*\*\*例 8、已知  $x, y > 0$  ,  $x + 2y + 2xy = 8$  , 求  $x + 2y$  最小值；

#### 题型五：巧用“1”的代换求最值问题

\*\*例 9、已知  $a, b > 0, a + 2b = 1$  , 求  $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值；

变式 1：已知  $a, b > 0, a + 2b = 2$  , 求  $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值；

变式 2：已知  $x, y > 0, \frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 1$  , 求  $xy$  的最小值；

\*\*\*例 10、若  $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$  且  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$  , 求  $x + y$  的最小值；

#### 题型六：分离换元法求最值（了解）

\*\*\*例 11、求函数  $y = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}$  ( $x \neq -1$ ) 的值域；

\*\*\*例 12、求函数  $y = \frac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$  的最大值；（提示：换元法）

### 三、基础训练

\*1. 已知  $x > \frac{5}{4}$ ，求函数  $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$  的最小值；

\*\*2. 求函数  $y = \sqrt{4x-3} + \sqrt{11-4x}$  ( $\frac{3}{4} < x < \frac{11}{4}$ ) 的最大值；

\*\*3. 若  $x, y > 0$  且  $2x + y = 1$ ，求  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  的最小值；

\*\*4. 若  $0 < x < 4$ ，求  $y = \sqrt{x(8-2x)}$  的最大值；

\*\*\*5. 求函数  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{4x+9}$  的最大值；

\*\*\*6. 已知  $a, b > 0$ ，满足  $ab = a + b + 3$ ，求  $ab$  范围；

\*\*\*7. 已知  $a + b + c = 1$ ，求证： $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

### 四、拓展提高

\*\*\*\*1. (1) 在周长保持不变的条件下，何时矩形的面积最大？

(2) 在面积保持不变的条件下，何时矩形的周长最小？

\*\*\*\*2. 已知  $a, b > 0$ , 求  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab}$  的最小值;

\*\*\*\*\*3. 如果  $a > b > 0$ , 求关于  $a, b$  的表达式  $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$  的最小值;

\*\*\*\*\*4. 设正实数  $x, y, z$  满足  $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$ , 则当  $\frac{xy}{z}$  取得最大值时,  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$  的

最大值为 ( )

- A. 0      B. 1      C.  $\frac{9}{4}$       D. 3

(提示: 代入换元, 利用基本不等式以及函数求最值)

\*\*\*\*\*5. 设  $x, y, z$  是正数, 满足  $x - 2y + 3z = 0$ , 求  $\frac{y^2}{xz}$  的最小值;

\*\*\*6. 设  $a, b, c$  均为正数, 且  $a + b + c = 1$ , 证明:

$$(I) ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}; \quad (II) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1.$$

## 五、回家作业

\*1. “ $a > b > 0$ ”是“ $ab < \frac{a^2 + b^2}{2}$ ”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

\*2. 下列各式中, 最小值为 2 的是

( )

A.  $x + \frac{1}{x}$

B.  $\sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

C.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

D.  $x - 2\sqrt{x} + 3$

\*3. (1) 若  $ab=1$ , 求  $a^2+b^2$  和  $a+b$  的取值范围.

(2) 若  $a+b=1$ , 求  $ab$  和  $a^2+b^2$  的取值范围.

\*4. 求函数  $y = x + \frac{1}{x} (x < 0)$  的值域

\*5. 已知  $x < 2$ , 求函数  $y = 2x + \frac{4}{2x-4}$  的最大值;

\*\*6. 已知  $x, y > 0$ , 且  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9$ , 求  $x+y$  的最小值.

\*\*7. 已知  $x, y > 0$ , 且  $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 4$ , 求  $x+y$  的最小值;

\*\*\*8. 求函数  $y = \frac{x^2+8}{x-1} (x > 1)$  的值域;

\*\*\*9. 已知  $x, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $xy = x + y + 1$ , 求  $x+y$  的取值范围.

\*\*10. 证明不等式:  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ , 求证  $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ ;

## 第 12 讲 函数的概念

**一·知识梳理：函数的定义：**如果再某个变化过程中有两个变量  $x, y$ ，对于  $x$  在某个范围  $D$  内的每一个确定的值，按照某种对应法则  $f$ ， $y$  都有唯一确定的值与它对应，那么  $y$  就是  $x$  的函数，记作  $y = f(x)$ ，其中  $x$  叫做自变量， $y$  叫做因变量， $x$  的取值范围  $D$  叫做函数的定义域，和  $x$  的值相对应的  $y$  的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

**注意：**1) 函数定义中要求对于定义域中的任何一个  $x$ ，在值域中有且只有一个  $y$  值和它对应；但并不要求对于值域中的每一个  $y$  在定义域中也只能有一个  $x$  和它相对应，即函数的对应法则可以是 1 对 1，也可以是多对 1，但不可以 1 对多。

2) 定义域和值域必须是非空数集

3) 定义域的表示方法有：集合表示法、区间表示法（注意区间端点必须是实数）

4) 函数的表示方法有：①解析法；②图像法；③列表法。其中函数解析式是表示函数的一种主要方法，当函数解析式是用两个或两个以上的数学式子给出时，就称为分段函数，分段函数的定义域为它的各段上的定义域的并集。

