

高二数学 新编教案

目 录

第 1 讲 初中平面向量衔接.....	2
第 2 讲 平面向量的分解定理.....	6
第 3 章 向量的坐标表示及其运算.....	10
第 4 讲 向量的数量积.....	14
第 5 讲 平面向量的应用.....	18
第 6 讲 平面向量单元小结.....	21
第 8 讲 矩阵.....	26
第 9 讲 行列式.....	31
第 10 讲 等差数列与等比数列的复习.....	36
第 11 讲 求数列通项公式的方法.....	41
第 12 讲 求数列的前 n 项和的方法.....	45
第 13 讲 数学归纳法及其应用.....	51
第 14 讲 数列极限.....	56
第 16 讲 数列综合.....	61

第 1 讲 初中平面向量衔接

[知识梳理]

1. 向量

(1) 向量：既有大小，又有方向的量，常用带箭头的线段来表示，如 $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ 等；

(2) 向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ ；

(3) 零向量：长度为零的向量，记作 $\vec{0}$ ，规定零向量的方向是任意的；

(4) 单位向量：长度等于 1 的向量；

(5) 平行向量：方向相同或相反的非零向量叫做平行向量；

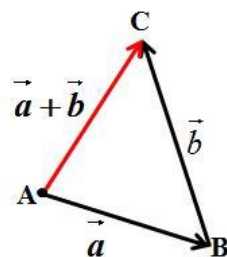
(6) 相等向量：长度相等且方向相同的向量叫做相等向量。

2. 平面向量的加法、减法及其几何意义

(1) 向量加法的三角形法则：已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，在平面内任取一点 A，

作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a} + \vec{b}$ ，即

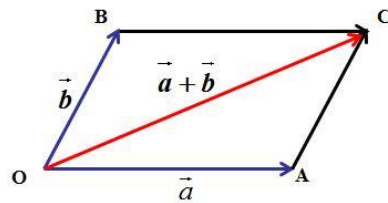
$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ，规定 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ ；



(2) 向量加法的平行四边形法则：以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 为

邻边作 $\square OACB$ ，则以 O 为起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，即

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ ；



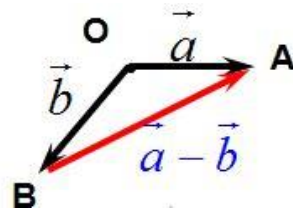
(3) 平面向量加法的运算律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ， $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ；

(4) 相反的向量：把与向量 $\vec{a}$ 长度相同，方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的相反

向量，记作 $-\vec{a}$ ；

(5) 平面向量的减法： $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ， $\vec{a} - \vec{b}$ 可以表示从向量 $\vec{b}$ 的终

点指向向量 $\vec{a}$ 的终点的向量；注意起点相同，连接终点，指向被减向量的终点。



3.平面向量的数乘运算及其几何意义

(1)平面向量的数乘：规定实数 λ 与平面向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，叫做向量的数乘，记作 $\lambda\vec{a}$ ，它的长度和方向规定如下： $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ，当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相反；特别的，当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ ；

(2)向量数乘的运算律： $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ； $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ； $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ；

(3)向量的线性运算：向量的加、减、数乘；

(4)平行向量：方向相同或相反的向量叫做平行向量，规定零向量与任何向量都是平行向量；

(5)平面向量共线定理：向量 $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 与 $\vec{b}$ 平行的充要条件是：存在唯一实数 λ ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ；

* (6)向量平行的充要条件：非零向量 $\vec{a} / \vec{b} \Leftrightarrow$ 存在不都为零的实数 λ, μ ，使 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$ 成立；

(7)证明三点共线的方法：点 A, B, C 共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ；

(8)与向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量： $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ 。

[典型例题]

1.★★在矩形 $ABCD$ 中， $|AB| = 2, |BC| = 3$ ，则 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}| =$ _____。

2.★★已知 $|\overrightarrow{AB}| = 12, |\overrightarrow{AC}| = 5, \angle BAC = 90^\circ$ ，则 $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| =$ _____。

3.★★已知 $|\overrightarrow{OA}| = 8, |\overrightarrow{OB}| = 5$ ，则 $|\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是_____。

4.★★已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，下列等式成立的是_____。

① $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}|$ ；② $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ ；

③ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ ；④ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}|$ 。

5.★★化简： $-\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DO} =$ _____。

6.★★已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 5$ ，则 $|\vec{b}| =$ _____。

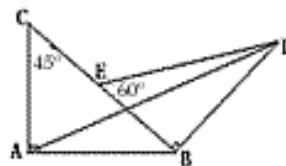
7.★★★★已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} + \vec{b} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\vec{b}$ ，且 $|\vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{a}| + |\vec{a} + \vec{b}| =$ _____。

8.★★★★已知菱形 $ABCD$ 的边长为 1，它的一个内角 $\angle BAC = 60^\circ$ ，则 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| =$ _____。

9.★★★在正六边形 $ABCDEF$ 中, 若 $AB=1$, 则 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD}| =$ _____.

10.★★★★已知 $P(3\cos\alpha, 3\sin\alpha), Q(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, 则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的取值范围是_____.

11.★★★★两块斜边长相等的直角三角形拼在一起, 若 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x+y =$ _____.偶



12.★★★★已知 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$, 则当 $x =$ _____时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为_____.

13.★★下列命题是真命题的个数为()

①如果非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反, 那么 $\vec{a} + \vec{b}$ 的方向必与 $\vec{a}, \vec{b}$ 之一的方向相同;

②在 $\square ABC$ 中, 必有 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;

③若 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, 则 A, B, C 为一个三角形的三个顶点;

④若 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为非零向量, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 与 $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ 一定相等.

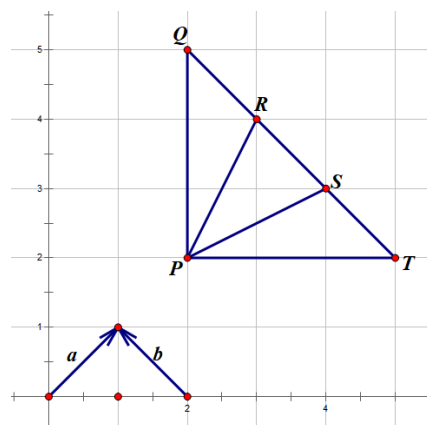
A. 0 个; B. 1 个; C. 2 个; D. 3 个.

14.★★如图所示, 下列结论不正确的是()

① $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$; ② $\overrightarrow{PT} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$;

③ $\overrightarrow{PS} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; ④ $\overrightarrow{PR} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$;

A. ①②; B. ③④; C. ①③; D. ②④.



15.★★★设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是空间中给定的 5 个不同的点, 则使

$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = \vec{0}$ 成立的点 M 的个数为()

A. 0; B. 1; C. 5; D. 10.

16.★★★★在平行四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 交于点 O , E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD

交于点 F , 若 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AF} =$ ()

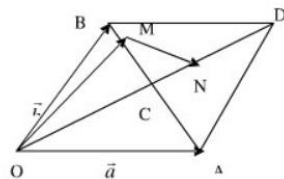
A. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$; D. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

17.★★★在四边形ABCD中, 对角线AC、BD交于点O, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$, $\cos \angle DAB = \frac{1}{2}$, 求 $|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}|$ 与 $|\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}|$ 的值.

18.★★★已知 O, A, B, C 为平面内不共线的四点, 记 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 若 $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, 求证: A, B, C 三点共线, 且 C 恰好为线段 AB 的中点.

19.★★★已知 D, E 为 $\square ABC$ 的边 AB, AC 的中点, 延长 CD, BE 分别至 M, N, 使 DM=CD, NE=BE, 求证: M, A, N 三点共线, 且点 A 平分线段 MN.

20.★★★★四边形 OADB 是以 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 为邻边的平行四边形, 又 $BM = \frac{1}{3}BC$, $CN = \frac{1}{3}CD$, 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{MN}$.



21.★★★★在平面直角坐标系中, 角 θ 满足 $\sin \frac{\theta}{2} = -\frac{3}{5}$, $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$, $\overrightarrow{OA} = (0, -1)$, 设点 B 是角 θ 终边上一动点, 求 $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ 的取值范围.

第 2 讲 平面向量的分解定理

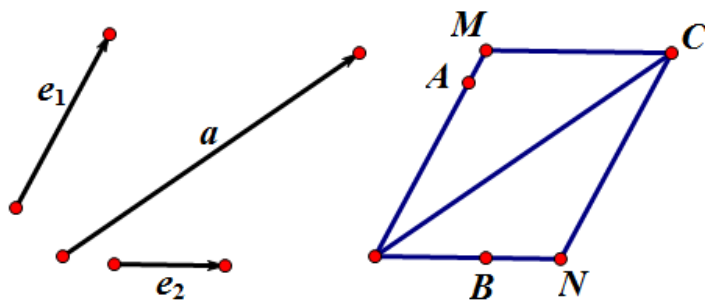
[知识梳理]

1. 平面向量的线性组合：平面内的任一向量 $\vec{a}$ 都可以表示为两个不平行向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的线性组合。

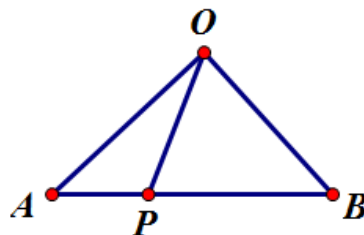
2. 平面向量分解定理：如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是同一平面内两个不平行的非零向量，那么对于这个平面内的任意向量 $\vec{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ 。

(1) 不平行的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 叫做这一平面内所有向量的一组基。

(2) 同一平面内任一向量都可以唯一表示为两个指定的不共线向量的线性组合，也叫向量共面定理。



3. 共线向量的表示：设 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 不共线，则 P 点在 AB 上的充要条件是：存在实数 λ, μ ，且 $\lambda + \mu = 1$ ，使 $\vec{OP} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$ 。

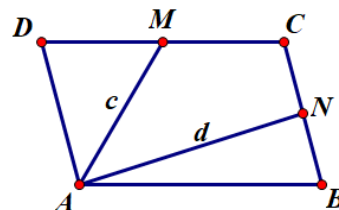


[典型例题]

1. ★★ 若 AD 是 $\square ABC$ 的中线， $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$ ，则 $\vec{AD} =$ _____。

2. ★★ 点 R 在线段 PQ 上，且 $\vec{PR} = \frac{3}{5} \vec{PQ}$ ，设 $\vec{PR} = \lambda \vec{QR}$ ，则实数 $\lambda =$ _____。

3. ★★ 在平行四边形 ABCD 中，点 M, N 分别是 DC, BC 的中点，已知 $\vec{AM} = \vec{c}, \vec{AN} = \vec{d}$ ，则 $\vec{AB} =$ _____； $\vec{AD} =$ _____。



4. ★★ 点 G 是 $\square ABC$ 的重心，D 是 AB 的中点，且 $\vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = \lambda \vec{GD}$ ，则 $\lambda =$ _____。

5. ★★ 若 $|\vec{a}| = 5, \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反，且 $|\vec{b}| = 7$ ，则 $\vec{a} =$ _____ $\vec{b}$ 。

6. ★★ 平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 平行的充要条件是_____。

① $\vec{a}, \vec{b}$ 方向相同；② $\vec{a}, \vec{b}$ 两向量中至少有一个是零向量；

③ 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ ； $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ；④ 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 ，使得 $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$ 。

7.★★★在 $\square ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, M 是 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}=\underline{\hspace{2cm}}$. (用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示).

