

第一讲 整数和整除

【例 1】判断题（若是正确的，请说明理由；若是错误的，请把它改正确）.

- (1) 最小的自然数是 1；
- (2) 最小的整数是 0；
- (3) 非负整数是自然数；
- (4) 有最大的正整数，但没有最小的负整数；
- (5) 有最小的正整数，但没有最大的负整数.

【难度】★

【答案】(1) ×；(2) ×；(3) √；(4) ×；(5) ×.

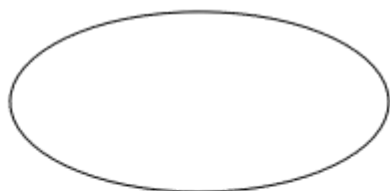
【解析】(1) 错误，最小的自然数是 0； (2) 错误，不存在最小的整数；
(3) 正确； (4) 错误，既没有最大的正整数，也没有最小的负整数；
(5) 错误，最小的正整数是 1，最大的负整数是 -1.

【总结】本题主要考查与整数有关的概念.

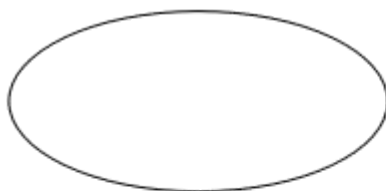
【例 2】把下列各数放入相应的圈内：

15, -1, -0.2, 0, -63, 0.7, 13, $-0.2323\dots$, $\frac{3}{5}$.

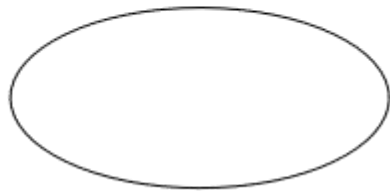
|



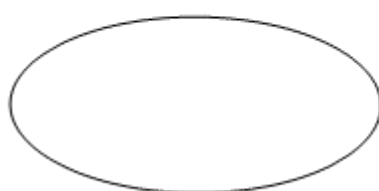
整数



自然数



正整数



负整数

【难度】★

【答案】整数：15, -1, 0, -63, 13； 自然数：15, 0, 13；
正整数：15, 13； 负整数：-1, -63.

【解析】整数包括正整数、零、负整数；自然数包括正整数和零.

【总结】本题主要考查整数的分类.

【例 3】(1) 试说说正整数、负整数、零、自然数、整数之间的关系；

(2) 试比较正整数、负整数、零的大小；

(3) 试比较负整数、自然数的大小.

【难度】★★

【答案】(1) 整数包括正整数、零、负整数；自然数包括正整数和零；

(2) 正整数大于 0，负整数小于 0，正整数大于负整数；

(3) 自然数大于负整数；

【解析】略；

【例 4】五个连续的自然数，已知中间数是 a ，那么其余四个数分别是_____、_____、_____、_____。若这五个连续自然数的和是 20，试求这五个数.

【难度】★★

【答案】 $a-2$ 、 $a-1$ 、 $a+1$ 、 $a+2$ 。这五个数是：2、3、4、5、6.

【解析】列方程： $(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)=20$

解得： $a=4$

$\therefore$ 这五个数是：2、3、4、5、6.

【总结】本题主要考查如何利用已知的字母去表示与其连续的整数.

【例 5】有三个自然数，其和是 13，将它们分别填入下式的三个括号中，满足等式要求：

$(\quad)-1=(\quad)\div 5=(\quad)+2$ ，试求这三个自然数.

【难度】★★★

【答案】3，10，0.

【解析】设这三个数分别为 $k+1$ ， $5k$ ， $k-2$ ；

则 $k+1+5k+k-2=13$

解得： $k=2$

$\therefore$ 这三个数是 3，10，0.

【总结】本题主要是对题目中条件的理解，同一个数可以用不同的形式去表示.

模块二：整除的意义

1、整除的意义

整数 a 除以整数 b ，如果除得的商是整数而余数为零，我们就说 a 能被 b 整除；或者说 b 能整除 a 。

【例 6】老师问：“当 $a=4.5$ 时， $b=0.9$ 时， a 能被 b 整除吗？”

一个同学回答：“因为商是 5，是整数，所以 a 能被 b 整除。”

你认为对吗？

【难度】★

【答案】不对

【解析】整除要求被除数、除数、商是整数，且余数是零；本题只满足了商是整数，余数是 0，忽略了对被除数、除数的要求；

【总结】本题主要考查整除所满足的条件。

【例 7】下列各组数中，如果第一个数能被第二个数整除，请在下面的（ ）内打“√”，不能整除的打“×”。

18 和 9（ ）

15 和 30（ ）

0.4 和 4（ ）

14 和 6（ ）

17 和 35（ ）

9 和 0.5（ ）

【难度】★

【答案】横向：√×××××

【解析】整除的意义：整数 a 除以整数 b ，如果除得的商是整数而余数为零，我们就说 a 能被 b 整除；或者说 b 能整除 a 。只有 18 和 9 满足；

【总结】本题主要考查整除所满足的条件。



师生总结

1、整除的条件是什么？

2、“ a 能整除 b ”与“ a 能被 b 整除”的区别是什么？

【例 8】已知下列除法算式：

$$57 \div 7 = 8 \dots 1;$$

$$21 \div 7 = 3;$$

$$22 \div 0.2 = 110;$$

$$22 \div 5 = 4.4;$$

$$0 \div 3 = 0;$$

$$2 \div 4 = 0.5.$$

(1) 表示能除尽的算式有哪几个？

(2) 哪些算式中可以说被除数能被除数整除？

【难度】★

【答案】(1) $21 \div 7 = 3$; $22 \div 0.2 = 110$; $22 \div 5 = 4.4$; $0 \div 3 = 0$; $2 \div 4 = 0.5$.

(2) $21 \div 7 = 3$; $0 \div 3 = 0$.

【解析】除尽只要求余数为零即可，整除要求被除数、除数、商是整数，且余数是零；

【总结】本题主要考查整除和除尽的区别。

【例 9】把表示下列算式的序号填入适当的空格内。

- (1) $30 \div 10$; (2) $7 \div 25$;
(3) $35 \div 0.1$; (4) $18 \div 3$;
(5) $0.4 \div 2$; (6) $3.9 \div 0.3$;
(7) $27 \div 9$; (8) $16 \div 4$.

除数能整除被除数的: _____;

能够除尽的: _____.

【难度】★★

【答案】除数能整除被除数的: (1) (4) (7) (8);

能够除尽的: (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

【解析】除尽只要求余数为零即可，整除要求被除数、除数、商是整数，且余数是零；

【总结】本题主要考查整除和除尽的区别。



师生总结

1、整除与除尽有什么相同点？

2、除与除尽有什么不同点？

【例10】若两个整数 a 、 b ($a > b$)都能被整数 c 整除，它们的和、差、积也能被 c 整除吗？为什么？

【难度】★★

【答案】能，原因略；

【解析】设 $a = mc$ ， $b = nc$ (m 、 n 是整数，且 $m \neq n$)；

$$\text{则: } a + b = (m + n)c; \quad a - b = (m - n)c; \quad ab = mnc;$$

$\therefore$ 它们的和、差、积也能被 c 整除.

【总结】本题主要是对整除的概念的考查及运用.

【例11】一个两位数，能被5整除，其个位数字减十位数字的差是正整数中最小的偶数，求这个两位数.

【难度】★★

【答案】35

【解析】能被5整除的数字，位数是0或5；个位数字减十位数字的差是2，说明个位不能是0，所以个位数字是5，十位数字是3，这个两位数是35.

【总结】本题主要考查能被5整除的数的特征.

【例12】15支铅笔分给几个学生，每人发的一样多且不止1支，并且正好分完，可以分给几个人？每人几支？有几种分法？

【难度】★★

【答案】两种分法：（1）3个人，每人5支；（2）5个人，每人3支.

【解析】将15分解可得： $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5 = 5 \times 3 = 15 \times 1$

题目要求每人不止1支，排除掉1和15，故有两种分法：

（1）3个人，每人5支；（2）5个人，每人3支.

【总结】本题主要考查如何利用整除解决实际问题.

【例13】2015年的教师节是星期四，老师们可以好好庆祝一下自己的节日了，同学们，明年呢？我们能否不查日历，就能知道2016年的教师节是星期几呢？

【难度】★★★

【答案】星期六

【解析】2016是闰年，故2016年的二月有29天，2015年的教师节与2016年的教师节

间隔366天，则： $366 \div 7 = 52 \cdots 2$ ，

$\therefore$ 2016年的教师节是星期四后面两天，是星期六.

【总结】本题主要考查如何利用整除解决实际问题.

【例14】学校有10个兴趣小组，各组的人数如下表：

组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人数	3	11	6	8	10	12	4	7	13	8

一天下午，学校同时举办语文写作和英语听力两个讲座，已知有9个小组去听讲座，其中听英语讲座的人数是听语文讲座人数的6倍，还剩下一个小组在教室里讨论问题，这一组是第几组？

【难度】★★★

【答案】第6组

【解析】设听语文讲座的人数为 x ，那么听英语讲座的人数为 $6x$ ，

则在教室里的一组人数为 $(82-7x)$ 人；

由已知得： $3 \leq 82-7x \leq 13$ ，且 $82-7x$ 为整数.

$$\text{解得： } 9\frac{6}{7} \leq x \leq 11\frac{2}{7}.$$

因为 x 为整数，所以 x 的取值为 10 或者 11.

当 $x=10$ 时， $82-7x=12$ ，第 6 组；

当 $x=11$ 时， $82-7x=5$ （舍）；

$\therefore$ 留在教师的是第 6 组.

【总结】 本题主要考查如何利用整除解决实际问题.

模块三：因数和倍数的意义

1、因数和倍数的意义

整数 a 能被整数 b 整除， a 就叫做 b 的**倍数**， b 就叫做 a 的**因数**（也称为**约数**）.

【例 15】 有一个算式 $63 \div 7 = 9$ ，则可以说_____能被_____整除，也可以说_____能整除_____，还可以说_____和_____是_____的因数，_____是_____和_____的倍数.

【难度】 ★

【答案】 63， 7， 7， 63， 7， 9， 63， 63， 7， 9；

【解析】 因数和倍数的意义： 整数 a 能被整数 b 整除， a 就叫做 b 的倍数， b 就叫做 a 的因数（也称为约数）.

【总结】 本题主要考查因数和倍数的概念.

【例 16】 分别写出 12、19 和 36 的因数，再分别写出这三个数的倍数（倍数只需从小到大依次写 3 个）.

【难度】 ★

【答案】 12 的因数： 1， 2， 3， 4， 6， 12； 倍数是： 12， 24， 36.....

19 的因数： 1， 19； 倍数是： 19， 38， 57.....

36 的因数： 1， 2， 3， 4， 6， 9， 12， 18， 36； 倍数是： 36， 72， 108.....

【解析】 $\because 12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ ；

$\therefore$ 12 的因数： 1， 2， 3， 4， 6， 12； 倍数是： 12， 24， 36.....