**函数的三要素：**定义域、值域、对应法则（ $f$ ）。

**注意：**两函数相同的充要条件是函数的三要素相同，但是因为当函数的定义域和对应法则一旦确定，值域也就随之确定，因此判断两函数相同，则只需要看定义域和对应法则是否一致。（注意：值域与对应法则相同，不一定有定义域相同。）

**函数关系的建立：**

在实际问题中，分析问题中变量的关系，并由此建立变量之间的函数关系。

1) 实际问题中变量之间的函数关系的建立过程也称为建模。

2) 函数关系主要有三种表示方法：①解析法；②图像法；③表格法。其中解析法是最基本也是最重要的表示方法，而图像法及表格法近几年也频频出现在高考题中，值得认真关注。

3) 建立函数关系式，指明函数的定义域不仅要考虑自然域（使表达式有意义的自变量  $x$  的全体），还要考虑实际问题的背景所允许的自变量  $x$  的取值范围。

**定义域：**1) 具体函数的定义域限制，如分母、偶次根式、0 次幂、对数、三角函数、反三角函数等。

2) 抽象函数：a) 定义域指函数解析式中字母  $x$  的取值范围；

b) 函数  $y = f(x)$  中，不论括号中内容如何变化，括号内整体范围不变。

## 二【典型例题】

例一. 1. 判断下列对应是否为函数:

★ (1)  $x \rightarrow \frac{2}{x}, x \neq 0, x \in R;$

★★ (2)  $x \rightarrow y$ , 这里  $y^2 = x, x \in N, y \in R.$

★★★ 2. 下列各组函数中表示同一函数的是 ( )

A、  $f(x) = x$  与  $g(x) = (\sqrt{x})^2$       B、  $f(x) = |x|$  与  $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$   
 C、  $f(x) = x|x|$  与  $g(x) = \begin{cases} x^2 (x > 0) \\ -x^2 (x < 0) \end{cases}$       D、  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  与  $g(t) = t + 1 (t \neq 1)$

★★3. 在下列各组函数中,  $f(x)$  与  $g(x)$  表示同一函数的是-----[    ]

A.  $f(x) = 1, g(x) = x^0$       B.  $y = x$  与  $y = \sqrt{x^2}$   
 C.  $y = x^2$  与  $y = (x+1)^2$       D.  $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$

例二. ★★★1. 函数  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2 + ax - 3}$  的定义域是  $R$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A  $a > \frac{1}{3}$     B  $-12 < a \leq 0$     C  $-12 < a < 0$     D  $a \leq \frac{1}{3}$

2. 求下列函数定义域

★★1) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(0,1)$ , 求  $f(x^2)$  的定义域。

★★★2) 已知函数  $f(2x+1)$  的定义域为  $(0,1)$ , 求  $f(x)$  的定义域。

★★★3) 已知函数  $f(x+1)$  的定义域为  $[-2,3]$ , 求  $f(2x^2-2)$  的定义域。

例三. ★★★1. 已知  $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$ , 且  $f(-2) = 10$ , 那么  $f(2) =$  \_\_\_\_\_

★★2. 已知  $f(x+1) = x^2 + 3x$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

★★★3. 已知  $f(x)$  是二次函数, 且  $f(x+1) + f(x-1) = x^2 + 2x + 4$ , 求  $f(x)$  的解析式。

例四. ★★1. 某商店经营一种品牌的彩电, 每台售价 2880 元, 成本价为销售价的 75%. 为了扩大经验, 拟定出新售价, 使商品按新售价的八折优惠销售时, 仍能获利, 则每台彩电获利  $y$  元与新售价  $x$  元之间的函数解析式为 \_\_\_\_\_

★★★2. 用长为  $l$  的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架，若矩形底边长为  $2x$ ，则此框架围城的面积  $y$  关于  $x$  的函数解析式为

### 三. 基础训练

★★1. 函数  $y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$  的定义域是 ( )

- A.  $[-1,1]$       B.  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$       C.  $[0,1]$       D.  $\{-1,1\}$

★★2. 已知  $f(x)$  的定义域为  $[-2,2]$ ，则  $f(1-2x)$  的定义域为 ( )

- A.  $[-2,2]$       B.  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$       C.  $[-1,3]$       D.  $[-2, \frac{3}{2}]$

★★3. 函数  $y = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$  的定义域是 ( )

- A.  $\{x|x>0\}$       B.  $\{x|x<0\}$       C.  $\{x|x<0, x \neq -1\}$       D.  $\{x|x \neq 0, x \neq -1\}$

★★4. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}; \quad (2) y = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$$

$$(3) y = \sqrt{\frac{6-x}{3x+2}} \quad (4) y = \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{x+2} + (x-1)^0$$

★★5. 已知函数  $f(x+1) = \frac{2x+3}{3x-4}$ ，则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

### 四. 拓展提高

★★★★1. 已知  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ , 且  $f(g(x)) = \frac{1}{x}$ , 求  $a, b, c$  的值。

★★★★2. 已知函数  $f[(x-1)^2] = 3x^2 - 6x + 4$ , 求函数  $f(x+1)$  的解析式。

★★★★3. 已知  $f(n) = \begin{cases} f(n-3), & n \geq 9, \\ 6+n, & n < 9. \end{cases}$  求  $f(10)$  和  $f(12)$  的值, 并猜测使得  $f(n) = n$

成立的  $n$  的取值范围。

★★★★4. 已知  $g(x) = 1 - 2x$ ,  $f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2} (x \neq 0)$ , 求  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  的值

★★★★5. 已知  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ , 求  $f(x)$  的解析式.