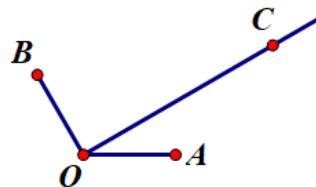
8.★★★已知平面上 $\square ABC$ 和一点 O , 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$, 又 OA, BC 的中点分别为 D, E , 则向量 $\overrightarrow{DE}=\underline{\hspace{2cm}}$.

9.★★★设 G 为 $\square ABC$ 的重心, 若 $\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CB}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AG}=\underline{\hspace{2cm}}$.

10.★★★★在 $\square ABC$ 中, 点 M 是 AB 的中点, 点 N 是靠近点 A 的三等分点, BN 与 CM 相交于点 E , 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$, 则用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AE}=\underline{\hspace{2cm}}$.

11.★★★★ $\square ABC$ 的外接圆的圆心为 O , 两条边上的高的交点为 $H, \overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, 则实数 $m=\underline{\hspace{2cm}}$.

12.★★★★已知, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120° , $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的夹角为 30° , 若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}=\underline{\hspace{2cm}}$.



13.★★ $\square ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$, 若 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}, |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{CD}=\underline{\hspace{2cm}}$ ()

A. $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; B. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; C. $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$; D. $\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$.

14.★★设 P 是 $\square ABC$ 所在平面内的一点, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 则()

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$; B. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$; C. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$; D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

15.★★★下列命题中, 真命题的个数为()

①向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线;

②向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线, $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 不共线, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不共线;

③向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的充要条件是有且只有一个实数 λ , 使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$;

④向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量, 则点 A, B, C, D 必在同一条直线上.

A. 0 个; B. 1 个; C. 2 个; D. 3 个.

16.★★★★设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点, 若 $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}, \lambda \in \mathbb{R}$,

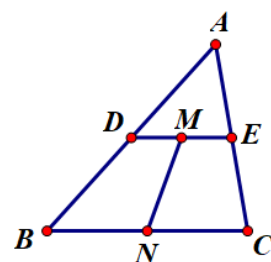
$\overrightarrow{A_1A_4} = \mu \overrightarrow{A_1A_2}, \mu \in \mathbb{R}$, 其中 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$, 则称 A_3, A_4 调和分割点 A_1, A_2 , 已知平面上的点 C, D 调

和分割点 A, B , 则下面说法正确的是()

- A. C 可能是线段 AB 的中点; B. D 可能是线段 AB 的中点;
C. C, D 可能同时在线段 AB 上; D. C, D 不可能同时在线段 AB 的延长线上.

17.★★★已知 D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 的中点, M, N 分别是 DE, BC 的中点, 已知

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}, \vec{b}$ 分别表示 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{MN}$.



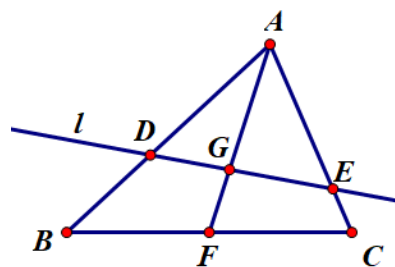
18.★★★已知四边形 ABCD 的边 AD、BC 的中点分别为 E、F, 求证: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

19.★★★(1)已知 O 为平面内任意一点, A, B, C 为平面内三点, 求证: A, B, C 三点在一条直线上的充要条件是 $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$, 且 $\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

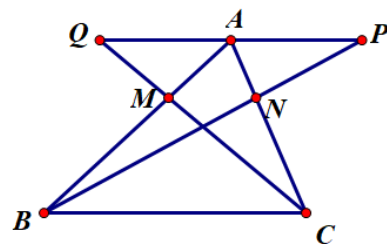
(2)在 $\triangle ABC$ 中, F 是 BC 中点, 直线 l 分别交 AB、AF、AC 于点 D、

G、E, 如果 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AC}$, 证明: G 为 $\triangle ABC$ 重心

的充要条件是 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$.



- 20.★★★★在 $\triangle ABC$ 中, 点N在AC上, 且 $AN = \frac{1}{3}AC$, M在AB上, 且 $AM = \frac{1}{3}AB$, 在BN的延长线上取点P, 使 $NP = \frac{1}{2}BN$, 在CM的延长线上取一点Q, 使 $MQ = \frac{1}{2}CM$, 用平面向量的方法证明: P,A,Q三点共线.



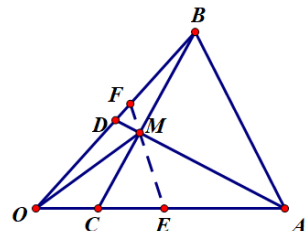
- 21.★★★★在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, AD与BC相交于点

M, 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$,

(1)用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OM}$;

(2)在线段AC上取一点E, 在线段BD上取一点F, 使EF过点M, 设 $\overrightarrow{OE} = \lambda\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OF} = \mu\overrightarrow{OB}$, 不

论E、F在线段AC、BD上如何移动, 试说明 $\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\mu}$ 是定值.

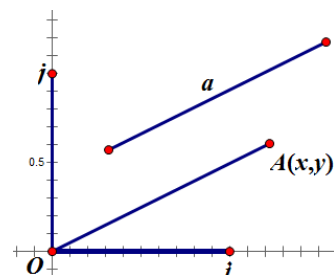


第3章 向量的坐标表示及其运算

[知识梳理]

1. 向量的正交分解

(1) 向量的正交分解：分别选取与 x 轴、 y 轴方向相同的单位向量 $\vec{i}, \vec{j}$ 作为基，由平面向量的基本定理，对于任一向量 $\vec{a}$ ，存在唯一确定的实数对 (x, y) 使得 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}, x, y \in \mathbb{R}$ ，称实数对 (x, y) 为向量 $\vec{a}$ 的坐标，记作 $\vec{a} = (x, y)$ ，其中 x 为向量 $\vec{a}$ 在 x 轴上的坐标， y 为向量 $\vec{a}$ 在 y 轴上的坐标。



(2) 位置向量：把向量的起点置于坐标原点，作 $\vec{OA} = \vec{a}$ ，点 A 的坐标 (x, y) 就是 $\vec{a}$ 的坐标，从原点引出的向量 $\vec{OA}$ 称之为位置向量。

2. 平面向量的运算

设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$

$$(1) \text{若 } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

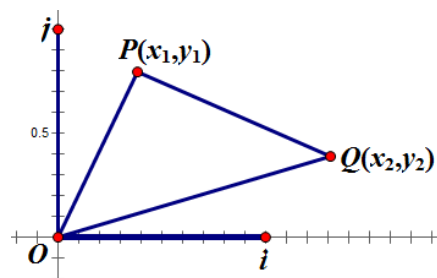
$$(2) \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2).$$

$$(3) \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

$$(4) |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

$$(5) \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1.$$

$$(6) \text{设点 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$



3. 线段的定比分点公式

设点 P 是直线 P_1P_2 上异于 P_1, P_2 的任意一点，若存在一个实数 λ ，使 $\vec{P_1P} = \lambda \vec{PP_2}$ ，则 λ 叫做点 P 分有向线段 $\vec{P_1P_2}$ 所成的比， P 点叫做有向线段 $\vec{P_1P_2}$ 的以定比为 λ 的定比分点。

$$\text{设 } P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P(x, y) \text{ 分有向线段 } \vec{P_1P_2} \text{ 所成的比为 } \lambda, \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时, 得到线段 } P_1P_2 \text{ 的中点公式 } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

[典型例题]

- 1.★★已知向量 $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b}$ 的单位向量为_____.
- 2.★★在 $\square ABCD$ 中, $A(2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(0, 3)$, 则 $\overrightarrow{CD}$ 的坐标为_____.
- 3.★★已知 $A(1, 1)$, $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, 点 C 在 x 轴上, A, B, C 三点共线, 则 C 点坐标为_____.
- 4.★★在平面直角坐标系中, $O(0, 0)$, $P(6, 8)$, 将向量 $\overrightarrow{OP}$ 按逆时针方向旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后, 得到向量 $\overrightarrow{OQ}$, 则点 Q 的坐标是_____.
- 5.★★已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, -1)$, 点 O 为坐标原点, 若向量 $\overrightarrow{OA} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, 则向量 $\overrightarrow{BO}$ 的坐标为_____.
- 6.★★已知 $|\vec{a}| = 2\sqrt{17}$, $\vec{b} = (-1, 4)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同, 则 $\vec{a} =$ _____.
- 7.★★★已知点 $A(-1, -5)$ 和向量 $\vec{a} = (2, 3)$, 若向量 $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$, 则点 B 的坐标为_____.
- 8.★★★已知点 $A(8, -1)$, $B(1, -3)$, 若点 $C(2m-1, m+2)$ 在直线 AB 上, 则 m 的值是_____.
- 9.★★★设向量 $\vec{a} = (-1, 2)$, 点 $A(-2, 1)$, 若向量 $\overrightarrow{AB} // \vec{a}$, 且 $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{5}$, 则向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标为_____.
- 10.★★★★已知正方形 $PQRS$ 的对角线的交点为 M , 坐标原点 O 不在正方形内部, 且 $\overrightarrow{OP} = (0, 3)$, $\overrightarrow{OS} = (4, 0)$, 则向量 $\overrightarrow{RM}$ 等于_____.
- 11.★★★★已知 $M(3, -2)$, $N(-5, -1)$, 若 $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$, 则点 P 的坐标为_____.
- 12.★★★★设 $\vec{i}, \vec{j}$ 是平面直角坐标系内 x 轴, y 轴正方向上的单位向量, 且 $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, 则 $\square ABC$ 的面积等于_____.
- 13.★★若向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1)$, $\vec{c} = (-1, 2)$, 则 $\vec{c} = (\quad)$

A. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$; B. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$; C. $\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; D. $-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

14.★★已知 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(x,1)$, 且 $\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 平行, 则 x 等于()

A. 1; B. 2; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{1}{2}$.

15.★★★已知向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(2,-3)$, 若向量 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{c}+\vec{a})/\vec{b}$, $\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})$, 则 $\vec{c}=()$

A. $(\frac{7}{9}, \frac{7}{3})$; B. $(-\frac{7}{3}, \frac{7}{9})$; C. $(\frac{7}{3}, \frac{7}{9})$; D. $(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3})$.