$\because 19 = 1 \times 19$ ；

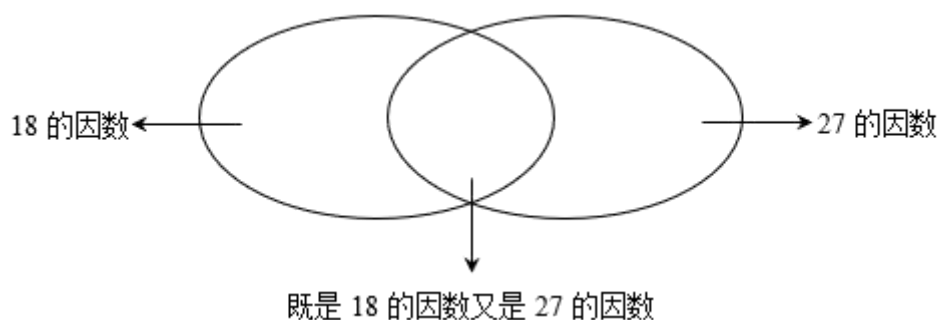
$\therefore$ 19 的因数： 1， 19； 倍数是： 19， 38， 57.....

$\because 36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9$ ；

$\therefore$ 36 的因数： 1， 2， 3， 4， 6， 9， 12， 18， 36； 倍数是： 36， 72， 108.....

【总结】 本题主要考查因数和倍数的概念.

【例 17】 在圈内填写满足条件的数：



【难度】★

【答案】18 的因数：1，2，3，6，9，18； 27 的因数：1，3，9，27；

既是 18 的因数又是 27 的因数：1，3，9

【解析】 $\because 18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$ ；

$\therefore$ 18 的因数：1，2，3，6，9，18；

$\because 27 = 1 \times 27 = 3 \times 9$ ；

$\therefore$ 27 的因数：1，3，9，27；

$\therefore$ 既是 18 的因数又是 27 的因数有：1，3，9.

【总结】本题一方面考查如何求一个正整数的因数，另一方面考查如何求两个正整数相同的因数.

【例 18】下列各数中是否含有相同的因数，若含有请指出.

(1) 6 和 9；

(2) 27 和 51.

【难度】★★

【答案】(1) 含有相同的因数：1 和 3； (2) 含有相同的因数：1 和 3.

【解析】(1) $\because 6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$ ， $9 = 1 \times 9 = 3 \times 3$ ； $\therefore$ 6 和 9 含有相同的因数：1 和 3；

(2) $\because 27 = 1 \times 27 = 3 \times 9$ ， $51 = 1 \times 51 = 3 \times 17$ ； $\therefore$ 27 和 51 含有相同的因数：1 和 3；

【总结】本题主要考查如何求出两个不相等的正整数所含有的相同的因数.

【例 19】从小到大依次写出 10 个 2 的倍数：_____；

从小到大依次写出 10 个 3 的倍数：_____；

其中_____既是 2 的倍数，又是 3 的倍数.

【难度】★★

【答案】2，4，6，8，10，12，14，16，18，20；

3，6，9，12，15，18，21，24，27，30；

6，12，18，24，30；

【解析】略

【例 20】已知： $A = 2 \times 3 \times 5$ ， $B = 3 \times 3 \times 5$ ，则 A 和 B 相同的因数有哪些？

【难度】★★

【答案】1, 3, 5, 15.

【解析】 $\because A = 2 \times 3 \times 5$, $\therefore A$ 的因数有: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30;

$\because B = 3 \times 3 \times 5$, $\therefore B$ 的因数有: 1, 3, 5, 9, 15, 45.

$\therefore A$ 和 B 相同的因数有: 1, 3, 5, 15.

【总结】本题主要考查如何求两个不相等的正整数所含有的相同因数.

【例 21】一个正整数只有 2 个因数而且这个数比 10 小, 这个数可以是多少?

【难度】★★

【答案】2, 3, 5, 7

【解析】只有两个因数, 说明这个数只能分解成 1 乘以本身, 这样的数有 2, 3, 5, 7;

【总结】本题主要考查因数的概念.

【例 22】两个 2 位数的积是 216, 这两个数的和是多少?

【难度】★★

【答案】30

【解析】 $\because 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 12 \times 18$,

$\therefore$ 这两个数是 12 和 18, 和是 30.

【总结】本题主要是对因数的概念的综合运用.

【例 23】1 到 100 之间, 因数个数是奇数的自然数有哪些?

【难度】★★

【答案】1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

【解析】因数是奇数的数是平方数, 1—100 之间的平方数是 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,

64, 81, 100;

【总结】当一个正整数是平方数时, 它的因数个数是奇数个.

【例 24】李明去儿童乐园玩, 儿童乐园是 1 路车和 13 路车的始发站, 1 路车每 5 分钟发车一次, 13 路车每 6 分钟发车一次. 现在这两路车同时发车以后, 至少再经过多少分钟又同时发车?

【难度】★★

【答案】15 分钟

【解析】因为 5 的倍数有: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60……;

6 的倍数有: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60……;

所以至少再经过 30 分钟又同时发车.

【总结】本题主要是利用倍数的概念来解决实际问题.

【例 25】用 16 块面积是 1 平方厘米的正方形,可以拼成多少种形状不同的长方形?它的长和宽分别是多少厘米?

【难度】★★★

【答案】三种: (1) 16, 1; (2) 8, 2; (3) 4, 4.

【解析】 $16 = 1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4$;

答:可以拼成 3 种形状不同的长方形,长和宽分别是: 16, 1 或 8, 2 或 4, 4.

【总结】本题主要是利用因数的概念来解决实际问题.



师生总结

- 1、求一个整数的因数的方法有哪些?
- 2、求一个整数的倍数的方法有哪些?
- 3、一个正整数的最小的因数和最大的因数是什么?
- 4、一个正整数最小的倍数是什么?

【例 26】一筐苹果,2 个一拿或 3 个一拿或 4 个一拿或 5 个一拿都正好拿完没有余数,问这筐苹果最少有多少个?

【难度】★★★

【答案】60

【解析】通过枚举法会发现 2、3、4、5 的最小的倍数是 60,

所以至少再经过 30 分钟又同时发车.

【总结】本题主要是利用倍数的概念来解决实际问题.

【例 27】小明有一本共 126 张纸的记事本,他依次将每张纸的正反两面编页码,即由第 1 页一直编到 252 页.如果从这本记事本中撕下 31 张纸,并将它们的页码相加,和是否可能等于 2010?

【难度】★★★

【答案】不能

【解析】31 张纸的所有页码中,共 31 个奇数和 31 个偶数相加,答案是奇数,不可能是 2010.

另：拓展来看，

每一张纸的页码和： $1+2=3$ ， $3+4=7$ ， $5+6=11$ ，.....

共同点：加上 1 后都是 4 的倍数，

整体考虑，32 页纸的页码和+31 应是 4 的倍数，但 $2010+31$ 不能被 4 整除，

所以是不可能的。

【总结】奇数+奇数=偶数，偶数+偶数=偶数。

【例 28】我们知道，每个正整数都有因数，对于一个正整数 a ，我们把小于 a 的正的因数叫做 a 的真因数。如

10 的正因数有 1、2、5、10，其中 1、2、5 是 10 的真因数。把一个正整数 a 的所有真因数的和除以 a ，所得的商叫做 a 的“完美指标”。如 10 的“完美指标”是 $(1+2+5) \div 10 = \frac{4}{5}$ 。一个正整数的“完美指标”越接

近 1，我们就说这个数越“完美”。如 8 的“完美指标”是 $(1+2+4) \div 8 = \frac{7}{8}$ ，10 的“完美指标”是 $\frac{4}{5}$ ，因为 $\frac{7}{8}$ 比 $\frac{4}{5}$ 更接近 1，所以我们说 8 比 10 完美。

根据上述材料，回答下面问题：

(1) 5 的“完美指标”是_____；

(2) 6 的“完美指标”是_____；

(3) 9 的“完美指标”是_____。

(4) 试找出比 20 大，比 30 小的正整数中，最“完美”的数。

【难度】★★★

【答案】(1) $\frac{1}{5}$ ； (2) 1； (3) $\frac{4}{9}$ ； (4) 28；

【解析】(1) 5 的“完美指标”： $\frac{1}{5}$ ； (2) 6 的“完美指标”是： $\frac{1+2+3}{6} = 1$

(3) 9 的“完美指标”是： $\frac{1+3}{9} = \frac{4}{9}$ ；

(4) 素数的“完美指标”为 $\frac{1}{n}$ ，不够完美；

合数的真因数较小，完美指标也会比较小，不够完美；

所以验证 24 和 28 的完美指标：

24 的“完美指标”是： $\frac{1+2+3+4+6+8+12}{24} = \frac{3}{2}$ ；

28 的“完美指标”是 $\frac{1+2+4+7+14}{28} = 1$ ；

$\therefore$ 28 是比 20 大，比 30 小的正整数中，最“完美”的数。

【总结】本题主要是考查学生的理解能力，通过对题目中新的概念的理解，利用概念去解决新的问题。

第二讲：能被 2、5 整除的数，分解素因数

1、能被 2 整除的数

能被 2 整除的数的特征：个位上是 0，2，4，6，8 的整数；

能被 2 整除的整数叫做**偶数**，不能被 2 整除的整数叫做**奇数**。

2、能被 5 整除的数

能被 5 整除的数的特征：个位上是 0 或 5 的整数。

3、能同时被 2、5 整除的数

能同时被 2 和 5 整除的数的特征：个位上是 0 的整数。

【例 29】已知：11，15，32，56，19，123，312，566，787，哪些是奇数？哪些是偶数？

【难度】★

【答案】奇数：11，15，19，123，787； 偶数：32，56，312，566。

【解析】32，56，312，566 能被 2 整除，是偶数，

11，15，19，123，787 不能被 2 整除，是奇数。

【总结】本题主要考查奇数和偶数的概念。

【例 30】已知：17，25，70，98，105，370，952，其中能被 5 整除的数有_____。

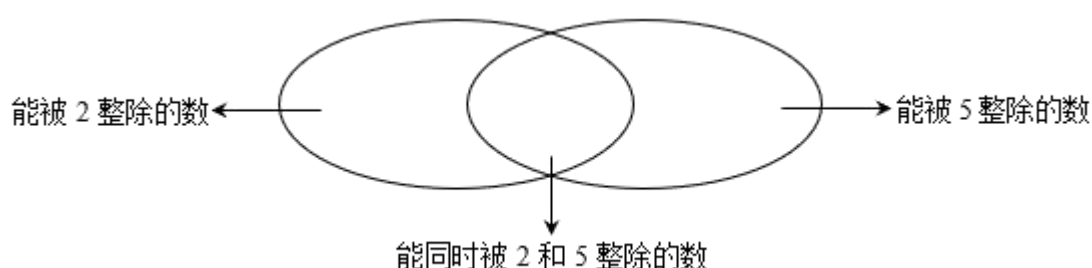
【难度】★

【答案】25，70，105，370。

【解析】个位上是 0 或 5 的整数是能被 5 整除的数。

【总结】本题主要考查能被 5 整除的数的特征。

【例 31】在圈内写出满足条件的数：12，25，40，75，80，94，105，210，354，465，760。



【难度】★

【答案】能被 2 整除的数：12，40，80，94，210，354，760；

能被 5 整除的数：25，40，75，80，105，210，465，760；

能同时被 2 和 5 整除的数：40，80，210，760。

【解析】能被 2 整除的数的特征：个位上是 0，2，4，6，8 的整数；

能被 5 整除的数的特征：个位上是 0 或 5 的整数；

能同时被 2 和 5 整除的数的特征：个位上是 0 的整数。

【总结】本题主要考查能被 2 和 5 整除的数的特征。

【例 32】三个连续的偶数的和是 54，则其中最小的一个是_____。

【难度】★★

【答案】16

【解析】设三个数分别是： $a-2$ ， a ， $a+2$ 。

则： $a-2+a+a+2=54$ ，解得： $a=18$ 。

$\therefore a-2=16$ 。

$\therefore$ 最小的数是 16。

【总结】本题考查如何用字母来表示三个连续的整数。

【例 33】请判断下列算式的结果是偶数还是奇数，偶数则打“√”，奇数则打“×”。

$8-6$ ()

$8+6$ ()

8×6 ()

$9-6$ ()

$9+6$ ()

9×6 ()

$15-7$ ()

$15+7$ ()

15×7 ()

【难度】★★

【答案】横向：√√√ ××√ √√×

【解析】偶数与偶数的和、差、积都是偶数；奇数与偶数的和、差是奇数，积是偶数；

奇数与奇数的和、差是偶数，积是奇数；

【例 34】 $1+2+3+\cdots+999+1000+1001$ 的和是奇数还是偶数？请说明理由。

【难度】★★★

【答案】奇数

【解析】1001 个数字中，501 个奇数，500 个偶数，根据奇数偶数的运算性质，和为奇数。

【总结】奇数与偶数的和是奇数，奇数与奇数的和是偶数。



师生总结

1、奇数偶数的运算性质有哪些？

【例 35】用 0、1、2、3 这四个数字排成一个四位数，要使这个数有因数 2，有几种不同的排法？要使这个数能被 5 整除，有几种不同的排法？

【难度】★★★

【答案】有因数 2： 10 种；有因数 5： 6 种.