★★★★6. 已知函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 若  $f(0) = 0$ ,  $f(x+1) = f(x) + x + 1$ , 求  $f(x)$  的表达式。

## 五. 回家作业

★★1. 在质量分数为  $a\%$  的盐水  $x$  克水中加入质量分数为  $b\%$  的盐水  $y$  克, 变成质量分数为  $c\%$  的盐水, 则  $y$  关于  $x$  的函数解析式为

\_\_\_\_\_

★2. 某商店经营一种品牌的彩电, 每台售价 2880 元, 成本价为销售价的 75%. 为了扩大经验, 拟定出新售价, 使商品按新售价的八折优惠销售时, 仍能获利, 则每台彩电获利  $y$  元与新售价  $x$  元之间的函数解析式为

\_\_\_\_\_

★★★3. 用长为  $l$  的铁丝弯成下部为矩形, 上部为半圆形的框架, 若矩形底边长为  $2x$ , 则此框架围城的面积  $y$  关于  $x$  的函数解析式为

\_\_\_\_\_

★★★★4. 一份印刷品其排版面积 (矩形) 为  $432\text{cm}^2$ , 它的左右两边都留有  $4\text{cm}$  的空白, 上、下底部都留有  $3\text{cm}$  的空白. 问: 长度、宽度各设计成多少时, 用纸最省?

★★5. 用长为  $30\text{cm}$  的铁丝围成矩形, 试将矩形面积  $S$  ( $\text{cm}^2$ ) 表示为矩形一边长  $x(\text{cm})$  的函数, 并画出函数的图象。

## 第 13 讲 函数的运算

### 一. 知识梳理

#### 函数的运算

设两个函数  $y = f(x) (x \in D_1)$ ,  $y = g(x) (x \in D_2)$ ,  $D = D_1 \cap D_2$  且非空, 则定义:

1)  $f(x) + g(x) (x \in D)$  为函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的和。

2)  $f(x) \cdot g(x) (x \in D)$  为函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的积。

#### 复合函数的概念及其定义域

设函数  $y = f[g(x)] (x \in D)$ , 令  $u = g(x)$ , 则  $y = f(u)$ 。

若  $g(x)$  的值域与  $f(u)$  的定义域的交集为非空数集, 则称  $y = f[g(x)]$  为  $x$  在  $D$  上

的复合函数, 其中  $u$  是中间变量,  $y = f(u)$  叫做外层函数,  $u = g(x)$  叫做内层函数。

### 二. 【典型例题】

★例 1、已知函数  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ , 设  $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ , 求函数  $F(x)$  解析式

★★例 2、设函数  $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ , 求  $f(x) \cdot g(x)$

★★★例 3. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , 求函数  $y = f(ax) + f\left(\frac{x}{a}\right) (a > 1)$  的定义域.

★★★★例 4、已知  $f(x)$  满足关系式  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ ，求  $f(x)$ 。

★★★★例 5. 已知  $f(x) = \frac{2x}{1+x}$ ，求

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(100) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{100}{2}\right) + \cdots +$$

$$f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \cdots + f\left(\frac{100}{100}\right)$$

### 三. 基础训练

★★1. 若函数  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{4-x^2}$ ，则  $f(x) + g(x) =$ \_\_\_\_\_。

★★2. 若函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$ ，则  $f(x)g(x) =$ \_\_\_\_\_。

★★★3. (1) 作出函数  $y = 2x + \frac{1}{x}$  的大致图像；

(2) 作出函数  $y = 2x - \frac{1}{x}$  的大致图像。

★★★4. 试写出两个二次函数的解析式  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ，使  $f_1(x) + f_2(x)$  是一次函数，

并且在定义域内， $y = f_1(x) + f_2(x)$  的值随  $x$  的增大而增大。

## 四. 拓展提高

★★★1、设函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1, \\ x-1, & x \leq 1. \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 1-x, & x > -1, \\ \sqrt{3-x}, & x \leq -1. \end{cases}$  求  $f(x) + g(x)$ .

★★★2、已知  $f(x)$  满足关系式  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ , 求  $f(x)$ .

★★★3. 已知  $F(x) = f(x) + g(x)$ , 其中  $f(x)$  是  $x$  的正比例函数,  $g(x)$  是  $x$  的反比例函数, 且  $F(1) = 8, F\left(\frac{1}{3}\right) = 16$ , 求  $F(x)$  的解析式并求其值域.

★★★4. 设  $f(x)$  是定义在  $[-3, \sqrt{2}]$  上的函数, 求函数  $y = f(2x) + f(x + \sqrt{2})$  的定义域.