16.★★★★设点 $A(-1,2)$, $B(n-1,3)$, $C(-2,n+1)$, $D(2,2n+1)$, 若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 平行且同向,

则 n 的值为() A. 2; B. -2; C. ± 2 ; D. 1.

17.★★★已知 $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(4,5)$, 及 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$, 求,

(1) t 为何值时, P 在 x 轴上; P 在 y 轴上; P 在第二象限;

(2)四边形 $OABP$ 能否为平行四边形, 若能, 求出相应的 t 值, 若不能, 请说明理由.

18.★★★已知点 $A(x,0)$, $B(2x,1)$, $C(2,x)$, $D(6,2x)$,

(1)求实数 x 的值, 使向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线;

(2)当向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线时, 点 A, B, C, D 能否在一条直线上.

19.★★★已知 $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = (5-m)\vec{i} - (3+m)\vec{j}$, 其中 $\vec{i}, \vec{j}$ 分别是直角坐标系内 x 轴和 y 轴上正方向上的单位向量,

(1)若点 A, B, C 能构成三角形, 求实数 m 应满足的条件;

(2)若 $\triangle ABC$ 是以点 A 为直角顶点的直角三角形, 求实数 m 的值.

20.★★★★已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{x} = \vec{a} + (t^2 + 1)\vec{b}$, $\vec{y} = -\frac{1}{k}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}$, 是否存在正实数 k, t , 使得 $\vec{x} \parallel \vec{y}$, 若存在, 求出取值范围, 若不存在, 请说明理由.

21.★★★★已知平面上三点的坐标分别为 $(2, 1)$, $(3, -1)$, $(-3, 0)$, 求第四个点的坐标, 使这四点构成平行四边形的四个顶点.

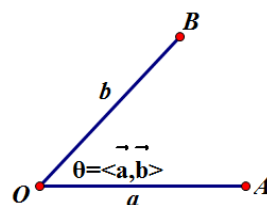
第4讲 向量的数量积

[知识梳理]

1. 两个向量的夹角：已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则

$\angle AOB = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ ，叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ，当 $\theta = 0$ 时，

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；当 $\theta = \pi$ 时， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。



2. 向量的数量积：已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是非零向量，则称 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积，记作

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

(1) 向量的数量积是一个数；(2) $\vec{0}$ 与任何向量的数量积为 0；(3) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ；

(4) 把 $|\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ 叫做向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 的方向上的投影，意味着 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于其中一个向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$ 与另一个向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 的方向上的投影 $|\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ 的乘积。

3. 向量数量积的运算律

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ；(2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$ ；(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ 。

4. 重要公式

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ；(2) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ；(3) $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ ；

(4) 与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量是 $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ ；(5) 若 $\vec{a} = (x, y)$ ，则 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ；

(6) 若 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2, \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ 。

5. 两向量平行、垂直的充要条件：若 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$

(1) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$ ；(2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ 。

6. 常用算式 (1) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ；(2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ 。

[典型例题]

- 1.★★已知： $\vec{a}, \vec{b}$ 的模分别为 3 和 4，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.
- 2.★★已知 $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 12$ ，若 $(3\vec{a}) \cdot \left(\frac{1}{5}\vec{b}\right) = -36$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.
- 3.★★若 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.
- 4.★★已知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，要使 $\lambda\vec{b} - \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则 $\lambda =$ _____.
- 5.★★已知 $|\vec{a} + \vec{b}| = 7, |\vec{a} - \vec{b}| = 3$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.
- 6.★★已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $\vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的射影为_____.
- 7.★★★已知 $\vec{a}$ 是平面内的单位向量，若向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，则 $|\vec{b}|$ 的取值范围是_____.
- 8.★★★若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，则 $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.
- 9.★★★设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是单位向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$ 的最小值为_____.
- 10.★★★★已知 M 是 $\square ABC$ 内的一点(不含边界)，且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}, \angle BAC = 30^\circ$ ，若 $\square MBC, \square BMA, \square MAC$ 的面积分别为 x, y, z ，记 $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ ，则 $f(x, y, z)$ 的最小值_____.
- 11.★★★★★已知平面向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, |\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ ，则 $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ 的值是_____.
- 12.★★★★★在 $\square ABC$ 中， $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 2, \overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ，若存在实数 λ ，对于任意的角 $A, \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{5}{4}$ 恒成立，则满足条件的实数 $\lambda =$ _____.

13.★★已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 均为单位向量，其夹角为 θ ，有下列四个命题，

$$P_1: |\vec{a} + \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right); \quad P_2: |\vec{a} + \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right];$$

$$P_3: |\vec{a} - \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right); \quad P_4: |\vec{a} - \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right],$$

其中的真命题是()

- A. P_1, P_4 ; B. P_1, P_3 ; C. P_2, P_3 ; D. P_2, P_4 .

14.★★已知 $\vec{i}$ 与 $\vec{j}$ 为互相垂直的单位向量, $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + \lambda\vec{j}$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角, 则实数 λ 的取值范围是()

A. $(-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{1}{2})$; B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$; C. $(-2, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$; D. $(-\infty, \frac{1}{2})$.

15.★★★设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是任意的非零向量, 且相互不共线, 则下列命题中, 真命题的个数是()

① $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$; ② $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$;

③ $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直; ④对任意向量 $\vec{a}$, 有 $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$,

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4

16.★★★★在 $\square ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$, 则

$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 等于()

A. $\frac{4}{9}$; B. $\frac{4}{3}$; C. $-\frac{4}{3}$; D. $-\frac{4}{9}$.

17.★★★已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}, \vec{n} = k\vec{a} + 2\vec{b}$,

(1)当 k 为何值时, $\vec{m} \parallel \vec{n}$; (2)当 k 为何值时, $\vec{m} \perp \vec{n}$.

18.★★★设平面内两非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直, 且 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, 又 k, t 是两个不同时为零的实数,

(1)若 $\vec{x} = \vec{a} + (t-3)\vec{b}$ 与 $\vec{y} = -k\vec{a} + t\vec{b}$ 垂直, 求 k 关于 t 的函数关系式 $k = f(t)$;

(2)求函数 $k = f(t)$ 的最小值.

19.★★★已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ，且 $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 7, |\vec{c}| = 10$ ，求 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角的余弦值.

20.★★★★已知 $\overrightarrow{AB} = (6, 1), \overrightarrow{BC} = (x, y), \overrightarrow{CD} = (-2, -3)$,

(1)若 $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{DA}$ ，求 x, y 之间的关系式；

(2)在(1)的条件下，若 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ ，求 x, y 的值，以及四边形 ABCD 的面积.

21.★★★★设向量 $\vec{a} = (4\cos\alpha, \sin\alpha), \vec{b} = (\sin\beta, 4\cos\beta), \vec{c} = (\cos\beta, -4\sin\beta)$,

(1)若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} - 2\vec{c}$ 垂直，求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值；

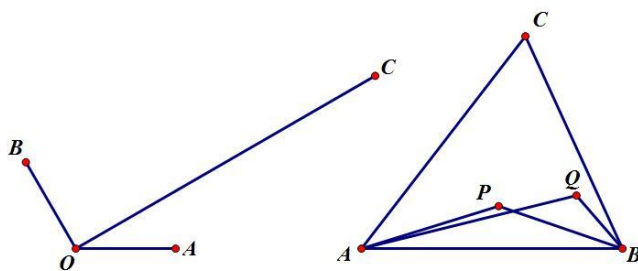
(2)求 $|\vec{b} + \vec{c}|$ 的最大值；

(3)若 $\tan\alpha \tan\beta = 16$ ，求证： $\vec{a} // \vec{b}$.

第 5 讲 平面向量的应用

[典型例题]

- ★★在 $\square ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$, D, E 是 BC 上的三等分点, 则 $\overrightarrow{AD} =$ _____.
- ★★已知 $\overrightarrow{OA} = (-3, -1), \overrightarrow{OB} = (2, 3), \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 将向量 $\overrightarrow{OC}$ 按逆时针方向旋转 90° 得到 $\overrightarrow{OD}$, 则 $\overrightarrow{OD}$ 的坐标是_____.
- ★★平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于原点 O , 且 $\overrightarrow{AD} = (3, 7), \overrightarrow{AB} = (-2, 1)$, 则向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标为_____.
- ★★已知 $|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 点 C 在 AB 上, 且 $\angle AOC = 30^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 则 $m + n =$ _____.
- ★★若 $\overrightarrow{OP_1} = \vec{a}, \overrightarrow{OP_2} = \vec{b}, \overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}, \lambda \neq -1$, 则 $\overrightarrow{OP} =$ _____. (用 $\lambda, \vec{a}, \vec{b}$ 表示)
- ★★在 $\square ABC$ 中, D, E 分别为 BC, AC 的中点, F 为 AB 上的点, 且 $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AF}$, 若存在实数 x, y 满足 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AF} + y\overrightarrow{AE}$, 则 $x + y =$ _____.
- ★★★★已知 $\vec{i}, \vec{j}$ 是两个不共线的向量, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \overrightarrow{CB} = \vec{i} + \lambda\vec{j}, \overrightarrow{CD} = -2\vec{i} + \vec{j}$, 若 A, B, D 三点共线, 则实数 $\lambda =$ _____.
- ★★★★已知 $\square ABCD$ 中, $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{PD} =$ _____.
- ★★★★在平行四边形 $ABCD$ 中, E 和 F 分别是 CD 和 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AE} + \mu\overrightarrow{AF}$, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.
- ★★★★★如图, 平面内三个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120° , $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30° , 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$, 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为_____.



11.★★★★如图, P, Q 为 $\square ABC$ 内的两点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 则 $\square ABP$ 的面积与 $\square ABQ$ 的面积之比为_____.

12.★★★★向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的终点 A, B, C 在一条直线上, 且 $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{CB}$, 设

$\overrightarrow{OA} = \vec{p}, \overrightarrow{OB} = \vec{q}, \overrightarrow{OC} = \vec{r}$, 下列等式是关于 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 之间关系的论述,

① $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}$; ② $\vec{r} = -\vec{p} + 2\vec{q}$; ③ $\vec{r} = \frac{3}{2}\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}$; ④ $\vec{r} = 2\vec{p} - \vec{q}$,

其中正确的有_____.

13.★★已知四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 P 在对角线 AC 上(不包括端点 A, C), 则 $\overrightarrow{AP}$ 等于()

A. $\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}), \lambda \in (0, 1)$; B. $\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}), \lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

C. $\lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}), \lambda \in (0, 1)$; D. $\lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}), \lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

14.★★若 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB$ 的平分线上的向量 $\overrightarrow{OM}$ 为()

A. $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$; B. $\lambda\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right), \lambda$ 由 $\overrightarrow{OM}$ 确定; C. $\frac{1}{|\vec{a} + \vec{b}|}(\vec{a} + \vec{b})$; D. $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a} + \vec{b}|}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a} + \vec{b}|}\vec{b}$.