【解析】有因数 2，则个位数字是 2 或 0，则有 1230，1320，2130，2310，3120，3210，1032，1302，3012，3102，共 10 种；

有因数 5，则个位数字是 0，则有 1230，1320，2130，2310，3120，3210，共 6 种；

【总结】本题主要考查如何利用能同时被 2 和 5 整除的数的特征来进行数字的排列组合.

【例 36】下面的乘式的积中，末尾有多少个 0？

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 29 \times 30.$$

【难度】★★★

【答案】7 个

【解析】每一个因数中所含的因数是 5 和 2 的个数，决定结果中 0 的个数；

将 1—30 中的数分解素因数，有 7 个 5 和多于 7 个 2，结果中有 7 个 0.

【总结】本题是一道比较综合的题目，主要考查学生对所学知识的综合运用能力.

模块一：素数与合数

1、素数与合数

(1) 素数：一个正整数，如果只有 1 和它本身两个因数，则叫做**素数**，也叫做**质数**；

(2) 合数：一个正整数，如果除了 1 和它本身以外还有别的因数，则叫做**合数**；

(3) 1 既不是素数，也不是合数；正整数可分为：1、素数和合数三类.

【例 37】判断 37，39，47 和 49 是素数还是合数.

【难度】★

【答案】37 和 47 是素数，39 和 40 是合数.

【解析】因为 37 和 47 都只有 1 和它本身两个因数，所以 37 和 47 是素数，39 和 40 除了 1 和它本身之外，还有其它的因数，因此 39 和 40 是合数.

【总结】本题主要考查素数和合数的概念.

【例 38】下列各数中，哪些是素数？哪些是合数？

6，13，18，31，51，67，87，120.

【难度】★

【答案】13, 31, 67 是素数; 6, 18, 51, 87, 120 是合数.

【解析】13, 31, 67 只有 1 和本身两个因数, 是素数;

6, 18, 51, 87, 120 除了 1 和本身, 还有其他因数, 是合数.

【总结】本题主要考查素数和合数的概念.

【例 39】根据要求填空: 在 1, 2, 9, 21, 43, 51, 59, 64 这八个数中:

- (1) 是奇数又是素数的数是 ();
- (2) 是奇数不是素数的数是 ();
- (3) 是素数而不是奇数的数是 ();
- (4) 是合数而不是偶数的数是 ().

【难度】★

【答案】(1) 43, 59 ; (2) 1, 9, 21, 51 ; (3) 2; (4) 9, 21, 51.

【解析】略

【总结】本题主要是对基本概念的考查.

【例 40】已知字母 p 、 q 分别代表一个素数, 并且 $p + q = 99$, 你能知道 p 、 q 这两个数相乘的积是多少吗?

【难度】★★

【答案】194

【解析】99 是一个奇数和一个偶数的和, 且这两个数都是素数, 所以这两个数是 2 和 97, 积是 194.

【总结】2 是最小的素数, 也是唯一的偶素数.

【例 41】判断题 (若是正确的, 请说明理由; 若是错误的, 请把它改正确).

- (1) 所有的偶数是合数, 所有的奇数是素数;
- (2) 某数是 3 的倍数, 这个数一定是合数;
- (3) 一个合数至少有 3 个因数;
- (4) 在所有的素数中, 只有 2 是偶数, 其余的素数都是奇数;
- (5) 一个自然数, 如果不是素数, 就一定是合数;
- (6) 两个素数的和一定是合数;

(7) 大于 2 的合数都是偶数；

(8) 一个大于 1 的自然数，如果有小于本身的因数，那么这个数一定是合数.

【难度】★★

【答案】(1) ×; (2) ×; (3) √; (4) √; (5) ×; (6) ×; (7) ×; (8) ×.

【解析】(1) 错误，偶数中 2 是素数，其余为合数，奇数中既有素数，也有合数；

(2) 错误，3 的倍数中，3 是素数，其余为合数；

(3) 正确，合数除了 1 和本身还有其他因数，故至少有 3 个；

(4) 正确，2 是素数中唯一的偶数；

(5) 错误，0，1 既不是素数也不是合数；

(6) 错误，两个素数的和既有可能是素数，也有可能是合数，如 $2+3=5$ ，但 2、3、5 都是素数.

(7) 错误，大于 2 的合数有奇数，也有偶数，如 39 是合数，但不是偶数；

(8) 错误，任何正整数的因数都有 1，但是不能说明其是合数；

【总结】本题主要是考查素数与合数的概念，要准确理解.

【例 42】用 10 以内的质数组成一个三位数，使它能同时被 3、5 整除，这个数最小和最大分别是多少？

【难度】★★

【答案】375 和 735.

【解析】这个三位数是 5 的倍数，个位数字是 5；能被 3 整除，三个数字之和是 3 的倍数；

故包含 3、5、7 三个数字，最小是 375，最大是 735.



师生总结

- 1、最小的素数是几？最小的合数是几？
- 2、最小的偶素数是几？
- 3、如何判断一个正整数是不是素数？

【例 43】一个两位质数，交换个位与十位上的数字，所得的两位数仍是质数，这个数是多少？

【难度】★★

【答案】11，13，17，31，37，71，73，79，97.

【解析】两位质数中，十位数字是 2、4、5、6、8 的，不满足条件，剩余的有：11，13，17，19，31，37，53，59，71，73，79，97，其中满足条件的有：11，13，17，31，37，71，73，79，97.

【总结】本题主要查对质数概念的理解和运用.

【例 44】已知一个长方形的长和宽都是质数厘米，并且周长是 36 厘米. 问这个长方形的面积至多是多少个平方厘米？

【难度】★★★

【答案】77 平方厘米

【解析】由周长是 36 厘米可得：长+宽=18，由于长和宽都是质数，

所以 18 只能写成 5+13 或 7+11.

所以这个长方形的面积最大为：7×11=77 平方厘米

答：这个长方形的面积至多是 77 平方厘米.

【总结】本题是利用质数解决实际问题.

【例 45】三个素数的和是 100，这三个素数的积最大是多少？

【难度】★★★

【答案】4514

【解析】由三个素数和为 100 且 2 是素数中唯一的偶数，所以 2 是其中一个素数，

即：另两个素数的和是 98.

又：98=19+79=31+67=37+61

所以这三个数的乘积最大是：2×37×61=4514.

答：这三个素数的积最大是 4514.

【总结】偶数与偶数的和是偶数，偶数与奇数的和是奇数，2 是唯一的偶素数.

【例 46】若三个素数的乘积恰好等于它们的和的 11 倍，那么这三个素数各是几？

【难度】★★★

【答案】2、11、13 或 3、7、11.

【解析】设这三个质数为 a 、 b 、 c ，可得等式： $abc=11(a+b+c)$ ，

又 11 也是质数，所以 a 、 b 、 c 中必有一个数是 11，

设 $a=11$ ，即 $11bc=11(11+b+c)$ ，所以 $bc=11+b+c$.

①当 b 、 c 中含有质数 2 时，不妨令 $b=2$

$2c=11+2+c$ ，解得 $c=13$ ，符合题意。

②当 b 、 c 中不含有质数 2，即 b 、 c 都是奇数时，

不妨令： $b=2M+1$ ， $c=2N+1$ ，有：

$$(2M+1)(2N+1)=11+2M+1+2N+1.$$

$$\text{即 } 4MN=12, MN=3.$$

显然只能是 $M=3$ ， $N=1$ 。

此时 $b=2\times 3+1=7$ ， $c=1\times 2+1=3$ ，符合题意。

综上，这三个质数可以是：2、11、13 或 3、7、11。

【总结】本题是一道综合性非常强的题目，要求学生要充分理解其中的假设法。

分解素因数

1、分解素因数

每个合数都可以写成几个素数相乘的形式，其中每个素数都是这个合数的因数，叫做这个合数的素因数。

把一个合数用素因数相乘的形式表示出来，叫做分解素因数。

2、口算法分解素因数

例如： $72=8\times 9=2\times 2\times 2\times 3\times 3$ 。

3、短除法分解素因数

$$\begin{array}{r|l} 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

形如右图，

这种在左侧写除数，下方写商的除法格式叫做“短除法”。

用短除法分解素因数的步骤如下：

- (1) 先用一个能整除这个合数的素数（通常从最小的开始）去除；
- (2) 得出的商如果是合数，再按照上面的方法继续除下去，直到得出的商是素数为止；
- (3) 然后把各个除数和最后的商按从小到大的顺序写成连乘的形式。

【例 47】把 24 分解素因数的正确算式是（ ）

A. $24=2\times 3\times 4$

B. $24=2\times 2\times 2\times 3$

C. $24=1\times 2\times 2\times 2\times 3$

D. $24=2\times 2\times 6$

【难度】★

【答案】B

【解析】A、D 选项中有合数，C 选项中有 1，1 既不是素数，也不是合数。

【总结】每个合数都可以写成几个素数相乘的形式，叫做分解素因数。

【例 48】在等式 $4\times 6=n=2\times 2\times 2\times 3$ 中，4 和 6 都是 n 的（ ），2 和 3 都是 n 的（ ）

A. 素因数

B. 素数

C. 因数

D. 合数

【难度】★

【答案】C、A

【解析】略

【总结】本题主要考察素数和素因数的区别。

【例 49】把以下各数分解素因数：

35, 72, 105, 108, 238.

【难度】★

【答案】 $35=5\times 7$; $72=2\times 2\times 2\times 3\times 3$; $105=3\times 5\times 7$; $108=2\times 2\times 3\times 3\times 3$;

$238=2\times 7\times 17$.

【解析】略

【总结】本题主要考查如何将一个合数分解素因数。

【例 50】请把 2、3、5、7、14、15 这六个数分成两组，使每组数的乘积相等。

【难度】★★

【答案】3、5、14 和 2、7、15。

【解析】因为 $14=2\times 7$ ，所以 14 和 2、7 分在两组；因为 $15=3\times 5$ ，所以 15 和 3、5 分在两组；故：3、5、14 一组，2、7、15 一组。

【总结】本题主要是对分解素因数的综合运用。

【例 51】如果 $\langle a \rangle$ 表示全部素因数的和，如 $\langle 6 \rangle = 2 + 3 = 5$ ，试求 $\langle 35 \rangle - \langle 10 \rangle$ 的值.