★★★★5. 已知定义域分别是  $F$ 、 $G$  的函数  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ , 设函数  $h(x) =$

$$\begin{cases} f(x) \cdot g(x), & \text{当 } x \in F \text{ 且 } x \in G, \\ f(x), & \text{当 } x \in F \text{ 且 } x \notin G, \\ g(x), & \text{当 } x \notin F \text{ 且 } x \in G, \end{cases}$$

(1) 若  $f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = x^2$ , 写出  $h(x)$  的解析式;

(2) 对(1)中的函数  $h(x)$ , 试求其值域.

## 五. 回家作业

### 一、填空题

★★★1. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $[-3, 1]$ , 则  $g(x) = f(x) + f(-x)$  的定义域为\_\_\_\_\_。

★★2. 若函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ ,  $g(x) = x - \sqrt{x}$ , 则  $f(x)g(x) =$ \_\_\_\_\_。

★★★3. 若函数  $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{|x-1|}$ ,  $g(x) = \frac{4-x}{\sqrt{x}+2}$ , 则  $f(x) + g(x) =$ \_\_\_\_\_。

(写成分段函数)

★★★4. 若函数  $y = f(x)$  的定义域是  $[0, 2]$ , 则函数  $y = f(x-1) + f(x+1)$  的定义域为\_\_\_\_\_。

★★★5. “函数  $g(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ ” 是 “函数  $y = \sqrt{x-2} + g(x)$  的定义域为  $[2, +\infty)$ ” 的\_\_\_\_\_条件。

★★★★6. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[a, b]$ , 且  $a+b < 0, ab < 0$ , 则函数  $g(x) = f(x) + 3f(-x)$  的定义域为\_\_\_\_\_。

★★★★7. 函数  $f(x)$  的定义域为  $[a, b]$ , 其中  $0 < -a < b$ , 则函数  $F(x) = f(x) + f(-x)$  的定义域为\_\_\_\_\_。

### 二、选择题

★★★★8. 当  $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$  时, 关于  $x$  的方程  $\frac{x^2+1}{x} = m$  有两个不相等的实数根, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$     B.  $(2, +\infty)$     C.  $\left(2, \frac{5}{2}\right]$     D.  $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

### 三、解答题

★★★9. 已知函数  $f(x) = x\sqrt{x-1}$ , 函数  $g(x) = \sqrt{x-1}$ , 设  $F(x) = f(x)g(x)$ ,

(1) 写出  $F(x)$  的表达式;

(2) 画出  $F(x)$  的图像。

★★★10. 已知  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ x-1, & x \leq 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1-x, & x > -1 \\ \sqrt{1-x}, & x \leq -1 \end{cases}, F(x) = f(x) + g(x),$

(1) 求  $F(3), F(-3)$  的值;

(2) 求  $F(x)$  的表达式。

## 第 14 讲 函数的奇偶性

### 一、知识梳理：函数奇偶性的基本概念

1. 偶函数：一般地，如果对于函数  $f(x)$  的定义域内任意一个  $x$ ，都有  $f(-x) = f(x)$ ， $f(-x) - f(x) = 0$ ，那么函数  $f(x)$  就叫做偶函数。
2. 奇函数：一般地，如果对于函数  $f(x)$  的定义域内任一个  $x$ ，都有  $f(-x) = -f(x)$ ， $f(-x) + f(x) = 0$ ，那么函数  $f(x)$  就叫做奇函数。

**注意：**(1) 判断函数的奇偶性，首先看定义域是否关于原点对称，不关于原点对称是非奇非偶函数，若函数的定义域是关于原点对称的，再判断  $f(-x) = \pm f(x)$  之一是否成立。

(2) 在判断  $f(x)$  与  $f(-x)$  的关系时，只需验证  $f(-x) \pm f(x) = 0$  及  $\frac{f(-x)}{f(x)} = \pm 1$  是否成立

即可来确定函数的奇偶性。

### 例一. 判断下列函数的奇偶性。

★(1)  $f(x) = x^2 + |x|$ ，★(2)  $f(x) = x^3 - x$  ★★★(3)  $G(x) = f(x) - f(-x), x \in R$

★★(4)  $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ ，★(5)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  ★(6)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

### 例二. 三次函数奇偶性的判断

★★已知函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，证明：(1) 当  $a = c = 0$  时， $f(x)$  是偶函数

(2) 当  $b = d = 0$  时， $f(x)$  是奇函数

### 例三. 利用函数奇偶性的定义来确定函数中的参数值

★★1. 函数  $f(x) = ax^2 + bx + 3a + b$  是偶函数，定义域为  $[a-1, 2a]$ ，则  $a+b =$ \_\_\_\_\_.

★★★2. 设  $f(x) = ax^2 + bx + 2$  是定义在  $[1+a, 2]$  上的偶函数，则  $f(x)$  的值域是\_\_\_\_\_.