15.★★★在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 的中点, DE 交 AF 于 H , 记 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 分别为 $\vec{a}, \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AH} =$ ()

A. $\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$; B. $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$; C. $-\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$; D. $-\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$

16.★★★★已知点 $A(2, 1), B(0, 2), C(-2, 1), O(0, 0)$, 给出下面的结论,

①直线 OC 与直线 BA 平行; ② $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; ③ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$; ④ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$, 其中正确结论的个数是()

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

17.★★★已知向量 $\vec{a} = (\sin \theta, 1)$, $\vec{b} = (1, \cos \theta)$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

(1)若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求 θ ; (2)求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的最大值.

18.★★★(1)求证: $\triangle ABC$ 的三条高 AD、BE、CF 交于一点;

(2)设 $\triangle ABC$ 外心为 O, 垂心为 H, 重心为 G, 求证: O、G、H 共线, 并求 $OG:GH$.

19.★★★运用向量方法证明: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

20.★★★★已知向量 $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ 满足条件 $\vec{OP_1} + \vec{OP_2} + \vec{OP_3} = \vec{0}$, $|\vec{OP_1}| = |\vec{OP_2}| = |\vec{OP_3}| = 1$, 判断

$\triangle P_1P_2P_3$ 的形状

21.★★★★已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为互不平行的非零向量, 设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $\vec{a}x^2 + \vec{b}x + \vec{c} = \vec{0}$ 的两实根,

求证: $x_1 = x_2$.

第6讲 平面向量单元小结

[知识梳理]

1. 向量坐标的有关概念

(1) 基本单位向量 (2) 位置向量 (3) 向量的正交分解 (4) 向量的模: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. 向量平行的充要条件

3. 定比分点公式

4. 平面向量的数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$, ($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 其中 θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角

(1) 投影的概念: $|\vec{b}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影。 $|\vec{a}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影;

(2) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义

5. 向量数量积的重要性质及运算律

6. 两个向量平行的充要条件 两个向量垂直的充要条件

7. 平面向量分解定理

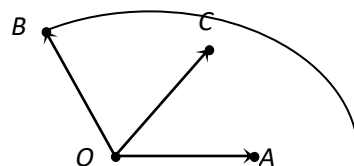
[典型例题]

例 1. ★★★ 已知向量 $\vec{m} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 和 $\vec{n} = (\sqrt{2} - \sin \theta, \cos \theta)$, $\theta \in (\pi, 2\pi)$, 且 $|\vec{m} + \vec{n}| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$,

求 $\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ 的值.

例 2. ★★★ 已知 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{y} = 3\vec{b} - \vec{a}$, 则 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角是多少.

例 3.★★★★给定两个长度为 1 的平面向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 夹角为 120° . 如图所示, 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overline{AB}$ 上变动. 若 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} (x, y \in \mathbb{R})$, 则 $x+y$ 的最大值是_____.



例 4.★★★★已知 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之间有关系式 $|k\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - k\vec{b}|$, 其中 $k > 0$,

(1) 用 k 表示 $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (2) 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最小值, 并求此时 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的大小.

例 5.★★★★已知 $\triangle OFQ$ 的面积为 S , 且 $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FQ} = 1$, 若 $\frac{1}{2} < S < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{FQ}$ 夹角 θ 的取值范围是_____.

例 6.★★★★在 $\triangle ABC$ 中, 记 $\angle BAC = x$ (角的单位是弧度制), $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$, $4 \leq S \leq 4\sqrt{3}$.

(1) 求 x 的取值范围;

(2) 就(1)中 x 的取值范围, 求函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) + 2\cos^2 x - \sqrt{3}$ 的最大值、最小值.

[课后练习]

- 1.★★已知 $|a|=1$, $|b|=\sqrt{2}$, 若 $(a-b)\perp a$, 则向量 a 与 b 的夹角为_____.
- 2.★★已知 A, B, C 是锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角, 向量 $p=(-\sin A, 1)$, $q=(1, \cos B)$, 则 p 与 q 的夹角是_____(填锐角, 钝角或直角).
- 3.★★已知向量 a, b 满足 $|a|=1$, $|b|=2$, a 与 b 的夹角为 60° , 则 $|a-b|$ =_____.
- 4.★★★设 E, F 分别是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的两个三等分点, 已知 $AB=3, AC=6$, 则 $\vec{AE}\cdot\vec{AF}$ =_____.
- 5.★★★在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=2$, $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 最大值是_____.
- 6.★★★已知 O 是 $\triangle ABC$ 的内部一点, $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$, $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=2$, 且 $\angle BAC=60^\circ$, 则 $\triangle OBC$ 的面积为_____.
- 7.★★★在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1, -2)$, $B(2, 3)$, $C(-2, -1)$.
 (1)求以线段 AB, AC 为邻边的平行四边形两条对角线的长;
 (2)设实数 t 满足 $(\vec{AB}-t\vec{OC})\cdot\vec{OC}=0$, 求 t 的值.
- 8.★★★已知平面向量 $a=(\sqrt{3}, -1)$, $b=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
 (1)若存在实数 k 和 t , 满足 $x=(t+2)a+(t^2-t-5)b$, $y=-ka+4b$, 且 $x\perp y$, 求出 k 关于 t 的关系式 $k=f(t)$;
 (2)根据(1)的结论, 试求出函数 $k=f(t)$ 在 $t\in(-2, 2)$ 上的最小值.
- 9.★★★若等边三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面内一点 M 满足 $\vec{CM}=\frac{1}{6}\vec{CB}+\frac{2}{3}\vec{CA}$, 则 $\vec{MA}\cdot\vec{MB}$ =_____.
- 10.★★★已知向量 p 的模为 $\sqrt{2}$, 向量 q 的模为 1 , p 与 q 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且 $a=3p+2q$, $b=p-q$, 则以 a, b 为邻边的平行四边形的长度较小的对角线长为_____.

11.★★下列命题正确的是 ()

A、单位向量都相等；B、若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是共线向量， $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 是共线向量，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 是共线向量

C、 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ；D、若 $\vec{a}_0$ 与 $\vec{b}_0$ 是单位向量，则 $\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = 1$.

12.★★下列命题中正确的是()

A、 $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{AB}$ B、 $\vec{AB} + \vec{BA} = 0$ C、 $\vec{0} \cdot \vec{AB} = \vec{0}$ D、 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

13.★★若向量 $\vec{a} = (1,1)$ ， $\vec{b} = (1,-1)$ ， $\vec{c} = (-1,2)$ ，则 $\vec{c}$ 等于 ()

A、 $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ B、 $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ C、 $\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ D、 $-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

14.★★已知点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点，则向量 $\vec{CD}$ 等于 ()

A、 $-\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$ B、 $-\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$ ；C、 $\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$ D、 $\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$

15.★★已知向量 $\vec{a} = (-5,6)$ ， $\vec{b} = (6,5)$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ ()

A、垂直 B、不垂直也不平行 C、平行且同向 D、平行且反向

16.★★若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 为任意向量， $m \in \mathbb{R}$ ，则下列等式不一定成立的是 ()

A、 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ B、 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

C、 $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ D、 $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

17.★★已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ ， $\vec{a} + \vec{b} = (-3,6)$ ， $\vec{a} - \vec{b} = (-3,2)$ ，则 $\vec{a}^2 - \vec{b}^2$ 等于 ()

A、-3 B、-24 C、21 D、12

18.★★若三点 $A(2,3)$ ， $B(3,a)$ ， $C(4,b)$ 共线，则有 ()

A、 $a=3, b=-5$ B、 $a-b+1=0$ C、 $2a-b=3$ D、 $a-2b=0$

19.★★在四边形 $ABCD$ 中， $\vec{AB} = \vec{DC}$ ，且 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ ，则四边形 $ABCD$ 是 ()

A、矩形 B、菱形 C、直角梯形 D、等腰梯形

20.★★若 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=2$ ， $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ，且 $\vec{c} \perp \vec{a}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

A、 30° B、 60° C、 120° D、 150°

21.★★★点 P 在平面上做匀速直线运动, 速度向量 $\vec{v} = (4, -3)$ (运动方向与 $\vec{v}$ 相同, 且每秒移动的距离为 $|\vec{v}|$ 个单位), 设开始时点 P 的坐标为 $(-10, 10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ()

- A、 $(-2, 4)$ B、 $(-30, 25)$ C、 $(10, -5)$ D、 $(5, -10)$

22.★★★已知 $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OB}| = \sqrt{3}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC = 30^\circ$, 设 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB} (m, n \in R)$, 则 $\frac{m}{n}$ 等于()

- A、 $\frac{1}{3}$ B、3 C、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D、 $\sqrt{3}$

23.★★★已知平行四边形 $ABCD$ 中, $A(-4, 2)$, $B(-2, 6)$, $C(5, 8)$, 则 D 的坐标是_____.

24.★★★在平行四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AN} = 3\vec{NC}$, M 为 BC 的中点, 则 $\vec{MN} =$ _____(用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

25.★★★在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, D 为边 BC 的中点, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC} =$ _____.

26.★★★若向量 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

27.★★★已知平面上三点 A 、 B 、 C 满足 $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{BC}| = 4$, $|\vec{CA}| = 5$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$ 的值等于_____.

28.★★★ $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $|\vec{AB}| = \sqrt{5}$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} =$ _____.

29.★★若 $\vec{a}(2, 3)$, $\vec{b}(-4, 7)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为_____.

30.★★已知 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b}$ 是不平行于 x 轴的单位向量, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$, 则 $\vec{b} =$ _____.

31.★★★已知 $\vec{a} = (-2, 2)$, $\vec{b} = (5, k)$, 若 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq 5$, 则 k 的取值范围是_____.

32.★★★已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 若单位向量 $\vec{c} = (x, y)$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角相等, 求 $\vec{c}$.

第 8 讲 矩阵

[知识梳理]

1. 矩阵的定义

(1) 有 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i=1, 2, 3, \dots, m; j=1, 2, 3, \dots, n)$ 按一定的次序排成矩形表:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 叫一个 } m \text{ 行 } n \text{ 列的矩阵, 简称为 } m \times n \text{ 矩阵, 读作 } m \text{ 乘 } n \text{ 矩阵.}$$

(2) 横的各排叫做矩阵的行, 纵的各排叫做矩阵的列, 数 a_{ij} 叫做矩阵的元素.

(3) 通常用大写字母, 例如 A 表示矩阵, 也可记作 $(a_{ij})_{m \times n}$, 说明 A 是一个以 a_{ij} 为元素的 m 行 n 列矩阵.

2. 矩阵的相关概念

(1) 同阶矩阵: 如果两个矩阵 A 、 B , 它们的行数和列数分别相同, 那么矩阵 A 与 B 叫做同阶矩阵.