【难度】★★

【答案】7

【解析】由已知得： $\langle 35 \rangle = 5 + 7 = 14$ ， $\langle 10 \rangle = 2 + 5 = 7$ ，所以 $\langle 35 \rangle - \langle 10 \rangle = 7$.

【总结】本题类似于阅读理解题，要对 $\langle a \rangle$ 所表示的概念准确理解.

【例 52】下面的算式里，□里数字各不相同，求这四个数字的和.

$$\square\square \times \square\square = 1995.$$

【难度】★★

【答案】20

【解析】因为 $1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19 = 35 \times 57$ ，所以这四个数分别是 3、5、5、7，

和是： $3 + 5 + 5 + 7 = 20$.

【总结】本题主要是对分解素因数的综合运用.



师生总结

2、分解素因数的方法有哪些？

2、归纳总结短除法分解素因数的步骤.

【例 53】有 168 颗糖，平均分成若干份，每份不得少于 10 颗，也不能多于 50 颗，共有多少种分法？

【难度】★★

【答案】5 种

【解析】由因为 $168 = 1 \times 168 = 2 \times 84 = 3 \times 56 = 4 \times 42 = 6 \times 28 = 8 \times 21 = 12 \times 14$;

所以 168 的因数有：1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 21, 28, 42, 56, 84, 168.

因为每份不得少于 10 颗，也不能多于 50 颗，

所以满足条件的因数有：12、14、21、28、42.

所以共有 5 种分法.

【总结】本题主要是利用因数的概念解决实际问题.

【例 54】把一篮苹果分给 4 人，使四人的苹果数一个比一个多 2，且他们的苹果个数之积是 1920. 这篮苹果共有多少个？

【难度】★★

【答案】28 个

【解析】因为 $1920=2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 5=4\times 6\times 8\times 10$,

所以四个小朋友分别分到 4、6、8、10 个苹果， $4+6+8+10=20$ (个)

答：这篮苹果共有 20 个.

【总结】本题是一道应用题，主要是还是利用分解素因数的思想进行求解.

【例 55】有 a 个人都属鸡，而且生日都是 3 月 20 日. 某年，他们的年龄数的乘积为 207025，他们的年龄数之和是 102. 则 a 等于几？

【难度】★★★

【答案】6

【解析】因为 $207025=5\times 5\times 7\times 7\times 13\times 13=1\times 13\times 13\times 25\times 49$ ，又这几个人的生肖相同，

所以他们的年龄是 49，25，13，13，1，

因为 $49+25+13+13=100$ ，所以 $102-100=2$.

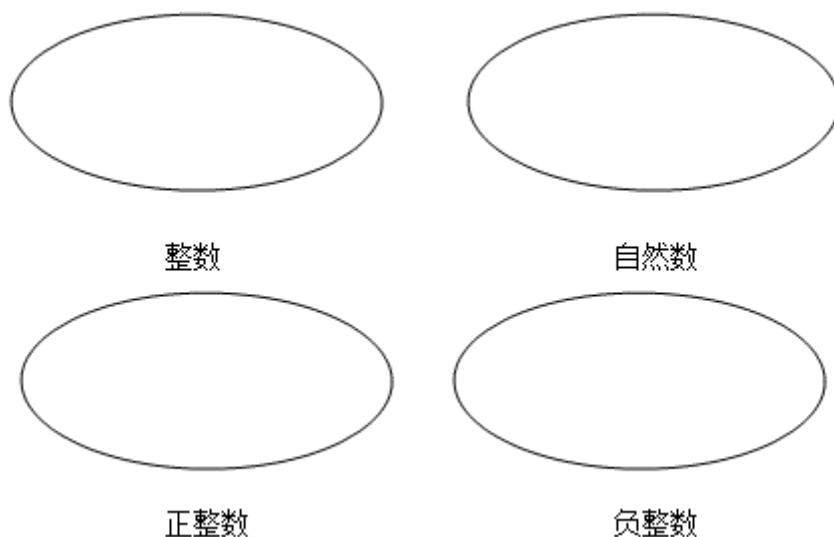
所以有 2 人年龄为 1，有 2 人年龄为 13，有 1 人年龄为 25，有 1 人年龄为 49，共 6 人，即 $a=6$.

【总结】本题是一道非常综合的题目，主要还是利用分解素因数的方法，找到原数的因数，从而求出适合题意的解来.

第三讲 小结

【习题 1】先把下列各数放入正确的圈内，然后把这些数按照从小到大的顺序排列，并说明其中最小的正整数，最小的自然数，最大的负整数分别是哪个？

-1, 2, -0.3....., 15, -0.7, 0, 3.83, 0.3, 1, 4.732732....., -8, 10.



【难度】★

【答案】整数：-1, 2, 15, 0, 1, -8, 10; 自然数：2, 15, 0, 1, 10;

正整数：2, 15, 1, 10;

负整数：-1, -8;

从小到大排序为：-8, -1, -0.7, -0.3, 0, 0.3, 1, 2, 3.83, 4.732732.....,

10, 15;

其中最小的正整数是 1, 最小的自然数是 0, 最大的负整数是 -1.

【解析】略

【习题 2】 一个三位数 $46\square$, 能被 2 整除时, $\square$ 中最大填____; 能被 5 整除时, $\square$ 中最小填_____.

【难度】★

【答案】8, 0

【解析】能被 2 整除的数个位数字是 0, 2, 4, 6, 8; 能被 5 整除的数个位数字是 0, 5;

【总结】本题主要考查能被 2 整除以及能被 5 整除的数的特征.

【习题 3】 判断题:

- (1) 若 $m \div n = 2$, 则 n 一定能整除 m . ()
- (2) 整数 a 的最大因数正好等于整数 b 的最小倍数, 则 a 一定大于 b . ()
- (3) 因为 $6.3 \div 7 = 0.9$, 所以 6.3 是 7 的倍数. ()
- (4) 因为整数 7421 中包含了数字 2, 所以 7421 一定能被 2 整除. ()

【难度】★★

【答案】××××

【解析】(1) 整除要求被除数和除数也要为整数;

(2) 一个数的最大因数和最小倍数都是它本身，因此 a 和 b 相等；

(3) 因数和倍数的概念是在整除的前提下存在的，本题不属于整除，不存在倍数的概念；

(4) 能被 2 整除的数字特征是个位数字为 2, 4, 6, 8, 0, 不是任意一位；

【总结】本题主要考查学生对基本概念的理解。

【习题 4】 已知 $A=2 \times 3 \times 5 \times 7$ ，那么 A 的全部因数的个数是()

A. 10 个 B. 12 个 C. 14 个 D. 16 个

【难度】★★

【答案】D

【解析】本身和 1: 2 个；任意一个数: 4 个；任意两数乘积: 6 个；

任意三个数乘积: 4 个； $2+4+6+4=16$ 个。

【总结】本题主要考查如何去根据乘积的形式去求一个正整数的所有因数。

【习题 5】 一个正整数既是 48 的因数，又是 3 的倍数，这个数可以是多少？

【难度】★★

【答案】3, 6, 12, 24, 48

【解析】48 的因数有 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48,

其中是 3 的倍数的是 3, 6, 12, 24, 48。

【总结】本题主要考查因数和倍数的概念。

【习题 6】 如果 (n) 表示 n 的全部因数的和，如 $(4)=1+2+4=7$ ，则 $(18)-(21)=$ _____。

【难度】★★★

【答案】7

【解析】 $\because (18)=1+2+3+6+9+18=39$, $(21)=1+3+7+21=32$,

$\therefore (18)-(21)=7$ 。

【总结】本题主要考查学生的理解能力，通过对 (n) 的理解完成相关的计算。

【习题 7】 用 0、2、5、8 这四个数字组成的四位数中，能被 2 整除的数有多少个？

【难度】★★★

【答案】10 个

【解析】能被 2 整除的数个位数字是 0, 2, 4, 6, 8, 所以有 2580, 2850, 5280, 5820, 8250, 8520, 5082, 5802, 8052, 8502, 共 10 个。

【总结】本题主要考查如何利用能被 2 整除的数的特征来进行数字的排列组合。

【习题8】 先把一个数的末位非零的数字割去，并在上位加上所割去数的4倍，然后再将和数的末位数割去，并在上位加上所割去数的4倍，这样继续下去，直到能够很容易看出和数是不是13的倍数为止。若是13的倍数，则这个数就是13的倍数。试判断下列各数，哪些是13的倍数？（写出具体过程）

(1) 9062; (2) 12805; (3) 158506.

【难度】★★★

【答案】(2) 12805 是 13 的倍数

【解析】(1) 9062:

$906+8=914$, $91+16=107$, $10+28=38$, 不是 13 的倍数;

(2) 12805:

$1280+20=1300$, 是 13 的倍数, 故 12805 是 13 的倍数;

(3) 158506:

$15850+24=15874$, $1587+16=1603$, $160+12=172$, $17+8=25$,

不是 13 的倍数;

【总结】本题主要考查对13的倍数的概念的理解及运用.

课后作业

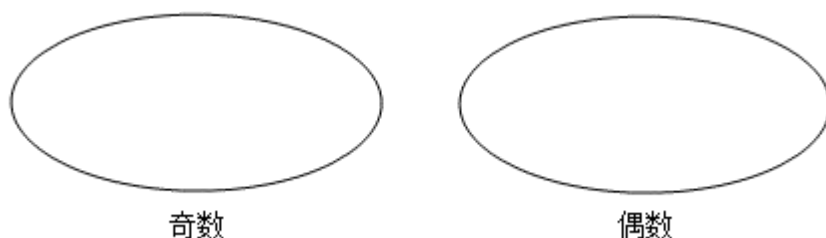
【作业1】 是否存在最小的正整数，负整数，自然数；是否存在最大的正整数，负整数，自然数？如果有，请写出是哪个数.

【难度】★

【答案】最小的正整数是 1，最小的负整数不存在，最小的自然数是 0，不存在最大的正整数，最大的负整数是 -1，不存在最大的自然数.

【解析】略

【作业2】 78 的因数有哪些？把其中的奇数和偶数分别填入相应的圈内.



【难度】★★

【答案】奇数有 1, 3, 13, 39, 偶数有 2, 6, 26, 78.

【解析】78 的因数有 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78;

其中，奇数有 1, 3, 13, 39, 偶数有 2, 6, 26, 78.

【总结】本题主要考查对因数、奇数、偶数这些基本概念的理解.

【作业 3】求 26 以内能被 5 整除的所有数的和.

【难度】★★

【答案】75

【解析】26 以内能被 5 整除的数有 5, 10, 15, 20, 25, 和为 $5+10+15+20+25=75$.

【总结】本题主要考查能被 5 整除的数的特征.

【作业 4】在黑板上，先写出三个自然数 1、3、5，然后任意擦去其中的一个，换成所剩两个数的和. 照这样进行 100 次后，黑板上留下的三个数中有几个奇数？它们的乘积是奇数还是偶数？

【难度】★★

【答案】三个数中有两个奇数，乘积为偶数.

【解析】第一次擦除，变为奇奇偶，

第二次分为两种情况：（1）擦掉奇数，变为奇奇偶，（2）擦除偶数，变为奇奇偶；
之后一直保持为奇奇偶，所以 100 次后也为奇奇偶，乘积为偶数.

【总结】本题一方面考查学生对题意的理解，另一方面考查奇数与偶数相乘的特征.

【作业 5】求 1000 以内能同时被 3、5 整除的数中，最大的奇数与最小的偶数的和.