★★★3. 已知  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+a)}$  是奇函数，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_

#### 例四. 利用函数奇偶性的对称

★★1 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是 ( )

- A.  $y = x + e^x$       B.  $y = x + \frac{1}{x}$
- C.  $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$       D.  $y = \sqrt{1+x^2}$

★★2 下列函数中, 为偶函数的是 ( )

- A.  $y = x + 1$       B.  $y = \frac{1}{x}$
- C.  $y = x^4$       D.  $y = x$

★★3 函数  $f(x) = \frac{1}{x} - x$  的图像关于 ( )

- A.  $y$  轴对称      B. 直线  $y = -x$  对称      C. 坐标原点对称      D. 直线  $y = x$  对称

★★★4 已知函数  $f(x+1)$  是  $R$  上的奇函数, 且  $f(-1) = 4$ , 则  $f(3) =$  \_\_\_\_\_

★★★5 已知函数  $f(x+2)$  是  $R$  上的偶函数, 则  $f(-3) = -3$ , 则  $f(7) =$  \_\_\_\_\_

★★★答案:  $-3$

#### 例五. 奇偶函数中的分段问题

★★★1 设  $f(x)$  为定义在  $R$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2^x + 2x + b$  ( $b$  为常数), 则  $f(-1) =$  \_\_\_\_\_

★★★2 已知  $f(x)$  是奇函数, 且当  $x > 0$  时,  $f(x) = x|x-2|$ , 求  $x < 0$  时,  $f(x)$  的表达式。

★★3 已知函数  $f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2x^3 - x^2$ , 则  $f(-3) =$  \_\_\_\_\_

★★4 已知  $f(x)$  是偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 + 2x$ , 求  $f(-4)$

★★★5 设偶函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x^3 - 1 (x \geq 0)$ , 则  $\{x | f(x-2) > 0\} =$  \_\_\_\_\_

### 例六 奇函数的特殊和性质

★★1 已知函数  $f(x) = ax^3 + 2$ , 求  $f(-2) + f(2)$  的和为 \_\_\_\_\_

★★★2 已知  $f(x) = x^7 - bx^5 + cx^3 + dx + 6$ , 且  $f(-3) = 12$ , 则  $f(3) =$  \_\_\_\_\_

★★★3 已知  $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$ ,  $f(-2) = 10$ ,  $f(2) =$  \_\_\_\_\_

★★★★4 已知函数  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ , 若  $f(a) = \frac{2}{3}$ , 则  $f(-a) =$  \_\_\_\_\_

### 例七 函数奇偶性的结合性质

★★★1 设  $f(x)$ 、 $g(x)$  是  $R$  上的函数, 且  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数, 则结论正确的是

- A.  $f(x)g(x)$  是偶函数      B.  $|f(x)|g(x)$  是奇函数  
C.  $f(x)|g(x)|$  是奇函数      D.  $|f(x)g(x)|$  是奇函数

★★★2 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  分别是  $R$  上的偶函数和奇函数, 则下列结论恒成立的是

- A.  $f(x) + |g(x)|$  是偶函数      B.  $f(x) - |g(x)|$  是奇函数  
C.  $|f(x)| + g(x)$  是偶函数      D.  $|f(x)| - g(x)$  是奇函数

★★★3 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域是  $x \in R$  且  $x \neq \pm 1$ ,  $f(x)$  是偶函数,  $g(x)$  是奇函数,

且  $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$ , 求  $f(x)$  和  $g(x)$  的解析式,

### 三. 基础训练

★★★1 已知  $f(x+3)$  是偶函数, 且  $f(0) = 2$ , 则  $2f(6) - 3$  的值为 \_\_\_\_\_

★2 已知  $f(x) = x + 2$ , 则  $f(-3) + f(3)$  的值 \_\_\_\_\_

★★★3 已知  $f(x) = ax^3 + bx - 4$  其中  $a, b$  为常数, 若  $f(-2) = 2$ , 则  $f(2)$  的值等于 \_\_\_\_\_

★★4 已知  $f(x) = ax - 2$ , 则  $f(-3) + f(3)$  的值 \_\_\_\_\_

## 4. 判断下列函数的奇偶性

- ★ (1)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$     ★ (2)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$     ★★★ (3)  $f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x \in (-1,1)$   
 ★★ (4)  $f(x) = \sqrt{x^2-x-2}$     ★★ (5)  $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$     ★ (6)  $f(x) = x^3 - x$     ★★★ (7)  
 $f(x) = 0, x \in [-2,2]$     ★ (8)  $f(x) = x^2 + 1$ ,    ★ (9)  $f(x) = |x| + 1$     ★★ (10)  $f(x) = 2^{|x|}$ ,

★★★5. 设奇函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数, 且  $f(1) = 0$ , 则不等式  $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$

的解集为\_\_\_\_\_

★★★6. 已知偶函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  单调递减,  $f(2) = 0$ , 若  $f(x-1) > 0$ , 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_

★★★7. 已知偶函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  单调增加, 则满足  $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$  的  $x$  取值范围是\_\_\_\_\_

围是\_\_\_\_\_

## 四. 拓展提高

★★★1. 若函数  $f(x), g(x)$  分别是  $\mathbb{R}$  上的奇函数、偶函数, 且满足  $f(x) - g(x) = 2^x$ , 则有  
 (      )

- A.  $f(2) < f(3) < g(0)$     B.  $g(0) < f(3) < f(2)$   
 C.  $f(2) < g(0) < f(3)$     D.  $g(0) < f(2) < f(3)$

★★★2. 函数  $f(x)$  是定义在实数集  $\mathbb{R}$  上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数  $x$  都有  $xf(x+1) = (1+x)f(x)$ , 则  $f(\frac{5}{2})$  的值是\_\_\_\_\_

★★★3. 函数  $f(x)$  是定义在实数集  $\mathbb{R}$  上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数  $x$  都有  $xf(x+1) = (1+x)f(x)$ , 则  $f(f(\frac{5}{2}))$  的值是\_\_\_\_\_

★★★4. 若函数  $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+1}$  在  $[-1,1]$  上是奇函数, 则  $f(x)$  的解析式为\_\_\_\_\_.