(2) 相等矩阵: 当矩阵 A 与 B 是同阶矩阵时, 如果矩阵 A 中的每一个元素与 B 中相同位置的元素都相等, 那么 A 与 B 叫做相等的矩阵, 记作 $A = B$.

(3) n 阶方阵: 一个矩阵的行数与列数均为 n , 例如 3 阶方阵 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$..

(4) 行矩阵: 一个矩阵的行数为 1, 例如 $(3 \ 5 \ 2 \ 4)$.

(5) 列矩阵: 一个矩阵的列数为 1, 例如 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(6) 零矩阵: 一个矩阵中所有的元素都为零, 例如 $0_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(7) 单位矩阵: 主对角线上的元素都为 1, 其余元素都为 0 的 n 阶方阵, 记作 I , 例如 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 矩阵的加法、减法及性质

(1)若 $A=(a_{ij})_{m \times n}, B=(b_{ij})_{m \times n}$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 则 $C=(c_{ij})_{m \times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$ 称为矩阵 A 和 B 的和, 记作 $C=A+B$,

$$\text{即 } A=(a_{ij})_{m \times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=(b_{ij})_{m \times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(2)矩阵的加法的运算规律

①交换律: $A+B=B+A$.

②结合律: $A+(B+C)=(A+B)+C$

(3)负矩阵: 对矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 称矩阵 $-A=(-a_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵, 有 $A+(-A)=0_{m \times n}$.

(4)矩阵的差: 把 $A+(-B)$ 记为 $A-B$, 叫做两矩阵 A 和 B 的差, 求矩阵差的运算叫做矩阵的减法.

4.数乘矩阵及其性质

(1)以实数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 的每个元素所得的矩阵 $(ka_{ij})_{m \times n}$ 叫做数 k 与矩阵 A 相乘的积, 记作 kA ,

$$\text{即 } kA=k(a_{ij})_{m \times n}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 叫做实数与矩阵的乘法.}$$

(2)实数和矩阵的乘法的运算规律

① $(k+l)A=kA+lA, k, l \in R, A \in M$.

② $k(A+B)=kA+kB, k \in R, A, B \in M$.

③ $k(lA)=(kl)A, k, l \in R, A \in M$.

5.矩阵有关概念

(1)已知方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, 则它的系数矩阵为_____; 增广矩阵为_____.

(2)利用矩阵解方程用到的三种矩阵变换分别为: _____; _____; _____.

[典型例题]

1. 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $B =$ _____;

2. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $(A+B)C =$ _____

3. 若 $A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 有意义, 则 A 的行列数为 _____ (表示成 $m \times n$);

4. 若 $\begin{pmatrix} 2x-1 & 11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 2 & y \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$ _____;

5. 某商店销售甲乙两种商品, 第一季度的销量如下表所示(单位: 件):

	一月	二月	三月
甲	120	100	115
乙	70	75	70

每个月中两种商品的售价可表示为以下的表格(单位: 元/件):

	甲	乙
一月	10	22
二月	11	21
三月	10	20

利用矩阵的乘法求出该商店第一季度中每个月的销售额.

[巩固练习]

1.★★已知一个线性方程组对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$,

(1)写出其对应的线性方程组；(2)解(1)中的方程组.

2.★★解方程组:
$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x - 5y + z = 17 \\ 4x - 2y - z = -3 \end{cases}$$

3.★★已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 。求: (1) $A-B$; (2) $3A-2B$ 。

4.★★已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -x \\ 2x & a+2b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x-y & b-2a \\ y & x+y^2 \end{pmatrix}$ 且 $A=B$, 求 a 、 b 的值及矩阵 A .

5.★★写出下列线性方程组的增广矩阵:

$$(1) \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x-y=6 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x+2y-3z+2=0 \\ -x+3y+2z-5=0 \\ 2x-y+z+3=0 \end{cases}$$

6.★★已知线性方程组的增广矩阵, 写出其对应的方程组:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

7.★★已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 计算 AB 和 BA .

第9讲 行列式

[知识梳理]

1.二阶行列式: 定义 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 把 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 叫做二阶行列式, 其中横排叫做行, 纵排叫做列,

四个数 a, b, c, d 叫做这个二阶行列式的元素, 算式 $ad - bc$ 叫做这个二阶行列式的展开式, 其计算结果叫做行列式的值

2.二元线性方程组的行列式解法

(1) 二元线性方程组 (I) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时, 二元线性方程组有唯一解

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \text{ 记 } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \text{ 当 } D \neq 0 \text{ 时, 方程组的唯一解可以}$$

$$\text{写成 } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D}, \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$$

这里行列式 D 是由方程组(I)中的未知数 x, y 的系数组成, 称为方程组(I)的系数行列式; 行列式 D_x 和

D_y 分别是用方程组(I)的常数项 c_1, c_2 替换行列式 D 中 x 的系数 a_1, a_2 或 y 的系数 b_1, b_2 后得到的.

(2)二元线性方程组(I)的解的判断:

$$D \neq 0 \text{ 时, 方程组有唯一解 } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D}, \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases};$$

$D = D_x = D_y = 0$ 时, 方程组有无穷多组解;

$D = 0, D_x^2 + D_y^2 \neq 0$ 时, 方程组无解.

(3) $D \neq 0$ 是二元线性方程组(I)有唯一解的充要条件, 把 D 叫做方程组解的判别式.

3.三阶行列式

$$(1) D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \quad \text{叫做三阶行列式,}$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ 叫做三阶行列式的元素,

$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$ 叫做这个三阶行列式的展开式.

(2)三阶行列式的对角线法则: 先在行列式 D 的第 3 列右边顺次另写第 1 列和第 2 列,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \text{然后把每一条实线经过的 3 个元素的积的和, 减去每一条虚线经过的 3 个元}$$

素的积的和, 就得到三阶行列式 D 的展开式.

4.三元线性方程组的行列式解法

$$(1) \text{方程组 (I)} \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \quad \text{系数行列式 } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$\text{若 } D \neq 0 \text{ 时, 则方程组(I)有唯一解} \begin{cases} x = \frac{D_x}{D}, \\ y = \frac{D_y}{D}, \\ z = \frac{D_z}{D} \end{cases}$$

(2) $D \neq 0$ 时, 方程组可能无解, 可能有无穷多组解.

$$5. \text{三阶行列式的常用结论: 顶点为 } (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \text{ 的三角形面积公式为 } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

6.余子式和代数余子式

(1)余子式: 把三阶行列式某元素所在的行和列划去, 将剩下的元素按原来的位置关系组成的二阶行

$$\text{列式, 叫做这个元素的余子式, 例如 } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 中元素 } a_2 \text{ 的余子式是 } \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(2)代数余子式: 如果三阶行列式中某元素所在的位置为第 i 行和第 j 列, 那么这个元素的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子, 叫做这个元素的代数余子式, 例如三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 中的元素 a_2

的代数余子式是 $A_2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(3)定理 1: 三阶行列式 D 等于它的任意一行(或列)的所有元素分别和它们的代数余子式的乘积的和,

例如 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2$.

(4)定理 2: 三阶行列式的某一行(或列)的元素和另一行(或列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于

零, 例如对于行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, 有 $a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0$.

(5)定理 3: 三元齐次线性方程组 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{cases}$ 有非零解的充要条件是它的系数行列式 $D = 0$.

[典型例题]

1.★★不解方程组, 判别下列二元一次方程组解的情况

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} 6x + 9y = 7 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} & \quad (2) \begin{cases} 4(x + 2) = 1 - 5y \\ 3(y - 2) = 3 - 2x \end{cases} & \quad (3) \begin{cases} \frac{5}{x+1} + \frac{4}{y-2} = 2 \\ \frac{7}{x+1} + \frac{3}{2-y} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.★★★解关于 x, y 的二元一次方程组, 并对解的情况进行讨论 $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ my - m = -x \end{cases}$.

3.★★若行列式 $\begin{vmatrix} 2^{x-1} & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 则 $x =$ _____.

4.★★★★关于 x 的不等式: $\begin{vmatrix} \lg^2 x & 2 & 4 \\ 2\lg x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} > 0$

5.★★★★若 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2$, 则 C_2 化简后的最后结果等于_____.

6.★★★★当 a 为何值时, 关于 x 、 y 、 z 的方程组 $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ 3x + (2a+1)y + 3z = 6 \end{cases}$ 有唯一解.

[巩固练习]

1.★★计算: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 9 & -2 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2.★★★★若关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$ 有无穷多组解, 求 m .

3.★★★已知 a, b, c, d 依次成等比数列，公比为 q ，求，

(1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 的值；

(2) 试就 q 的不同取值情况，讨论二元一次方程组 $\begin{cases} ax + cy = 3 \\ bx + dy = -2 \end{cases}$ 何时无解，何时有无穷多解.

4.★★★对于方程组 $\begin{cases} 2y - z - 3 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$ ， $D_z =$ _____.

5.★★★当 $a =$ _____时，已知三元一次方程组 $\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + ay - z = 1 \\ 2y - az = 2 \end{cases}$ 无解或有无穷多解

6.★★★解方程： $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

7.★★★判断 m 取什么值时，关于 x, y 的线性方程组 $\begin{cases} x - (m^2 - 5)y = -1 \\ (m+1)x - (m+1)^2 y = 1 \end{cases}$ ，

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解.

第 10 讲 等差数列与等比数列的复习

[知识梳理]

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1} - a_n = d \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (n=1, 2, 3, \dots)$
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_n = a_m + (n-m)d$	$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad a_n = a_m q^{n-m}$
求和公式	$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$
中项公式	$A = \frac{1}{2}(a+b)$	$G = \pm\sqrt{ab}$
对称性	若 $m+n = p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$	若 $m+n = p+q$, 则 $a_m a_n = a_p a_q$

2. 等差数列的判定方法

(1) 定义法: 对于数列 $\{a_n\}$, 若 $a_{n+1} - a_n = d$ (常数), 则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(2) 等差中项: 对于数列 $\{a_n\}$, 若 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

3. 等比数列的充要条件:

(1) $\{a_n\}$ 是等比数列 $\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (q 为非零常数);

(2) $\{a_n\}$ 是等比数列 $\Leftrightarrow a_n = cq^n$ ($c \neq 0, q \neq 0$)

(3) $\{a_n\}$ 是等比数列 $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}, n \in \mathbb{N}^* \\ a_n \neq 0 \end{cases}$

4. 等差数列的性质

(1) 等差数列任意两项间的关系: 如果 a_n 是等差数列的第 n 项, a_m 是等差数列的第 m 项, 且 $m \leq n$,

公差为 d , 则有 $a_n = a_m + (n-m)d$

(2) 对于等差数列 $\{a_n\}$, 若 $n+m = p+q$, 则 $a_n + a_m = a_p + a_q$, 也就是说,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = L$$

5.等比数列的相关性质

(1)若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $a_m = a_n \cdot q^{m-n}$;

(2)若 $\{a_n\}$ 是等比数列, $m, n, p, t \in N^*$, 当 $m+n=p+t$ 时, $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_t$, 特别地, 当 $m+n=2p$ 时, $a_m \cdot a_n = a_p^2$

(3)两个等比数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的积、商、倒数的数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 、 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 、 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 仍为等比数列.