【难度】★★★

【答案】1005

【解析】1000 以内能被 3、5 同时整除的数是 15 的倍数，最小的偶数是 30，
最大的奇数是 975，和为 1005.

【总结】本题主要考查能同时被 3、5 整除的数的特征.

【作业 6】一个大于 1 的自然数 a ，只有两个因数，那么 $3a$ 有几个因数？

【难度】★★★

【答案】当 $a \neq 3$ 时， $3a$ 有 4 个因数；当 $a = 3$ 时， $3a$ 有 3 个因数.

【解析】 $3a = 1 \times 3a = 3 \times a$ ，由已知得： $a \neq 1$ ， $a \neq 3a$

$\therefore$ 当 $a \neq 3$ 时， $3a$ 有 4 个因数：1, 3, a , $3a$ ；

当 $a = 3$ 时， $3a$ 有 3 个因数：1, 3, $3a$ ；.

【总结】本题主要是考查如何根据题目中的条件去求一个正整数的因数.

【作业 7】 张阿姨是公共汽车售票员，她的票夹上有 5 角、1 元、1 元 5 角三种车票，她习惯把钱都放在车厢售票员位置的小桌上，这样就可以随时算出有没有差错。有一次她数了数桌上的硬币，是 36 枚 1 角。她对司机说：“我今天我肯定出了差错了”，你知道为什么吗？

【难度】★★★

【答案】略

【解析】票价有三种，5 角、1 元、1 元 5 角，都是 5 的倍数，但是 36 不是 5 的倍数。

【总结】本题主要考查如何利用倍数的概念来解决实际问题。

【作业 8】 凡一个数的奇位数字的和同它的偶位数字的和相减（大的和减去小的和），所得的差是 0 或是 11 的倍数时，这个数就是 11 的倍数。下列各数，哪些是 11 的倍数？

(1)64273 (2)208549 (3)77360822

【难度】★★★

【答案】（1）、（2）、（3）都是 11 的倍数

【解析】（1）64273：(6+2+3) - (7+4) = 0，是 11 的倍数；

（2）208549：(2+8+4) - (0+5+9) = 0，是 11 的倍数；

（3）77360822：(7+6+8+2) - (7+3+0+2) = 11，是 11 的倍数；

∴（1）、（2）、（3）都是 11 的倍数。

【总结】本题主要考查对 11 的倍数的概念的理解及运用。

第四讲 公因数和最大公因数

1、公因数

几个数公有的因数，叫做这几个数的公因数。

2、最大公因数

几个数的公因数中，最大的一个叫做这几个数的最大公因数。

3、两个数互素

如果两个整数只有公因数 1，那么称这两个数互素。

4、求最大公因数

求几个数的最大公因数，只要把它们所有公有的素因数连乘，所得的积就是它们的最大公因数。

【例 56】求出下列各组数的公因数。

（1）14 和 42； （2）121 和 44； （3）28 和 56； （4）17 和 9。

【难度】★

【答案】（1）14； （2）11； （3）28； （4）1。

【解析】(1) 两个数是倍数关系，最大公因数是较小数；

(2) 两个数既不是倍数关系，也不是互素关系，用短除法；

(3) 两个数是倍数关系，最大公因数是较小数；

(4) 两个数互素，最大公因数是 1；

【例 57】指出下列哪组中的两个数互素.

(1) 3 和 5; (2) 6 和 9; (3) 14 和 15; (4) 18 和 1.

【难度】★

【答案】(1) (3) (4).

【解析】如果两个整数只有公因数 1，那么称这两个数互素.

【总结】互素两数的几种常见类型：(1) 两个数都是素数；(2) 一个素数，一个合数；

(3) 1 和其它的任意正整数.

【例 58】找出下列各数的公因数与最大公因数.

(1) 84、28、60; (2) 12、16、20.

【难度】★

【答案】(1) 公因数：1、2、4，最大公因数：4；

(2) 公因数：1、2、4，最大公因数：4.

【解析】(1) 因为 $84=2\times 2\times 3\times 7$ ； $28=2\times 2\times 7$ ； $60=2\times 2\times 3\times 5$ ；

所以公因数：1、2、4，最大公因数：4；

(2) 因为 $12=2\times 2\times 3$ ； $16=2\times 2\times 2\times 2$ ； $20=2\times 2\times 5$ ；

所以公因数：1、2、4，最大公因数：4；

【总结】本题主要考察公因数和最大公因数的概念.

【例 59】下列说法中，正确的个数有 () 个

①2 是 4 和 16 的一个公因数；

②12 是 24 和 36 的最大公因数；

③如果两个数互素，那么这两个数一定都是素数；

④1 和任何正整数互素.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【难度】★★

【答案】D

【解析】①②④正确；③错误，两个数互素要求两个数只有公因数 1.

【总结】常见的两个互素的数有：（1）两个数都是素数；（2）一个素数，一个合数；

（3）1 和任何正整数；（4）任意两个连续的整数等.

【例 60】已知 m 、 n 、 p 都为自然数，且 $n \div p = 2$ ， $m \div n = 12$ ，那么 m 、 n 、 p 的最大公因数是多少？

【难度】★★

【答案】 p

【解析】 m 是 n 的倍数， n 是 p 的倍数，因此 m 是 p 的倍数；所以最大公因数是 p .

【总结】若三个数都是倍数关系，则它们的最大公因数是最小的那个数.

【例 61】已知两个数的积是 5766，它们的最大公因数是 31，求这两个数.

【难度】★★

【答案】31、168 或 62、93.

【解析】设这两个数是 $31a$ ， $31b$ (a 、 b 互素)，

$$\text{则：} 31a \times 31b = 5766 \quad \therefore ab = 6$$

① $a=1$ ， $b=6$ 时，两个数是 31、168； ② $a=2$ ， $b=3$ 时，两个数是 62、93.

【总结】本题是一道综合题，综合运用了最大公因数和因数的概念.

【例 62】将长、宽、高分别是 120 厘米，90 厘米，60 厘米的长方体木料锯成同样大小的正方体木块，而没有剩余，锯成的木块棱长最长是多少？共可以锯成多少块？

【难度】★★

【答案】30 厘米，9 块

【解析】120、90、60 的最大公因数是 30，所以棱长最长为 30 厘米.

$$(120+90+60) \div 30 = 9 \text{ (块)}$$

答：锯成的木块棱长最长是 30 厘米，共可以锯成 9 块.

【总结】本题是利用最大公因数的思想解决实际问题.

【例 63】学校买来 40 支圆珠笔和 50 本练习本，平均奖给四年级三好学生，结果圆珠笔多 4 支，练习本多 2 本，四年级有多少名三好学生，他们各得到什么奖品？

【难度】★★

【答案】(1) 12 名，3 支圆珠笔，4 本练习本；(2) 6 名，6 支圆珠笔，8 本练习本。

【解析】 $40-4=36$ （支）， $50-2=48$ （本），36 与 48 的最大公因数是 12.

$$12=1\times 12=2\times 6=3\times 4.$$

(1) 若 12 名，每人 3 支圆珠笔，4 本练习本；

(2) 若 6 名，每人 6 支圆珠笔，8 本练习本；

(3) 若 4 名或 2 名，圆珠笔可分完，与题意矛盾；

【总结】本题是利用最大公因数的思想解决实际问题.

【例 64】幼儿园一个班买书，如买 35 本，平均分给每个小朋友差一本，如买 56 本，平均分给每个小朋友后还剩 2 本，如买 69 本，平均分给每个小朋友则差 3 本. 这个班的小朋友最多有几人？

【难度】★★★

【答案】18 人

【解析】 $35+1=36$ 本， $56-2=54$ 本， $69+3=72$ 本，

36、54、72 的最大公因数是 18.

答：这个班的小朋友最多有 18 人.

【总结】本题是利用最大公因数的思想解决实际问题.



师生总结

- 1、两个整数的最大公因数的方法有哪些？
- 2、互素的两个整数具有什么样的特征？

【随堂检测】

【习题 1】 下列说法中，正确的个数有（ ）个

①一个自然数，不是质数就是合数； ②任何一个自然数至少有 2 个因数；

③90 分解素因数是 $90=5\times 2\times 9$ ； ④两个素数的和一定是偶数；

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【难度】★

【答案】A

【解析】①错误：正整数分为 1、质数、合数；

②错误：1 只有本身一个因数；

③错误：分解素因数：素因数都是素数，本题中 9 是合数；

④错误：素数 2 与任意非 2 素数之和是奇数；

【总结】本题主要是考查素数的特征.

【习题 2】 将 20 写成两个质数之和，这两个质数最大乘积是多少？

【难度】★

【答案】91

【解析】因为 20 可以写成 $3+17$ 或 $7+13$ 的两个质数的和，所以积最大是： $7\times 13=91$.

【总结】本题主要考查如何把一个数写成两个素数的和.

【习题 3】 下列各数中是否含有相同的公因数，若含有请指出，并求出最大公因数.

(1) 6 和 9； (2) 27 和 51； (3) 28、42 和 56.

【难度】★

【答案】(1) 含有，最大公因数：3；(2) 含有，最大公因数：3；

(3) 含有，最大公因数：14.

【解析】(1) $6=2\times 3$ ； $9=3\times 3$ ；含有公因数 1、3，最大公因数：3；

(2) $27=3\times 3\times 3$ ， $51=3\times 17$ ，含有公因数 1、3，最大公因数：3；

(3) $28=2\times 2\times 7$ ， $42=2\times 3\times 7$ ， $56=2\times 2\times 2\times 7$ ，含有公因数 1、2、7、14，

最大公因数：14；

【总结】本题主要考查公因数和最大公因数的概念.

【习题 4】 已知两个数的和是 107，它们的乘积是 1992，这两个数分别是多少？

【难度】★★

【答案】24 和 83

【解析】 $1992=2\times 2\times 2\times 3\times 83=24\times 83$ ，所以这两个数是 24 和 83.

【总结】本题主要是考查分解素因数在数字求和中的运用.

【习题 5】两个正整数的和是 50，他们的最大公因数是 5，这两个数的差的最大值是几？

【难度】★★

【答案】40

【解析】设这两个数是 $5a$ ， $5b(a、b$ 互素)，则： $5a+5b=50$.

所以 $a+b=10$.

① $a=1$ ， $b=9$ 时，两个数是 5、45； $45-5=40$ ；

② $a=3$ ， $b=7$ 时，两个数是 15、35. $35-15=20$ ；

所以这两个数的差的最大值是 40.

【总结】本题主要考查素数在数字计算中的运用

【习题 6】王老师带领一班同学去植树，学生恰好分成 4 组. 如果王老师和学生每人植树一样多，那么他们一共植了 539 棵. 这个班有多少个学生？每人植树多少棵？

【难度】★★

【答案】48 个，11 棵

【解析】因为 $539=7\times 7\times 11=49\times 11$ ，所以学生数是 48 人，每人植树 11 棵.

【总结】本题是对分解素因数的综合运用.

【习题 7】某农副食品店销售三级别的大米，已知一级大米 150 斤，二级大米 180 斤，三级大米 210 斤的价格都是 450 元，现需将这三种大米分别按整斤数装袋，要求每袋的价格都相等，那么每袋的价格最低是多少元？

【难度】★★

【答案】15 元

【解析】因为 150、180、210 的最大公因数是 30，所以每种大米最多分 30 小份，

即每份最低： $450\div 30=15$ 元.

答：每袋的价格最低是 15 元.

【总结】本题是利用最大公因数的思想解决实际问题.