★★★5. 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $f(x) = x(1 + \sqrt[3]{x})$ , 则当  $x \in (-\infty, 0)$  时  $f(x) =$ \_\_\_\_\_

★★★6. 已知定义在  $R$  上的奇函数  $f(x)$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 + |x| - 1$ , 那么  $x < 0$  时,

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

★★★★7. 奇函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ , 若  $f(x+2)$  为偶函数, 且  $f(1)=1$ , 则  $f(8)+f(9)=$

( )

★★★★8. 设定义在  $R$  上的奇函数, 满足  $f(x) = f(x+2)$ , 那么

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)$  的值 \_\_\_\_\_

## 五、回家作业

★★1 若函数  $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 3$  是偶函数, 求  $m$  的值。

★★2 若函数  $f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + bx + c - 4$  是奇函数, 求  $(a+c)^2 - 5$  的值。

★★3 函数  $f(x) = ax^3 + (b+1)x^2 + x$  是奇函数, 定义域为  $(b-1, a)$ , 则  $(a+b+2)^2$  的值是 \_\_\_\_\_.

★★★4 若  $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$  是奇函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_

★★★★5 若函数  $f(x) = x^2 - |x+a|$  为偶函数, 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

★★★★6 若  $f(x) = \frac{(x+2)(x+m)}{x}$  为奇函数, 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

★★★★7 已知  $y = f(x) + x^2$  是奇函数, 且  $f(1)=1$ . 若  $g(x) = f(x) + 2$ , 则  $g(-1) =$  \_\_\_\_\_.

★★★★8 设  $f(x)$  是定义在  $R$  上的一个函数, 则函数  $F(x) = f(x) - f(-x)$ , 在  $R$  上一定是 ( )

A. 奇函数      B. 偶函数      C. 既是奇函数又是偶函数      D. 非奇非偶函数

★★★★9 设  $f(x)$  是  $R$  上的奇函数, 且  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{1}{2}$  对称, 则

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5) =$  \_\_\_\_\_

★★★10 已知偶函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x=2$  对称,  $f(3)=3$ , 则  $f(-1) =$  \_\_\_\_\_.

★★★★11 设函数  $f(x)$  对于任意  $x, y \in R$  都有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 求证:  $f(x)$  是奇函数。

★★★12 已知  $t \in R$ ，函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x + t, & x \geq 0, \\ g(x), & x < 0, \end{cases}$  为奇函数，则  $t = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

$g(f(-2)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

★★★★13 已知奇函数  $f(x)$  的，且方程  $f(x) = 0$  仅有三个根  $x_1, x_2, x_3$ ，则  $x_1 + x_2 + x_3$  的值  $\underline{\hspace{2cm}}$

## 第 16 讲 函数的单调性

### 一. 知识梳理

#### 1. 单调增函数的定义:

一般地, 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $A$ , 区间  $I \subseteq A$ .

如果对于区间  $I$  内的任意两个值  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 那么就

$y = f(x)$  在区间  $I$  上是单调 递增 函数,  $I$  称为  $y = f(x)$  的单调 递增 区间.

注意: (1) “任意”、“都有”等关键词;

(2). 单调性、单调区间是有区别的;

#### 2. 单调减函数的定义:

一般地, 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $A$ , 区间  $I \subseteq A$ .

如果对于区间  $I$  内的任意两个值  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 那么就

$y = f(x)$  在区间  $I$  上是单调 递减 函数,  $I$  称为  $y = f(x)$  的单调 递减 区间.

**3. 函数图像与单调性:** 函数在单调增区间上的图像是从左向右 上升 的图像;  
而函数在其单调减区间上的图像是从左向右 下降 的图像。(填 " 上升 " 或 " 下降 " )

反思:

① 图象如何表示单调增、单调减?

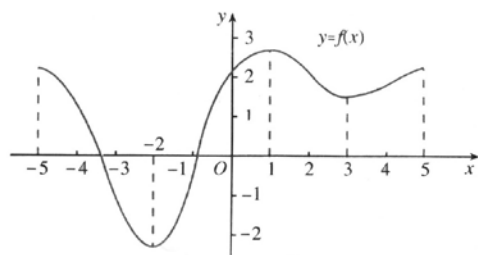
答: 在单调区间上增函数的图像从左向右是上升的, 减函数的图像从左到右是下降的.

② 所有函数是不是都具有单调性? 单调性与单调区间有什么关系?