[典型例题]

1.★★等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差为 $\frac{1}{2}$, $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 60$, 则 $a_2 + a_4 + \dots + a_{100} =$ _____.

2.★★在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_2 = 5, a_4 = 10$, 则公比 q 的值为_____.

3.★★等比数列中, 已知 $a_4 a_7 = -512, a_3 + a_8 = 124$, 求 $a_{10} =$ _____

4.★★等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 2$, $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_9 =$ _____

5.★★已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_3 = 2$, $a_2 + a_4 = \frac{20}{3}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

6.★★★已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则

$$|m - n| = (\quad)$$

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$

7.★★★数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, 且 $\frac{1}{1-a_{n+1}} - \frac{1}{1-a_n} = 2 (n \in N^*)$, 则通项公式 $a_n =$ _____.

8.★★★已知数列 $\{a_n\}$ ，若 $a_1=14$ ， $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)，则使 $a_n\cdot a_{n+2}<0$ 成立的 n 的值是_____.

9.★★★★已知 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差数列，求证： $\frac{b+c}{a}, \frac{a+c}{b}, \frac{a+b}{c}$ 也成等差数列.

10.★★★在各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_{n+1}-a_n^2+a_{n-1}=0$ ($n\geq 2$)，则 $S_{2n-1}-4n=(\quad)$

(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

11.★★★若互不相等的实数 a, b, c 成等差数列， c, a, b 成等比数列，且 $a+3b+c=10$ ，则 $a=$ _____

12.★★★等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_p=q$ ， $a_q=p$ ($p\neq q$)，那么 $a_{p+q}=$ _____.

13.★★★已知等比数列中 $q=2, S_4=1$ ，求 S_8 .

14.★★ $2, 2^x-1, 2^x+3$ 成等比数列，那么 $x=$ _____

15.★★等比数列中，已知 $a_{15}=10, a_{45}=90$ ，求 $a_{60}=$ _____

16.★★★等比数列中，已知 $a_4-a_1=52, a_3+a_2+a_1=26$ ，那么 $a_n=$ _____

17.★★数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=3, a_n=3a_{n+1}$ ，则 $a_n=$ _____.

18.★★ $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$ 的等比中项为_____.

19.★★★等比数列中，已知 $a_1a_9=64, a_3+a_7=20$ ，求 a_n

20.★★★在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1+a_2+a_3=7$, $a_1a_2a_3=8$, 求通项公式 a_n .

21.★★在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5=-2$, 则这个数列的前 9 项之积的值为()

- A、512 B、-512 C、256 D、-256

22.★★在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3=2$, $a_5=m$, $a_7=8$, 则 $m=()$

- A. ± 4 B. 5 C. -4 D. 4

23.★★★在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{10}=3$, 则 $a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9=()$

- A. 81 B. $2\sqrt[9]{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 243

24.★★★在等比数列 $\{a_n\}$ ($n \in N^*$) 中, 若 $a_1=1$, $a_4=\frac{1}{8}$, 则该数列的前10项和为()

- A. $2-\frac{1}{2^4}$ B. $2-\frac{1}{2^9}$ C. $2-\frac{1}{2^{10}}$ D. $2-\frac{1}{2^{11}}$

25.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,

(1)若 m, n, p 成等差数列, 求证: a_m, a_n, a_p 成等比数列; (2)若 $a_3=-3, a_6=24$, 求 a_9 .

26.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n=n^2-n+1$, 求通项 a_n .

27.★★已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_3=-3$, 前 4 项和 $S_4=-16$, 则 $a_2=$ _____.

28.★★★在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 前三项是 $\frac{1}{x+1}, \frac{5}{6x}, \frac{1}{x}$, 求 a_{11} .

29.★★★等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = -24$, $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 78$, 则 $S_{20} =$ _____.

30.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 $S_n = n^2 + 1$, 判断这个数列是否是等差数列.

31.★★数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + 4(n \in N^*)$, 求通项 a_n 的表达式.

32.★★★数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2, a_n = \frac{a_{n+1}}{1 - 4a_{n+1}}(n \in N^*)$, 求通项 a_n 的表达式.

33.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$ 对任意非零自然数 n 都成立, 且 $a_1 = 1$, 则 $a_n =$ _____.

第 11 讲 求数列通项公式的方法

[知识梳理]

1、公式法：利用熟知的的公式求通项公式的方法称为公式法，常用的公式有 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ ，等差数列或等比数列的通项公式。

2、累加法：如 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 型

3、累乘法：形如 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ 型

4、构造新数列：形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ ，（ $p \neq 0$ ，其中 $a_1 = a$ ）型

（1）若 $p=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）若 $q=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；

（3）若 $p \neq 1$ 且 $q \neq 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造辅助数列来求。

5、作商法：形如 $a_1 \square a_2 \square \cdots \square a_n = f(n)$ ，用作商法

6、待定系数法：形如 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ （其中 p, q 均为常数， $(pq(p-1)(q-1) \neq 0)$ ），或 $a_{n+1} = pa_n + rq^n$ ，其中 p, q, r 均为常数）；

7、取倒数法：形如 $a_{n+1} = \frac{sa_n}{pa_n + q}$ （其中 p, q 均为非零常数），两边同时取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{s} \frac{1}{a_n} + \frac{p}{s}$ ，

再用待定系数法解决。

[典型例题]

1. ★★★ 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + n}$ ，求 a_n 。

2. ★★★ 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$ （ $n=1, 2, 3, \dots$ ），则它的通项公式是 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.★★已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$, 求通项 a_n .

4.★★数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 对所有的 $n \geq 2$ 都有 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n^2$, 则 $a_3 + a_5 =$ _____.

5.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1} (n \geq 2)$, 求通项公式 a_n .

6.★★★在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_n = 2a_{n-1} + 2^{n+1} (n \geq 2)$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

7.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = 3^{n-1} + a_{n-1} (n \geq 2)$, 证明 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$

8.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 且 $a_{n+1} = a_n + 2n (n \in \mathbb{N}^*)$ 写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

9.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} (n \geq 2)$, 求此数列的通项公式.

10.★★在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3 (n \geq 1)$, 则该数列的通项 a_n

11.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{3}{2}$, 且 $a_n = \frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1} + n - 1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

12.★★★★数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$,

(1)求 a_{n+1} 与 a_n 的关系; (2)求通项公式 a_n .

13.★★★★设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(1)求首项 a_1 与通项 a_n ; (2)设 $T_n = \frac{2^n}{S_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 证明: $\sum_{i=1}^n T_i < \frac{3}{2}$

14.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{5}{6}, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$, 求 a_n .

15.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 s_n 满足 $s_n - s_{n-2} = 3(-\frac{1}{2})^{n-1} (n \geq 3)$ ，且 $s_1 = 1$ ， $s_2 = -\frac{3}{2}$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

16.★★★数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n = 2\sqrt{a_{n-1}}$ ($n \geq 2$)，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

17.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，且满足 $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n(4 - a_n), n \in N$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，数列 $\{b_n\}$ 中， $b_1 = 0$ ，当 $n \geq 2$ 时， $a_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1})$ ， $b_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1})$ ，求 a_n, b_n .

第 12 讲 求数列的前 n 项和的方法

[知识梳理]

1.直接法：即直接用等差、等比数列的求和公式求和，

$$(1)\text{等差数列的求和公式: } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d;$$

$$(2)\text{等比数列的求和公式 } S_n = \begin{cases} na_1 (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1) \end{cases} \text{ (公比含参数时一定要讨论)}$$

$$2.\text{公式法: } \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(证明利用立方差公式, $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, 将 n 用 $1, 2, 3, \dots, n$ 替换, 错位相消即可整体得出)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ (证明利用四次方差, 原理同上)}$$

3、错位相减法：比如 $\{a_n\}$ 等差, $\{b_n\}$ 等比, 求 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ 的和.

4、裂项相消法：把数列的通项拆成两项之差、正负相消剩下首尾若干项，常见拆项公式，

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \quad \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

5、分组求和法：把数列的每一项分成若干项，使其转化为等差或等比数列，再求和.

6、合并求和法：如求 $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ 的和.

7、倒序相加法：如求 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$ 的和.

8、其它求和法：如归纳猜想法，奇偶法等等.

9.主要方法

(1)求数列的和注意方法的选取：关键是看数列的通项公式；

(2)求和过程中注意分类讨论思想的运用；

(3)转化思想的运用；

[典型例题]

例 1.★★★求和：① $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\cdots 1}_{n\text{个}}$

$$\textcircled{2} S_n = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2$$

③求数列 1, 3+4, 5+6+7, 7+8+9+10, $\cdots$ 前 n 项和 S_n

例 2.★★★已知数列 $1, 3a, 5a^2, \cdots, (2n-1)a^{n-1} (a \neq 0)$, 求前 n 项和.

例 3.★★★求和 $S_n = \frac{2^2}{1 \cdot 3} + \frac{4^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$

练习:★★★★★求 $S_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \cdots + \frac{n}{a^n}$

例 4.★★★★求证: $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \cdots + (2n+1)C_n^n = (n+1)2^n$

例 5.★★★★已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = -2[n - (-1)^n]$, 求 S_n .

[巩固练习]

1.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3n^2 - 17n + 4$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

2.★★★求下列数之和: $1, 1+2, 1+2+2^2, 1+2+2^2+2^3, \dots, 1+2+2^2+\cdots+2^n$.

3.★★★数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = \begin{cases} 5n+1 & n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 S_n , 其中 $n \in N^*$.

4.★★★已知 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 且 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 成等差数列, n 为正偶数, 又 $f(1) = n^2, f(-1) = n$, 试比较 $f(\frac{1}{2})$ 与 3 的大小.

5.★★★★如果有穷数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$ (m 为正整数) 满足条件 $a_1 = a_m, a_2 = a_{m-1}, \cdots, a_m = a_1$, 即 $a_i = a_{m-i+1}$ ($i = 1, 2, \cdots, m$), 我们称其为“对称数列”, 例如, 数列 1, 2, 5, 2, 1 与数列 8, 4, 2, 2, 4, 8 都是“对称数列”,

(1) 设 $\{b_n\}$ 是 7 项的“对称数列”, 其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列, 且 $b_1 = 2, b_4 = 11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项;

(2) 设 $\{c_n\}$ 是 49 项的“对称数列”, 其中 $c_{25}, c_{26}, \cdots, c_{49}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求 $\{c_n\}$ 各项的和 S ;

(3) 设 $\{d_n\}$ 是 100 项的“对称数列”, 其中 $d_{51}, d_{52}, \cdots, d_{100}$ 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列. 求 $\{d_n\}$ 前 n 项的和 S_n ($n = 1, 2, \cdots, 100$).