【习题8】 “九九重阳节敬老节”将至，幸福小区组织一批老年人决定分乘若干辆至多可乘44人的大巴前去郊游. 如果打算每辆车坐22个人，就会有1个人没有座位；如果少开一辆车，那么，这批老人刚好平均分乘余下的大巴. 那么有多少个老人？原有多少辆大巴？

【难度】★★★

【答案】529 个，24 辆.

【解析】 $22+1=23$ 人，因 23 是质数，所以把这 23 人，只能平均分到 23 个车里.

所以原来的车数是： $23+1=24$ （辆）， $24\times 22+1=529$ （个）.

答：有 529 个老人，原有 24 辆大巴.

【总结】本题的综合性比较强，解题是注意对本题中的“23”这个素数的准确理解.

【习题 9】 甲乙两人射箭，规定每射一箭得到的环数是 0~10 这 10 个数中的一个整数，他们各射 5 靶，每人得到的环数之积刚好都是 1764，但是甲的总环数比乙少 4 环，求甲、乙各自的总环数.

【难度】★★★

【答案】24 环，28 环.

【解析】因为 $1764=2\times 2\times 3\times 3\times 7\times 7$ ，所以每人都有两个 7 环.

剩余三个环数可能为：2、2、9； 3、3、4； 2、3、6； 1、4、9； 1、6、6.

和分别为：13，10，11，14，13.

因为甲的总环数比乙少 4 环，所以甲另外三环的和应是 10 环，乙另外三环的

和应是 14 环. 所以甲的环数为： $14+10=24$ 环，乙的环数为： $14+14=28$ 环.

【总结】本题依旧是考查分解素因数在实际问题中的应用.

【习题 10】 有 a 、 b 、 c 、 d 四个数，已知 a 、 b 的最大公因数是 60， c 、 d 的最大公因数是 96，这四个数的最大公因数是多少？

【难度】★★★

【答案】12

【解析】由已知得： a 、 b 是 60 的倍数， c 、 d 是 96 的倍数，

因此 60 和 96 的最大公因数即是 a 、 b 、 c 、 d 四个数的最大公因数.

而 60 和 96 的最大公因数是 12.

答：这四个数的最大公因数是 12.

【总结】本题主要是考查学生对最大公因数的概念的准确理解和运用.

第五讲 公倍数与最小公倍数

1、公倍数与最小公倍数

公倍数：几个整数公有的倍数叫做它们的公倍数；

最小公倍数：几个整数公有的倍数中，最小的一个叫做它们的最小公倍数.

2、最小公倍数的求法

求两个整数的最小公倍数，只要取它们所有公有的素因数，再取它们各自剩余的素因数，将这些数连乘，所得的积就是这两个数的最小公倍数；

如果两个整数中某一个数是另一个数的倍数，那么这个数就是它们的最小公倍数；

如果两个数互素，那么它们的乘积就是它们的最小公倍数.

【例 65】用短除法求 18 和 24 的最大公因数和最小公倍数.

【难度】★

【答案】6； 72.

【解析】

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

∴ 18 与 24 的最大公因数是 $2 \times 3 = 6$ ；最小公倍数是 $2 \times 3 \times 3 \times 4 = 72$.

【总结】本题考察了用短除法求两个数的最大公因数和最小公倍数.

【例 66】用分解素因数的方法求 24 和 90 的最大公因数和最小公倍数.

【难度】★

【答案】6； 360.

【解析】因为 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ， $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ；

所以 18 与 24 的最大公因数是 $2 \times 3 = 6$ ；最小公倍数是 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$.

【总结】本题考察了用分解素因数法求两个数的最大公因数和最小公倍数.

【例 67】求下列各组数的最小公倍数.

i. 8 和 15； (2) 9 和 45； (3) 19 和 21.

【难度】★

【答案】(1) 8 和 15 的最大公因数是 1；8 和 15 的最小公倍数是 120；

(2) 9 和 45 的最大公因数是 9；9 和 45 的最小公倍数是 45；

(3) 19 和 21 的最大公因数是 1；19 和 21 的最小公倍数是 399.

【解析】(1) (3) 互素的两个数最大公因数是 1，最小公倍数是它们的乘积；

ii. 成倍数关系的两个数，最大公因数是较小数，最小公倍数是较大数；

【总结】本题考察了求两个特殊关系的数的最大公因数和最小公倍数的方法.

【例 68】若 $m=2 \times 2 \times 3 \times 5$ ， $n=2 \times 3 \times 3 \times 7$ ，则 m 、 n 的最小公倍数为_____.

【难度】★

【答案】1260

【解析】 m 、 n 的最小公倍数是： $(2 \times 3) \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 = 1260$.

【总结】本题考察了用分解素因数法求两个数的最大公因数和最小公倍数.

【例 69】求 10，12 和 15 的最小公倍数.

【难度】★★

【答案】60

【解析】
$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 10 & 12 & 15 \\ 3 & 5 & 6 & 15 \\ 5 & 5 & 2 & 5 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$\therefore$ 10、12、15 的最小公倍数是： $2 \times 3 \times 5 \times 1 \times 2 \times 1 = 60$.

【总结】本题考察了求三个数的最大公因数和最小公倍数的方法.

【例 70】已知三个连续奇数的和是 15，那么这三个奇数的最小公倍数是多少？

【难度】★★

【答案】105

【解析】设三个数为 $n-2$ ， n ， $n+2$.

则： $n-2+n+n+2=15$

解得： $n=5$ ，这三个数是：3，5，7.

$\therefore$ 3、5、7 的最小公倍数是： $3 \times 5 \times 7 = 105$.

【总结】本题考察了求三个数的最小公倍数的方法.



师生总结

- 4、求最小公倍数的方法有哪些？
- 5、求两个数和三个数的最小公倍数的方法有什么不同？

【例 71】两个数的积是 144，它们的最小公倍数是 36，这两个数各是多少？

【难度】★★

【答案】4 和 36.

【解析】由已知得：这两个数的最大公因数是 4；

设这两个数是 $4a$ ， $4b$ (a 、 b 互素)，则 $4a \times 4b = 144$.

所以 $ab = 9$. 因为 a 、 b 互素，所以 $a = 1 \times 4 = 4$ ， $b = 9 \times 4 = 36$.

即这两个数是 9、36.

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数和它们乘积的关系：两个数的最小公倍数与最大公倍数的乘积等于这两个数的乘积.

【例 72】甲、乙两户人家相邻而居，甲每 6 天去超市购物一次，乙每 7 天去同一家超市购物一次，元旦这一天两户人家都去这家超市购物，再经过多少天他们又会在同一天都去超市？

【难度】★★

【答案】42 天

【解析】6 与 7 的最小公倍数是 42.

答：再经过 42 天他们又会在同一天都去超市.

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数的应用.

【例 73】已知三个连续偶数的最小公倍数是 24，则这三个连续偶数分别是什么？

【难度】★★★★

【答案】4，6，8

【解析】

$$\begin{array}{r}
 2 \mid \begin{array}{ccc} 2n-2 & 2n & 2n+2 \end{array} \\
 2 \mid \begin{array}{ccc} n-1 & n & n+1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} \frac{n-1}{2} & n & \frac{n+1}{2} \end{array}
 \end{array}$$

设这三个数是 $2n-2$, $2n$, $2n+2$;

若 n 为奇数, 则 $n-1$, $n+1$ 是偶数,

$$\text{则: } 2 \times 2 \times \frac{(n-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{(n+1)}{2} = 24$$

解得: $n=3$, 这三个数是 4, 6, 8.

若 n 为偶数, 则 $n-1$, $n+1$ 是相邻奇数,

$$\text{则: } 2 \times (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 24$$

此方程无解;

$\therefore$ 这三个数是 4, 6, 8.

【总结】本题考察了三个数的最小公倍数的求法.

【例 74】3 月 12 日植树节, 六 (2) 班同学在 400 米跑道的一侧每隔 4 米种一棵树, 当

种好第 31 棵树时, 觉得树与树之间间隔太密, 于是改为每隔 6 米种一棵树, 那么有多少棵树不需要移动呢?

【难度】★★★

【答案】11 棵

【解析】 $4 \times (31-1) = 120$ 米, 而 4 与 6 的最小公倍数是 12,

$$120 \div 12 + 1 = 11 \text{ 棵.}$$

答: 有 11 棵树不需要移动.

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数的应用.

【例 75】幼儿园一个班买书, 如买 35 本, 平均分给每个小朋友差一本; 如买 56 本, 平均分给每个小朋友后还剩 2 本; 如买 69 本, 平均分给每个小朋友则差 3 本. 这个班的小朋友最多有几人?

【难度】★★★

【答案】18 人

【解析】 $35+1=36$, $56-2=54$, $69+3=72$, 而 36、54、72 的最大公因数是 18.

答: 这个班的小朋友最多有 18 人.

【总结】本题考察了两个数的最大公因数的应用.

【例 76】某工厂承包了学校的桌椅制作任务，一张桌子配一把椅子，某车间有甲、乙两组，甲组人员做桌子，每人每天可以做 6 张桌子；乙组每人每天可以做 9 把椅子，为了使生产均衡，每天的桌子、椅子数量刚好配套．该车间至少安排多少人员？（不考虑其他因素）

【难度】★★★

【答案】5 人

【解析】因为 6 与 9 的最小公倍数是 18，所以 $18 \div 6 + 18 \div 9 = 5$ 人．

答：该车间至少安排 5 个人．

【总结】本题考察了两个数的最大公因数最小公倍数的应用．

模块二：最大公因数与最小公倍数综合

1、两数的最大公因数与最小公倍数的关系

已知数 a 和数 b ，两数的最大公因数为 m ，最小公倍数为 n ，则： $a \times b = m \times n$

【例 77】求下列各组数的最大公因数和最小公倍数．

(1) 48 和 18；

(2) 27 和 81．

【难度】★

【答案】(1) 48，18 的最大公因数是 6，最小公倍数是 144；

(2) 27，81 的最大公因数是 27，最小公倍数是 81．

【解析】(1) 一般求两数的最大公因数和最小公倍数，用短除法，

(2) 成倍数关系的两个数，最大公因数是较小数，最小公倍数是较大数．

【总结】本题考察了求两个数的最大公因数和最小公倍数的方法．

【例 78】求下列各组数的最大公因数和最小公倍数．

(1) 4、8 和 12；

(2) 15、75 和 90．

【难度】★

【答案】(1) 4，8，12 的最大公因数是 4，最小公倍数是 24；

(2) 15，75，90 的最大公因数是 15，最小公倍数是 450．

【解析】均用短除法或分解素因数法等可求得；

【总结】本题考察了求三个数的最大公因数和最小公倍数的方法．

【例 79】如果甲数 $= 2 \times 3 \times 5$ ，乙数 $= 2 \times 3 \times 7$ ，那么甲数与乙数的最大公因数是_____，最小公倍数是_____．

【难度】★

【答案】6， 210；

【解析】最大公因数是： $2 \times 3 = 6$ ；最小公倍数是： $(2 \times 3) \times 5 \times 7 = 210$ 。

【总结】本题考察了用分解素因数法求两个数的最大公因数和最小公倍数。

【例 80】已知甲、乙两数的最大公因数是 3，最小公倍数是 30，甲数是 6，乙数是多少？

【难度】★★

【答案】15

【解析】设另一个数是 x ，

则： $6x = 3 \times 30$

解得： $x = 15$

答：乙数是 15。

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数和它们乘积的关系：两个数的最小公倍数与最大公倍数的乘积等于这两个数的乘积。

【例 81】判断下列说法是否正确，对的打“√”，错的打“×”，并说明理由。

(1) 两个数的公倍数的个数是有限的。 ()

(2) 30 是 15 和 10 的最小公倍数。 ()

(3) 如果较大数能被较小数整除，那么较小数就是这两个数的最大公因数，较大数就是这两个数的最小公倍数。 ()

(4) 不相同的两个数的最小公倍数一定比它们的最大公因数大。 ()

【难度】★★

【答案】(1) ×；(2) √；(3) √；(4) √。

【解析】(1) 错误，两个数的倍数就是这两个数最小公倍数的倍数，有无限个；

(2) 正确；

(3) 正确；

(4) 正确；

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数的相关概念。

【例 82】两个数的最大公因数是 4，最小公倍数是 252，其中一个数是 28，另一个是多少？

【难度】★★

【答案】另一个数是 36。

【解析】设另一个数是 x ，则： $28x = 4 \times 252$ 。

解得： $x = 36$ 。

答：乙数是 36。

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数和它们乘积的关系：两个数的最小公倍数与最大公

倍数的乘积等于这两个数的乘积.