答: 函数的单调性是对定义域内某个区间而言的.

③ 函数  $f(x) = x^2$  的单调递增区间是  $(0, +\infty)$ , 单调递减区间是  $(-\infty, 0)$ .

**试试:** 如图, 定义在  $[-5, 5]$  上的  $f(x)$ , 根据图象说出单调区间及单调性.



单调递增区间:  $(-2, 1)$  和  $(3, 5)$

单调递减区间:  $(-5, -2)$  和  $(1, 3)$

#### 4. 函数单调性证明的步骤:

(1) 设单调区间内任意  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ ;

(2) 比较  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  的大小;

(3)  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$  增函数;  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$  减函数;

(4) 写结论：函数  $f(x)$  在何区间上单调递增（减）。.

## 二. 典型例题

例 1: 画出下列函数图象，并写出单调区间.

★ (1)  $y = -x^2 + 2$ ;      ★ (2)  $y = \frac{1}{x}$ ;      ★★★ (3)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ -2x + 2, & x > 0 \end{cases}$ .

### (二) 证明函数的单调性:

★★例 2: 求证：函数  $f(x) = -x^3 + 1$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上是单调减函数

如果一个函数有两个单调区间，两个区间一般不取并集:

★★例 3: 函数  $y = \frac{1}{x}$  在其定义域  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上是减函数吗?

### (三) 较复杂函数的单调性证明:

★★例 4: 判断函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  ( $x \in (0, +\infty)$ ) 的单调性，并用单调性的定义证明你的结论.

★★★例 5: 求证：函数  $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$  在  $R$  上是单调减函数.

例 6、★★★ (1) 函数  $y = \sqrt{(x+1)(3-x)}$  的递增区间为\_\_\_\_\_。

★★ (2) 函数  $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$  的单调递减区间为\_\_\_\_\_。

★★★★ (3) 函数  $y = x^2 - 2|x| - 1$  的递减区间为\_\_\_\_\_。

#### (四) 已知函数单调性, 求参数范围:

**例 7:** ★ ★ (1) 若函数  $f(x) = 4x^2 - mx + 5 - m$  在  $[-2, +\infty)$  上是增函数, 在  $(-\infty, -2]$  上是减函数, 则实数  $m$  的值为 \_\_\_\_\_;

★★★ (2) 若函数  $f(x) = 4x^2 - mx + 5 - m$  在  $[-2, +\infty)$  上是增函数, 则实数  $m$  的取值范围为 \_\_\_\_\_;

★★★★ **例 8:** 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$ , 且满足下列条件: (1)  $f(x)$  是奇函数;

(2)  $f(x)$  在定义域上为减函数: (3)  $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$ , 求实数  $a$  的取值范围.

#### 三. 基础训练

★ 1. 在区间  $(0, +\infty)$  上不是增函数的函数是

( )

A.  $y = 2x + 1$

B.  $y = 3x^2 + 1$

C.  $y = \frac{2}{x}$

D.  $y = 2x^2 + x + 1$

★★ 2. 函数  $f(x) = 4x^2 - mx + 5$  在区间  $[-2, +\infty]$  上是增函数, 在区间  $(-\infty, -2)$  上是减函数, 则  $f(1)$  等于

( )

A. -7

B. 1

C. 17

D. 25

★★★ 3. 函数  $f(x)$  在区间  $(-2, 3)$  上是增函数, 则  $y = f(x+5)$  的递增区间是 ( )

A.  $(3, 8)$

B.  $(-7, -2)$

C.  $(-2, 3)$

D.  $(0, 5)$

★★★★ 4. 函数  $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$  在区间  $(-2, +\infty)$  上单调递增, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $(0, \frac{1}{2})$

B.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$

C.  $(-2, +\infty)$

D.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

★★★ 5. 已知函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上单调, 且  $f(a)f(b) < 0$ , 则方程  $f(x) = 0$  在区间  $[a, b]$  内 ( )

A. 至少有一实根

B. 至多有一实根

C. 没有实根

D. 必有唯一的实根

★★★★ 6. 已知函数  $f(x) = 8 + 2x - x^2$ , 如果  $g(x) = f(2 - x^2)$ , 那么函数  $g(x)$  ( )

A. 在区间  $(-1, 0)$  上是减函数

B. 在区间  $(0, 1)$  上是减函数

C. 在区间  $(-2, 0)$  上是增函数

D. 在区间  $(0, 2)$  上是增函数

★★★7. 已知函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数,  $A(0, -1)$ 、 $B(3, 1)$  是其图象上的两点, 那么不等式  $|f(x+1)| < 1$  的解集的补集是 ( )

- A.  $(-1, 2)$  B.  $(1, 4)$   
C.  $(-\infty, -1) \cup [4, +\infty)$  D.  $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

★★★8. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 5)$  上单调递减, 对任意实数  $t$ , 都有  $f(5+t) = f(5-t)$ , 那么下列式子一定成立的是 ( )

- A.  $f(-1) < f(9) < f(13)$  B.  $f(13) < f(9) < f(-1)$   
C.  $f(9) < f(-1) < f(13)$  D.  $f(13) < f(-1) < f(9)$