6.★★★求下列数列的前 n 项和 S_n :

(1) $5, 55, 555, 5555, \dots, \frac{5}{9}(10^n - 1), \dots$; (2) $\frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{2 \times 4}, \frac{1}{3 \times 5}, \dots, \frac{1}{n(n+2)}, \dots$;

(3) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$;

(4) $a, 2a^2, 3a^3, \dots, na^n, \dots$;

(5) $1 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 5, \dots, n(n+2), \dots$;

(6) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$.

7.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \begin{cases} 6n-5 & (n \text{ 为奇数}) \\ 2^n & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$, 求其前 n 项和 S_n .

8.★★★★若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足关系： $a_n = \frac{1+b_n}{1-b_n}$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$ ， $a_1 = 3$ ，其中 n 是任意正

整数，(1)求证：数列 $\{\lg b_n\}$ 是等比数列；(2)设 $T_n = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$ ，求满足 $T_n \geq \frac{1}{128}$ 的 n 的集合 M ；

(3)设 $c_n = \frac{2\sqrt{b_n}}{b_n - 1}$ ， $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，试探索 a_n 与 S_n 之间的关系.

第 13 讲 数学归纳法及其应用

[知识梳理]

1. 有关归纳法

由特殊到一般的推理称做归纳，由所有的情况得出的结论，称为完全归纳；由特殊的情况得出一般性结论，叫做不完全归纳，不完全归纳所得出的结论不一定正确。

数学归纳法是证明与正整数有关的命题的一种数学方法。严格来说它并不是一种“归纳法”，而是一个数学定理，其依据是自然数公理体系中的归纳公理。

2. 数学归纳法

对于一个与正整数 n 有关的数学命题，若它满足：

(i) 当 n 取第一个值 $n_0 (n_0 \in \mathbf{N}^*)$ 时，命题成立；

(ii) 假设 $n = k (k \in \mathbf{N}^*, k \geq n_0)$ 时命题成立，则可以推出 $n = k + 1$ 时命题也成立；

那么这个命题对于所有大于或等于 n_0 的正整数都成立。这种证明方法称为数学归纳法。

3. 数学归纳法的一般步骤

(1) 验证当 $n = n_0 (n_0 \in \mathbf{N}^*)$ 时命题成立；(2) 假设 $n = k (k \in \mathbf{N}^*, k \geq n_0)$ 时命题成立，证明当 $n = k + 1$ 时命题也成立；(3) 下结论：由(1)(2)可知，命题对任意 $n \geq n_0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 成立。

下面对于命题“任何 n 个女孩都有相同颜色的眼睛”的证明是否正确，请说明理由。

证明：(1) 当 $n = 1$ 时，命题显然成立。

(2) 假设 $n = k (k \in \mathbf{N}^*, k \geq 1)$ 时，命题成立，即任何 k 个女孩都有相同颜色的眼睛。则当 $n = k + 1$ 时，

不妨设这 $k + 1$ 个女孩分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ ，去掉 a_1 ，则剩下的 $a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$

有 k 个，由归纳假设，她们眼睛颜色相同，若去掉 a_2 ，则剩下的 $a_1, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ 有 k 个，由归纳假设，她们眼睛颜色也相同，由等量代换原理可知， $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ 这 $k + 1$ 个女孩眼睛颜色也相同。

根据 (1) (2) 可以断定，对任何 $n \in \mathbf{N}^*$ 命题“任何 n 个女孩都有相同颜色的眼睛”都成立。

答：不正确。 $n = k$ 时的命题仅对 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 成立，与第 a_{k+1} 个女孩无关。

[典型例题]

1.★★★★用数学归纳法证明:

$$(1) \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \tan x - \tan 2^n x (n \in \mathbf{N}^*) .$$

$$(2) 1(n^2 - 1) + 2(n^2 - 2^2) + \cdots + n(n^2 - n^2) = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{4} (n \in \mathbf{N}^*) .$$

$$(3) \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha + \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha + \cdots + \tan(n-1)\alpha \cdot \tan n\alpha = \frac{\tan n\alpha}{\tan \alpha} - n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*) .$$

2.★★★★设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若对于所有的自然数 n , 都有 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 用数学归

纳法加以证明 $\{a_n\}$ 是等差数列.

3.★★★★数列 $\{a_n\}$ 中, $a \neq 1, a > 0, a_1 = a + \frac{1}{a}, a_{n+1} = a_1 - \frac{1}{a_n} (n \in \mathbf{N})$, 求出 a_2 、 a_3 、 a_4 的值, 猜

测 a_n 的表达式, 并用数学归纳法加以证明.

4★★★★在数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 中, $a_1=2$, $b_1=4$, 且 a_n , b_n , a_{n+1} 成等差数列, b_n , a_{n+1} , b_{n+1} 成等比数列 ($n \in \mathbf{N}^*$), 求 a_2 , a_3 , a_4 及 b_2 , b_3 , b_4 , 由此猜测 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式, 并证明你的结论.

5.★★★★用数学归纳法证明:

(1) $(3n+1) \cdot 7^n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 能被 9 整除.

(2) 当 n 为正奇数时, $n^4 + 7(2n^2 + 7)$ 能被 64 整除.

(3) $(x+1)^{n+1} + (x+2)^{2n-1}$ 能被 $x^2 + 3x + 3$ 整除.

6.★★★★用数学归纳法证明:

(1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} + n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) $|\sin nx| \leq n |\sin x| (n \in \mathbf{N}^*)$.

7.★★★★平面内有 n 个圆, 其中每两个圆都相交于两点, 且每三个圆都不相交于同一点, 求证: 这 n 个圆把平面分成 $n^2 - n + 2$ 个部分.

8.★★用数学归纳法证明 $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a} (a \neq 1)$, 在验证 $n=1$ 时, 左端计算所得项为_____.

9.★★★用数学归纳法证明 $(n+1)(n+2)\cdots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) (n \in \mathbb{N}^*)$, 从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的过程中, 等式左端要增乘的代数式为_____.

10.★★★用数学归纳法证明“ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} (n \in \mathbb{N}^*)$ ”时, 从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的过程中, 等式左边增加的项为_____, 等式右边增加(减少)的项为_____.

11.★★★从 $1=1, 1-4=-(1+2), 1-4+9=1+2+3, 1-4+9-16=-(1+2+3+4)\cdots$ 中找出一般规律的数学表达式为_____.

12.★★★某同学解答“用数学归纳法证明 $\sqrt{n^2+n} < n+1, n \in \mathbb{N}^*$ 的过程如下:

“证: ①当 $n=1$ 时, $\sqrt{2} < 2$ 显然命题成立.

②假设 $n=k$ 时有 $\sqrt{k(k+1)} < k+1$, 那么当 $n=k+1$ 时,

$$\sqrt{(k+1)^2 + (k+1)} = \sqrt{k^2 + 3k + 2} < \sqrt{k^2 + 4k + 4} = (k+1) + 1, \text{ 命题也成立.}$$

根据①②可知, 对于任何 $n \in \mathbb{N}^*$, 命题都成立”

问: 错误理由是什么? 正确的证法是什么?

13.★★用数学归纳法证明： $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

14.★★用数学归纳法证明 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

15.★★★求证： $3^{2n}-1, n \in N^*$ 能被 8 整除.

16.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=\frac{1}{2}, S_n=n^2a_n$ ，运用数学归纳法证明： $a_n=\frac{1}{n(n+1)}, n \in N^*$

17.★★★★用数学归纳法证明不等式： $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, n \geq 2$

第 14 讲 数列极限

[知识梳理]

1. 数列极限的概念

- 1) 有穷数列一定不存在极限, 无穷数列不一定有极限;
- 2) 数列是否有极限与数列的前面的有限项无关;
- 3) 如果一个数列有极限, 那么它的极限是一个确定的常数。

2. 数列极限的运算

- 1) 三个常见的数列极限是 $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$;
- 2) 只有当每个数列的极限都存在时才能对数列极限进行运算;
- 3) 仅限定在有限个极限间的四则运算, 不能推广到无限个极限间做加、乘运算;

3. 无穷等比数列的各项和

- 1) 使用的条件: 若公比为 q , 则 $0 < |q| < 1$;
- 2) 常见的应用: 循环小数化分数; 几何应用。

[典型例题]

1. ★★数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 2008 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 2009 \end{cases}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.

2. ★★下列命题中真命题个数是()

①在 n 无限增大的变化过程中, 如果无穷数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n 越来越接近于一个常数 A , 那么 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限

②有穷数列没有极限, 无穷数列一定有极限

③若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则数列 $\{a_n - A\}$ 一定是递增数列

④若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则数列 $\{a_n - A\}$ 一定是递减数列

A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

3. ★★★若 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2na_n = 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-n)a_n =$ _____.

4. ★★★已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2S_n, n \in N^*$, 那么 $a_n =$ _____.

5.★★★求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \text{数列} \left\{ \frac{1}{4n^2 - 1} \right\} \text{的前 } n \text{ 项和为 } S_n, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{5} - \frac{6}{7}\right) + \left(\frac{4}{5^2} - \frac{6}{7^2}\right) + \cdots + \left(\frac{4}{5^n} - \frac{6}{7^n}\right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{6^2} - \frac{4}{5^2}\right) + \cdots + \left(\frac{5}{6^n} - \frac{4}{5^n}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6.★★★求和: $S = 0.18 + 0.018 + 0.0018 + \cdots$

7.★★★若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n+1} + an + b\right) = 3$, 求 a, b 的值.

8.★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 且 $S_n = 2n^2 + 3n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n^2}$.

9.★★★求下列极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n \theta - \sin^n \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta} \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$

10.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 都是无穷等差数列，其中 $a_1=3, b_1=2$ ， b_2 是 a_2 与 a_3 的等差中项，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2},$$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式；(2)求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{a_1 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2} + \cdots + \frac{1}{a_n b_n})$ 的值.

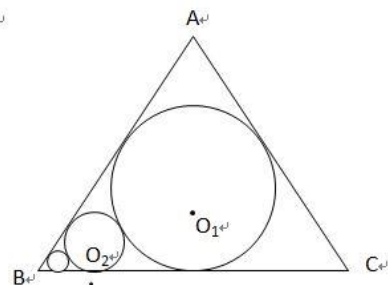
11.★★★★等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，公比为 q 且满足 $|q| < 1$ ，前 n 项之和为 S_n ，各项和为 S . 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + \cdots + S_n - nS).$$

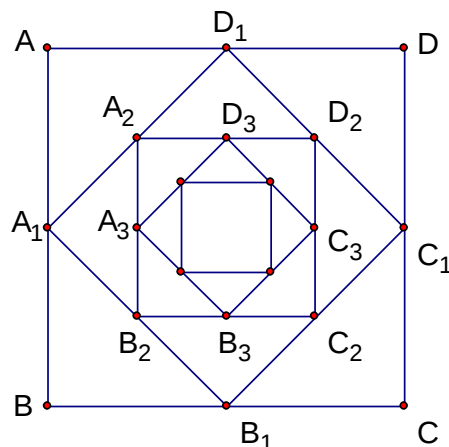
12.★★★★如图，在边长为1的等边 $\triangle ABC$ 中， $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆， $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 外切，且与AB，BC相切， $\cdots \odot O_{n+1}$ 与 $\odot O_n$ 外切，且与AB，BC相切，如

此无限继续下去，记 $\odot O_n$ 的面积为 a_n ，

(1)证明 $\{a_n\}$ 是等比数列；(2)求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.