【例 83】先求出 8 和 10 的最大公因数和最小公倍数, 并把最大公因数和最小公倍数相乘, 再把 8 和 10 相乘, 你发现了什么?

请用你所发现的规律接下面的问题:

(1) 甲、乙两数的最大公因数是 3, 最小公倍数是 30, 已知甲数是 6, 那么乙数是多少?

(2) 甲、乙两数的最大公因数是 3, 最小公倍数是 90, 已知甲数是 18, 那么乙数是多少?

【难度】★★

【答案】8, 10 的最大公因数是 2, 最小公倍数是 40, 而 $8 \times 10 = 80$;

规律: 两个数的最小公倍数与最大公倍数的乘积等于这两个数的乘积.

(1) 15; (2) 15.

【解析】(1) 设另一个数是 x , 则: $6x = 3 \times 30$

解得: $x = 15$

答: 乙数是 15.

(2) 设另一个数是 x , 则: $18x = 3 \times 90$

解得: $x = 15$

答: 乙数是 15.

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数和它们乘积的关系: 两个数的最小公倍数与最大公倍数的乘积等于这两个数的乘积.

【例 84】已知两个数的最大公因数是 6, 最小公倍数是 144, 求这两个数的和是多少?

【难度】★★

【答案】120 或 66.

【解析】设这两个数是 $6a$, $6b(a, b$ 互素), 则: $6ab = 144$

$\therefore ab = 24 = 1 \times 24 = 3 \times 8$;

当 $a = 1$, $b = 24$, 这两个数是 6、144, 和为: $6 + 144 = 150$;

当 $a = 3$, $b = 8$, 这两个数是 18、48, 和为: $18 + 48 = 66$;

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数的相关概念.

【例 85】两个数的最小公倍数是 140, 最大公因数是 4, 且小数不能整除大数, 这两个数分别是多少?

【难度】★★

【答案】20 和 28

【解析】设这两个数是 $4a$, $4b(a, b$ 互素), 则: $4ab = 140$.

$\therefore ab = 35 = 1 \times 35 = 5 \times 7$, $\because$ 小数不能整除大数

$\therefore a = 5$, $b = 7$, 这两个数是 20、28.

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数的相关概念.

【例 86】在长 1.5 千米的公路一边，等距离种树（两端都种），开始每隔 10 米种一棵，后来改成每隔 12 米种一棵，不用改种的树有多少棵？

【难度】★★★

【答案】26 棵

【解析】1.5 千米=1500 米，
10 与 12 的最小公倍数是 60，
 $1500 \div 60 + 1 = 26$ 棵。

答：有 26 棵树不需要移动。

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数的应用。

【例 87】张三、李四、王五三位同学分别发出新年贺卡 x 、 y 、 z 张。如果已知 x 、 y 、 z 的最小公倍数为 60， x 和 y 的最大公因数为 4， y 和 z 的最大公因数为 3，那么张三发出的新年贺卡共有多少张？

【难度】★★★

【答案】20 或 4。

【解析】设 $x = 4a$ ， $y = 12b$ ， $z = 3c$ （ a ， b ， c 为素数），则 $12abc = 60$ 。

所以 $abc = 5 = 1 \times 1 \times 5$ 。

(1) $a = 5$ ，这三个数是 20，12，3；

(2) $b = 5$ ，这三个数是 4，60，3；

(3) $c = 5$ ，这三个数是 4，12，15；

答：张三发出的新年贺卡为 20 张或 4 张。

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数、最大公倍数的相关概念。

【例 88】甲、乙、丙三人绕操场竞走，他们走一圈分别需 1 分钟、1 分 15 秒、1 分 30 秒。问：三人同时从起点出发，多长时间后他们又在起点相会？（从起点出发后最近的一次相会）

【难度】★★★

【答案】15 分钟

【解析】1 分钟=60 秒，1 分 15 秒=75 秒，1 分 30 秒=90 秒；
60、75、90 的最小公倍数为 900，而 900 秒=15 分钟。

答：15 分钟后他们又在起点相会。

【总结】本题考察了两个数的最小公倍数的应用。

第六讲:

- 一、1、A 2、1, -1 3、-3, -143 18, 5, 100 -3, 18, -143, 0, 5, 100
二、4、D 5、C 6、D 7、18, 9 9, 18 8、1, 14, 2, 7
三、9、C 10、D 11、D 12、C
四、13、0, 2, 4, 6, 8 14、0 15、95, 10 16、偶数 17、奇数 18、30, 60, 90
五、 $18=2*3*3$ $27=3*3*3$ $54=2*3*3*3$ $108=2*2*3*3*3$
六、1、(1) 最大公因数 12, 最小公倍数 144 (2) 最大公因数 18, 最小公倍数 216
(3) 最大公因数 18, 最小公倍数 72 (4) 最大公因数 17, 最小公倍数 68
2、12 厘米, 144 平方厘米, 40 块
3、12 天
4、59
5、下午 3 点
6、4 个小组, 6 个男同学, 5 个女同学
7、7 人
8、(1) 1995 (2) 11 (3) 19 或者 25 (4) 48 人

第八讲答案

- 例 1、20, 例 2、 $\frac{9}{24}, \frac{6}{16}, \frac{36}{96}$ 等, 巩固练习: 1、3、27、6、75、20
例 4、 $\frac{6}{9}, \frac{4}{6}, \frac{2}{3}$ 等, 其中 $\frac{2}{3}$ 是最简分数, 例 5、 $\frac{7}{9}$, 例 6、(1) $\frac{6}{25}$, (2) $\frac{3}{8}$
巩固练习: 1、最简分数: $\frac{13}{17}, \frac{31}{81}$, 2、 $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}$, 3、 $\frac{5}{12}$ 4、 $\frac{13}{6}, \frac{1}{6}$ 5、9
6、(1) $\frac{3}{25}$ (2) $\frac{3}{80}$, 例 7、(1) $\frac{7}{18}$, (2) $\frac{31}{45}$

第九讲

- 例 1、(1) $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{1}{20}$; (2) 27, 16, 3, 36, 7, 9
例 2、<, <, >, 巩固练习: (1) $\frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{7}{13} < \frac{4}{7} < \frac{18}{19}$
(2) $\frac{10}{17} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23}$, <, (3) <, >, <, <, 例 3、(1) $\frac{8}{21}, \frac{8}{22}, \frac{8}{23}$, (2) $\frac{13}{60}, \frac{14}{60}$, 无数个
巩固练习: (1) $\frac{42}{50}, \frac{21}{25}$ (2) $\frac{18}{42}$ (3) $\frac{11}{60}$ 等 例 4、甲快, 巩固练习:
(1) $\frac{1}{9}, \frac{8}{9}$ (2) 5 (3) $\frac{8}{9}, \frac{7}{8}$ (4) $\frac{19}{70}, \frac{51}{70}$ (5) $\frac{5}{4}, \frac{4}{5}$ (6) $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}$

第十讲:

例 1、(1) $\frac{4}{7}, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{2}{3}, 0, \frac{7}{9}, \frac{1}{4}, \frac{15}{11}$ (2) $\frac{17}{5}, 4\frac{4}{7},$ (3) $2, 1\frac{2}{3}, 5, 2\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
(4) $10, 1\frac{4}{9}, 89\frac{11}{34}, 2\frac{5}{9}, 10\frac{1}{11}$

巩固练习:

1、 $1, \frac{2}{5}$ 2、 $4\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}$ 3、7 和 8 之间 4、 $<$, 5、 $\frac{24}{61}$ 6、 $\frac{1}{15}, \frac{1}{3}$
7、 $\frac{1}{6}, \frac{4}{3}$ 8、4, 5、 $12\frac{1}{60}$

二、选择题

B, B, D

三、略

四、(1) $\frac{29}{24}$ (2) $4\frac{17}{24}$ (3) $5\frac{19}{42}$ (4) $1\frac{5}{16}$ (5) $3\frac{19}{40}$
(6) $2\frac{5}{6}$

五、(1) $\frac{1}{5}$ (2) $2\frac{11}{12}$ 六、(1) $\frac{2}{3}$ (2) $1\frac{1}{60}$ (3) $\frac{2}{9}$

七、0.5 八、 $1\frac{3}{25}, 5\frac{3}{5}$

⑥ $\frac{5}{9}$.

⑦ 平均每分钟走 50 米, 平均每分钟走全程的 $\frac{1}{20}$.

第十一讲:

例 1、 $\frac{11}{12}, \frac{1}{3}, 1\frac{4}{7}, \frac{11}{15}, \frac{11}{10}, \frac{1}{2}$

例 2、 $\frac{4}{5}, 10\frac{7}{20}$

巩固练习:

(1) $1\frac{7}{8}$ (2) 6 (3) $2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{12}$ (4) $\frac{47}{8}, \frac{31}{6}$ (5) $\frac{3}{4}$ (6) 8 (7) 对 (8) 对 (9) 对 (10) 错 (11) B (12) C (13) A (14) $\frac{47}{80}, 9\frac{5}{14}, 8\frac{2}{3}, 3\frac{17}{24}, \frac{8}{15}, 43299$ (15) $\frac{1}{6}, \frac{19}{60}$ (16) $2\frac{1}{15}$ (17) $\frac{19}{30}$ (18) $9\frac{1}{11}$ (19) $\frac{9}{10}$

⑥ (1) $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} (n \geq 2, \text{且 } n \text{ 为整数});$ (2) $\frac{2004}{2005} < \frac{2005}{2006}.$

⑦ $\frac{15}{23}$ 最大, $\frac{10}{17}$ 最小.