★★9. 函数  $f(x) = |x|$  和  $g(x) = x(2-x)$  的递增区间依次 ( )

- A.  $(-\infty, 0], (-\infty, 1]$  B.  $(-\infty, 0], [1, +\infty)$   
C.  $[0, +\infty), (-\infty, 1]$  D.  $[0, +\infty), [1, +\infty)$

★★10. 已知函数  $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$  在区间  $(-\infty, 4]$  上是减函数, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a \leq -3$  B.  $a \geq -3$  C.  $a \leq 5$  D.  $a \geq 3$

★★★★11. 已知  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数,  $a, b \in \mathbf{R}$  且  $a+b \leq 0$ , 则下列不等式中正确的是 ( )

- A.  $f(a) + f(b) \leq -f(a) + f(b)$  B.  $f(a) + f(b) \leq f(-a) + f(-b)$   
C.  $f(a) + f(b) \geq -f(a) + f(b)$  D.  $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$

★★★★12. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $y=f(x)$  在  $(-\infty, 2)$  上是增函数, 且  $y=f(x+2)$  图象的对称轴是  $x=0$ , 则 ( )

- A.  $f(-1) < f(3)$  B.  $f(0) > f(3)$  C.  $f(-1) = f(-3)$  D.  $f(2) < f(3)$

#### 四. 拓展提高

★★★1.  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 在  $(-\infty, 0]$  上是减函数, 且  $f(2) = 0$ , 则使得

$f(x) < 0$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_

★★★★2. 已知函数  $f(x)$  是偶函数, 在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 则  $f(1-x^2)$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_

★★★3. 已知  $f(x), g(x)$  都是奇函数, 如果  $f(x) > 0$  的解集是  $(4, 10)$ ,  $g(x) > 0$  的解集为

$(2, 5)$ , 则  $f(x) \cdot g(x) > 0$  的解集为\_\_\_\_\_

★★★4. 已知函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 若当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) = \lg(x+4)$ , 则满足

$f(x) > 0$  的解集\_\_\_\_\_

★★★5. 设  $f(x)$  是奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  内是增函数, 又  $f(-3) = 0$ , 则  $x \cdot f(x) < 0$  的解集是\_\_\_\_\_

★★6. 函数  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 且在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 则下列各式成立的是 ( )

- A.  $f(-2) > f(0) > f(1)$                       B.  $f(-2) > f(-1) > f(0)$   
C.  $f(1) > f(0) > f(-2)$                       D.  $f(1) > f(-2) > f(0)$

★★★7.  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足: 对任意的  $x_1, x_2 \in [0, +\infty) (x_1 \neq x_2)$ , 有  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ .

则 ( )

(A)  $f(3) < f(-2) < f(1)$     (B)  $f(1) < f(-2) < f(3)$

(C)  $f(-2) < f(1) < f(3)$     (D)  $f(3) < f(1) < f(-2)$

★★★8. 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递减, 且为奇函数. 若  $f(1) = -1$ , 则满足  $-1 \leq f(x-2) \leq 1$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_

★★★9. 函数  $f(x) (x \neq 0)$  是奇函数, 且当  $x \in (0, +\infty)$  时是增函数, 若  $f(1) = 0$ , 求不等

式  $f\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0$  的解集\_\_\_\_\_。

★★★★10 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x - a^2| + |x - 2a^2| - 3a^2)。$$

若  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x-1) \leq f(x)$ , 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_

五. 回家作业

★★★1. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$ , 且同时满足下列条件:

(1)  $f(x)$  是奇函数; (2)  $f(x)$  在定义域上单调递减; (3)  $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$ , 求  $a$  的取值范围。

★★★★2. 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $R$ ，且对任意  $a, b \in R$ ，都有  $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ，且当  $x > 0$  时， $f(x) < 0$  恒成立，证明：(1) 函数  $y = f(x)$  是  $R$  上的减函数；(2) 函数  $y = f(x)$  是奇函数。

★★★★3. 已知定义在  $R$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x-4) = -f(x)$ 。

(1) 求  $f(2012)$  的值； (2) 求证：函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x = 2$  对称；

(3) 若  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上是增函数，试比较  $f(-25)$ ,  $f(11)$ ,  $f(80)$  的大小。

★★★★4. 已知函数  $f(x) = x^3 + (m-4)x^2 - 3mx + (n-6)$  ( $x \in R$ ) 的图像关于原点对称 ( $m, n \in R$ )。

(1) 求  $m, n$  的值；

(2) 若函数  $F(x) = f(x) - (ax^2 + b)$  在区间  $[1, 2]$  上为减函数，求实数  $a$  的取值范围。

★★★★5. 设  $a$  为实数, 函数  $f(x) = x^2 + |x - a| + 1$ ,  $x \in R$

(1) 讨论  $f(x)$  的奇偶性; (2) 求  $f(x)$  的最小值。

★★★★6. 函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ , 若  $f(x+1)$  与  $f(x-1)$  都是奇函数, 则( )

- (A)  $f(x)$  是偶函数 (B)  $f(x)$  是奇函数  
(C)  $f(x) = f(x+2)$  (D)  $f(x+3)$  是奇函数