- 13.★★★★如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，联结这个正方形各边的中点得到一个小正方形 $A_1B_1C_1D_1$ ；又联结这个小正方形各边的中点得到一个更小正方形 $A_2B_2C_2D_2$ ；如此无限继续下去，求所有这些正方形周长的和与面积的和。



- 14.★★★已知数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ ，且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 4b_n) = 11$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} (6a_n + b_n) = -5$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - b_n)$ 的值。

- 15.★★★★(1)已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1} + (a+1)^n} = \frac{1}{3}$ ，求 a 的取值范围；

- (2)已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n - \sqrt{an^2 + bn + c}) = 2$ ，求实数 a, b, c 的值。

- 16.★★★设等比数列 $\{a_n\}$ 各项均为正，且 $a_2 = 4, a_4 = 16$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg a_{n+1} + \lg a_{n+2} + \cdots + \lg a_{2n}}{n^2}$ 。

17.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 是由正数构成的数列， $a_1=3$ ，且满足 $\lg a_n = \lg a_{n-1} + \lg c$ ，其中 n 是大

于1的整数， c 是正数，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} - a_n}{2^n + a_{n+1}}$.

18.★★★已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列， S_n 是其前 n 项和，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}}$.

19.★★★★各项均为正的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_n = \frac{1}{8}(a_n + 2)^2$.

(1)求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = (t-1)^{\frac{a_n+2}{4}}$ ($t > 1$)， T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$.

第 16 讲 数列综合

[典型例题]

1.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+1}=(1+q)a_n - qa_{n-1}$ ($n \geq 2$, $q \neq 0$).

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 a_3 是 a_6 与 a_9 的等差中项, 求 q 的值, 并证明对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项.

2.★★★★将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

a_1

$a_2 \quad a_3$

$a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10}$

记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \dots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$. S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,

且满足 $\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1$ ($n \geq 2$),

(1) 证明数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 上表中, 若从第三行起, 第一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数,

当 $a_{81} = -\frac{4}{91}$ 时, 求上表中第 k ($k \geq 3$) 行所有项的和.

3.★★★★等差数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 已知 $x_3=5, S_3=9$,

$$b_2 = x_2 + 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 16,$$

(1)求数列 $\{x_n\}$ 的通项 x_n ; (2)设 $M_n = \lg b_1 + \lg b_2 + \cdots + \lg b_n$, 求 M_n 的最大值及此时 n 的值.

4.★★★★已知点 $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ 是函数 $f(x) = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图像上一点, 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项

和为 $f(n) - c$, 数列 $\{b_n\} (b_n > 0)$ 的首项为 c , 且前 n 项和 S_n 满足 $S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n+1}} (n \geq 2)$,

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)若数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 前 n 项和为 T_n , 问 $T_n > \frac{1000}{2009}$ 的最小正整数 n 是多少.

5.★★★★定义：称 $\frac{n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$ 为 n 个正数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的“均倒数”，已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n

项的“均倒数”为 $\frac{1}{2n+1}$ ，

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n = \frac{a_n}{2n+1}$ ，试判断并说明 $c_{n+1} - c_n (n \in N^*)$ 的符号；

(3)设函数 $f(x) = -x^2 + 4x - \frac{a_n}{2n+1}$ ，是否存在最大的实数 λ ，当 $x \leq \lambda$ 时，对于一切自然数 n ，

都有 $f(x) \leq 0$ 。

6.★★★★设正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且对任意的 $n \in N^*$ ， S_n 是 a_n^2 和 a_n 的等差中项，

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)在集合 $M = \{m | m = 2k, k \in Z, \text{ 且 } 1000 \leq k < 1500\}$ 中，是否存在正整数 m ，使得不等式

$S_n - 1005 > \frac{a_n^2}{2}$ 对一切满足 $n > m$ 的正整数 n 都成立？若存在，则这样的正整数 m 共有多少个？并

求出满足条件的最小正整数 m 的值；若不存在，请说明理由。

7.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2, a_3 成等差数列, 且它们的和为 15; a_4, a_5, a_6 成等比数列, 且它们的积为 27; 对于任意自然数 n 均有 $a_{n+6} = a_n$, 求,

(1) a_2, a_5, a_8 ; (2) 数列 $\{a_{3k-1}\}, (k \in \mathbb{N}^*)$ 的前 101 项和 S_{101} .

8.★★★★函数 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的增函数, 满足 $f(x) = 2f(\frac{x}{2})$ 且 $f(1) = 1$, 在每个区间 $(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$ ($i = 1, 2, \dots$) 上, $y = f(x)$ 的图象都是斜率为同一常数 k 的直线的一部分,

(1) 求 $f(0)$ 及 $f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{4})$ 的值, 并归纳出 $f(\frac{1}{2^i}) (i = 1, 2, \dots)$ 的表达式;

(2) 设直线 $x = \frac{1}{2^i}, x = \frac{1}{2^{i-1}}$, x 轴及 $y = f(x)$ 的图象围成的矩形的面积为 a_i ($i = 1, 2, \dots$), 记

$S(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, 求 $S(k)$ 的表达式, 并写出其定义域和最小值.

9.★★★★在直角坐标平面 xOy 上的一列点 $A_1(1, a_1), A_2(2, a_2), \dots, A_n(n, a_n), \dots$, 简记为 $\{A_n\}$. 若由 $b_n = \overrightarrow{A_n A_{n+1}} \cdot \vec{j}$ 构成的数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} > b_n, n=1, 2, \dots$, 其中 $\vec{j}$ 为方向与 y 轴正方向相同的单位向量, 则称 $\{A_n\}$ 为 T 点列.

(1) 判断 $A_1(1, 1), A_2\left(2, \frac{1}{2}\right), A_3\left(3, \frac{1}{3}\right), \dots, A_n\left(n, \frac{1}{n}\right), \dots$ 是否为 T 点列, 并说明理由;

(2) 若 $\{A_n\}$ 为 T 点列, 且点 A_2 在点 A_1 的右上方. 任取其中连续三点 A_k, A_{k+1}, A_{k+2} , 判断 $\triangle A_k A_{k+1} A_{k+2}$ 的形状 (锐角三角形、直角三角形、钝角三角形), 并予以证明;

10.★★★★已知函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 0.1n$ ($n \in \mathbf{N}$), 当 $|f(a_n) - 2005|$ 取得最小值时, $n =$ _____.

11.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2^{n-1}$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n = 3n$, 令集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}, n \in \mathbf{N}^*$. 将集合 $A \cup B$ 中的元素按从小到大的顺序排列构成的数列记为 $\{c_n\}$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 28 项的和 $S_{28} =$ _____

12.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 5^n + t$ (t 是实数), 下列结论正确的是()

- A. t 为任意实数, $\{a_n\}$ 均是等比数列 B. 当且仅当 $t = -1$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列
- C. 当且仅当 $t = 0$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列 D. 当且仅当 $t = -5$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列

13.★★★★在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $|a_3|=|a_9|$,公差 $d<0$,则使前 n 项和 S_n 取得最大值的自然数 n 的值是() A. 4 和 5 B. 5 和 6 C. 6 和 7 D. 只能是 6

14.★★★已知某个命题与正整数有关,如果当 $n=k(k \in N^*)$ 时该命题成立,那么可以推得 $n=k+1$ 时该命题也成立.现已知 $n=5$ 时该命题不成立,则()

- A $n=4$ 时该命题成立 B $n=6$ 时该命题不成立
C $n=4$ 时该命题不成立 D $n=6$ 时该命题成立

15.★★★设实数 a_1, a_2, a_3, a_4 是一个等差数列,且满足 $1 < a_1 < 3, a_3 = 4$,定义 $b_n = 2^{a_n}$,给出下列命题,(1) b_1, b_2, b_3, b_4 是一个等差数列;(2) $b_1 < b_2$;(3) $b_2 > 4$;(4) $b_4 > 32$;(5) $b_2 : b_4 = 256$. 其中真命题的个数为()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

16.★★★★已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_2 - a_3| = 10, a_1 a_2 a_3 = 125$.

(I)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)是否存在正整数 m ,使得 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m} \geq 1$?若存在,求 m 的最小值;若不存在,说明理由.

17.★★★★如图，平面直角坐标系中，射线 $y = x$ ($x \geq 0$) 和 $y = 2x$ ($x \geq 0$) 上分别依次有点 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 和点 $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ ，其中 $A_1(1,1)$,

$B_1(1,2)$, $B_2(2,4)$ ，且 $|OA_n| = |OA_{n-1}| + \sqrt{2}$,

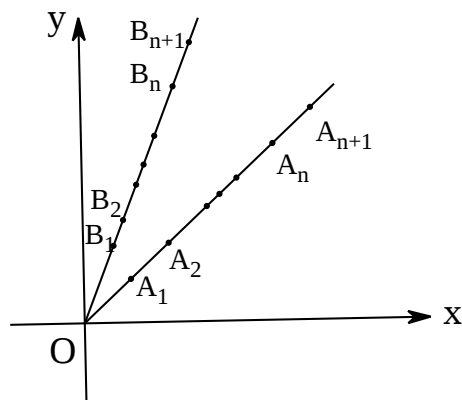
$$|B_n B_{n+1}| = \frac{1}{2} |B_{n-1} B_n| \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(1)用 n 表示 $|OA_n|$ 及点 A_n 的坐标;

(2)用 n 表示 $|B_n B_{n+1}|$ 及点 B_n 的坐标;

(3)写出四边形 $A_n A_{n+1} B_{n+1} B_n$ 的面积关于 n 的表达式 $S(n)$,

并求 $S(n)$ 的最大值.



18.★★★★已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均不为 0 的等差数列，公差为 d , S_n 为其前 n 项和，且满足 $a_n^2 = S_{2n-1}$,

$n \in \mathbf{N}^*$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 和数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(2)若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $\lambda T_n < n + 8 \cdot (-1)^n$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围;

(3)是否存在正整数 m, n ($1 < m < n$), 使得 T_1, T_m, T_n 成等比数列? 若存在，求出所有 m, n 的值，若不存在，请说明理由.