⑧ $\frac{4567}{4587} < \frac{9876}{9896}.$

⑨ (1) $\frac{23}{51} > \frac{15}{34};$ (2) $\frac{33}{47} < \frac{55}{72};$ (3) $\frac{1001}{999} > \frac{10\,001}{9999}.$

第 12 讲 分数的乘法 答案

【练习一】计算：

$$(1) \frac{4}{7} \times 10\frac{1}{2} = \frac{4}{7} \times \frac{10 \times 2 + 1}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{13}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}.$$

$$(2) \frac{15}{14} \times 2\frac{1}{10} = \frac{15}{14} \times \frac{2 \times 10 + 1}{10} = \frac{15}{14} \times \frac{21}{10} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

$$(3) 1\frac{2}{5} \times 2\frac{1}{3} = \frac{7}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{7 \times 7}{5 \times 3} = \frac{49}{15} = 3\frac{4}{15}.$$

【练习二】列式计算：

$$(1) \frac{12}{5} \times \frac{7}{24} = \frac{\overset{1}{\cancel{12}}}{5} \times \frac{7}{\underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{7}{10} \text{ 小时； 答： } \frac{12}{5} \text{ 小时的 } \frac{7}{24} \text{ 是 } \frac{7}{10} \text{ 小时.}$$

$$(2) 2\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} \text{ 米； 答： } 2\frac{2}{5} \text{ 米的 } \frac{3}{4} \text{ 是 } 1\frac{4}{5}.$$

$$(3) \frac{5}{6} \times 4 = \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} \times \overset{2}{\cancel{4}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ 米； 答： 周长是 } 3\frac{1}{3} \text{ 米.}$$

$$(4) \frac{5}{6} \times 5 = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} \text{ 小时； 答： 五天共看电视 } 4\frac{1}{6} \text{ 小时.}$$

2.5 分数的乘法(2) ———含有带分数的分数乘法运算课后作业答案

1. 计算:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 2\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} &= \frac{8}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}; & (2) \quad 2\frac{5}{6} \times 1\frac{2}{3} &= 2\frac{5}{6} \times 1\frac{2}{3} = \frac{17}{6} \times \frac{5}{3} = \frac{85}{18} = 4\frac{13}{18}; \\
 (3) \quad \frac{3}{2} \times 1\frac{2}{3} &= \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}; & (4) \quad 2\frac{2}{3} \times 3\frac{3}{4} &= \frac{8}{3} \times \frac{15}{4} = 10; \\
 (5) \quad \frac{15}{14} \times 2\frac{1}{10} &= \frac{15}{14} \times \frac{21}{10} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}; & (6) \quad 1\frac{1}{5} \times \frac{7}{12} &= \frac{6}{5} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{10}.
 \end{aligned}$$

2. 列式计算:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} &= \frac{21}{32} \text{ 吨}; \text{ 答: } \frac{3}{4} \text{ 吨的 } \frac{7}{8} \text{ 是 } \frac{21}{32} \text{ 吨.} \\
 (2) \quad \frac{2}{6} \times \frac{2}{15} &= \frac{4}{15} \text{ 千克}; \text{ 答: } \frac{2}{6} \text{ 千克的 } \frac{2}{15} \text{ 是 } \frac{4}{15} \text{ 千克.} \\
 (3) \quad \frac{23}{10} \times \frac{2}{3} &= \frac{23}{15} = 1\frac{8}{15} \text{ 米}; \text{ 答: } \frac{23}{10} \text{ 米的 } \frac{2}{3} \text{ 是 } 1\frac{8}{15} \text{ 米.} \\
 (4) \quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} &= \frac{9}{25} \text{ 厘米}; \text{ 答: } \frac{3}{5} \text{ 厘米的 } \frac{3}{5} \text{ 是 } \frac{9}{25} \text{ 厘米.} \\
 (5) \quad \frac{5}{6} \times \frac{4}{7} &= \frac{10}{21} \text{ 平方米}; \text{ 答: 它的面积是 } \frac{10}{21} \text{ 平方米.}
 \end{aligned}$$

第 13 讲 分数的除法

【练习】求下列各数的倒数.

$$(1) \quad 7; \quad (2) \quad \frac{3}{8}; \quad (3) \quad \frac{5}{2}; \quad (4) \quad 2\frac{2}{3}; \quad (5) \quad 0.7.$$

解: (1) 把 7 看做 $\frac{7}{1}$, 再把 $\frac{7}{1}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{1}{7}$; 所以, 7 的倒数是 $\frac{1}{7}$.

(2) 把 $\frac{3}{8}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{8}{3}$; 所以, $\frac{3}{8}$ 的倒数是 $\frac{8}{3}$.

(3) 把 $\frac{5}{2}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{2}{5}$; 所以, $\frac{5}{2}$ 的倒数是 $\frac{2}{5}$.

(4) 把 $2\frac{2}{3}$ 先化成假分数 $\frac{8}{3}$, 再把 $\frac{8}{3}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{3}{8}$; 所以, $2\frac{2}{3}$ 的倒数是 $\frac{3}{8}$.

(5) 把 0.7 先化成分数 $\frac{7}{10}$, 再把 $\frac{7}{10}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{10}{7}$; 所以, 0.7 的倒数是 $\frac{10}{7}$.

2.6 分数的除法（1）———倒数课后作业答案

1. 求下列各数的倒数.

- (1) 1; (2) 5; (3) 4; (4) 12.

解: (1) $1 \div 1 = 1$, 所以, 1 就是 1 的倒数.

(2) $1 \div 5 = \frac{1}{5}$, 所以, $\frac{1}{5}$ 就是 5 的倒数.

(3) $1 \div 4 = \frac{1}{4}$, 所以, $\frac{1}{4}$ 就是 4 的倒数.

(4) $1 \div 12 = \frac{1}{12}$, 所以, $\frac{1}{12}$ 就是 12 的倒数.

2. 求下列各数的倒数.

- (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{11}{7}$; (3) $\frac{5}{8}$; (4) $\frac{3}{2}$.

解: (1) 因为 $\frac{1}{3} \times 3 = 1$, 所以 $\frac{1}{3}$ 的倒数是 3.

(2) 因为 $\frac{11}{7} \times \frac{7}{11} = 1$, 所以 $\frac{11}{7}$ 的倒数是 $\frac{7}{11}$.

(3) 因为 $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} = 1$, 所以 $\frac{5}{8}$ 的倒数是 $\frac{8}{5}$.

(4) 因为 $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$, 所以 $\frac{3}{2}$ 的倒数是 $\frac{2}{3}$.

3. 求下列各数的倒数.

- (1) $1\frac{1}{2}$; (2) $2\frac{3}{4}$; (3) $2\frac{1}{5}$; (4) $3\frac{3}{10}$.

解: (1) 把 $1\frac{1}{2}$ 先化成假分数 $\frac{3}{2}$, 再把 $\frac{3}{2}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{2}{3}$; 所以, $1\frac{1}{2}$ 的倒数是 $\frac{2}{3}$.

(2) 把 $2\frac{3}{4}$ 先化成假分数 $\frac{11}{4}$, 再把 $\frac{11}{4}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{4}{11}$; 所以, $2\frac{3}{4}$ 的倒数是 $\frac{4}{11}$.

(3) 把 $2\frac{1}{5}$ 先化成假分数 $\frac{11}{5}$, 再把 $\frac{11}{5}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{5}{11}$; 所以, $2\frac{1}{5}$ 的倒数是 $\frac{5}{11}$.

(4) 把 $3\frac{3}{10}$ 先化成假分数 $\frac{33}{10}$, 再把 $\frac{33}{10}$ 的分子和分母位置互换, 就是 $\frac{10}{33}$; 所以, $3\frac{3}{10}$ 的倒数是 $\frac{10}{33}$.

4. 求下列各数的倒数.

- (1) 0.2; (2) 0.5.

解：（1）把0.2先化成分数 $\frac{1}{5}$ ，再把 $\frac{1}{5}$ 的分子和分母位置互换，就是5；所以，0.2的倒数是5。

（2）把0.5先化成分数 $\frac{1}{2}$ ，再把 $\frac{1}{2}$ 的分子和分母位置互换，就是2；所以，0.5的倒数是2。

第十四讲 分数、小数的四则混合运算 练习答案

【知识点一】加减，乘除。

【练习一】

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{解：原式} &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \times \frac{14}{3} \\ &= \frac{2}{5} + 4 \\ &= 4\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{解：原式} &= 1\frac{1}{4} \div \left(\frac{12}{5} - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{10} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4} \div \left(\frac{24}{10} - \frac{5}{10}\right) + \frac{11}{20} \\ &= \frac{5}{4} \div \frac{19}{10} + \frac{11}{20} \\ &= \frac{5}{4} \times \frac{10}{19} + \frac{11}{20} \\ &= \frac{25}{38} + \frac{11}{20} \\ &= \frac{250}{380} + \frac{209}{380} \\ &= \frac{459}{380} = 1\frac{49}{380}. \end{aligned}$$

【知识点二】

$$1. \quad b+a \quad 2. \quad (b+c) \quad 3. \quad b \times a \quad 4. \quad (b \times c) \quad 5. \quad b; c$$

【练习二】

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{解：原式} &= 12 \times \frac{5}{6} + 12 \times \frac{11}{24} \\ &= 10 + \frac{11}{2} \\ &= 10 + 5\frac{1}{2} \\ &= 15\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{解：原式} &= \frac{3}{4} \times \frac{7}{12} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{7}{16} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{48} - \frac{8}{48} \\ &= \frac{13}{48}. \end{aligned}$$

2.8 分数、小数的四则混合运算(2) ———混合运算、分配律课后作业答案

$$\begin{aligned} 1. (1) \text{ 解: 原式} &= \frac{15}{16} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} - \frac{2}{8} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解: 原式} &= 2 \times \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} \\ &= 2\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 解: 原式} &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{6}{15} - \frac{5}{15} \right) + \frac{7}{8} \times 2 \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{15} + \frac{7}{4} \\ &= \frac{1}{20} + \frac{7}{4} \\ &= \frac{1}{20} + \frac{35}{20} \\ &= \frac{36}{20} \\ &= \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 解: 原式} &= \left(\frac{11}{5} + \frac{1}{10} \right) + \frac{2}{3} \times \frac{69}{10} \\ &= \left(\frac{22}{10} + \frac{1}{10} \right) + \frac{23}{5} \\ &= \frac{23}{10} + \frac{23}{5} \\ &= \frac{23}{10} + \frac{46}{10} \\ &= \frac{69}{10} \\ &= 6\frac{9}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (1) \text{ 解: 原式} &= \frac{4}{5} \times \left(\frac{15}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{15}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= 6 + \frac{1}{5} \\ &= 6\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解: 原式} &= \frac{11}{2} \times \frac{25}{33} - \frac{11}{2} \times \frac{5}{22} \\ &= \frac{25}{6} - \frac{5}{4} \\ &= \frac{50}{12} - \frac{15}{12} \\ &= \frac{35}{12} \\ &= 2\frac{11}{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 解: 原式} &= \frac{5}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{5}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{6}{12} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 解: 原式} &= \left(\frac{9}{24} - \frac{4}{15} \right) \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{9}{24} \times \frac{3}{2} - \frac{4}{15} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{9}{16} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{45}{80} - \frac{32}{80} \\ &= \frac{13}{80}. \end{aligned}$$

16 分数的混合运算

1. (1) $\frac{103}{60}$; (2) $\frac{13}{40}$ 或0.325; (3) $\frac{71}{200}$ 或0.355; (4) $\frac{1}{12}$.	2. (1) $\frac{2}{5}$; (2) $\frac{3}{5}$; (3) $\frac{3}{32}$; (4) $\frac{7}{10}$.	3. (1) $\frac{1}{12}$; (2) $\frac{5}{12}$; (3) $9\frac{4}{5}$; (4) $\frac{10}{3}$.	4.D	5. 乙 数 是 $\frac{143}{3}$ 或 $47\frac{2}{3}$.
6. $\frac{115}{24}$	7. 实际游玩 时 间 $7\frac{2}{3}$ 小 时.	8. (1) 2; (2) $\frac{27}{10}$.	9. 372.	10. $\frac{21}{500}$
11. $\frac{27}{16}$	12. (1) $11\frac{4}{5}$; (2) $1\frac{2}{3}$; (3) $\frac{1}{2}$.	13. (1) 1; (2) 7.	14. 54	15.21