初二数学精编教案

目　录

第一讲　二次根式的概念及性质

【知识要点】

1. 二次根式的概念：形如$\sqrt{a}$（a≥ 0）的代数式，叫做二次根式，a 是被开方数.

举例说明：$\sqrt{2}$、$\sqrt{a^2+1}$、$\sqrt{b^2-4ac}(b^2-4ac\geq 0)$等都是二次根式. 在实数范围内，负数没有平方根，所以像$\sqrt{-2}$，$\sqrt{b}(b<0)$这样的式子没有意义，二次根式有意义的条件是被开方数是非负数.

2. 二次根式的两个性质：1）$(\pm\sqrt{a})^2=a\ (a\geq 0)$

2）即 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$

3. 最简二次根式、同类二次根式

（1） 最简二次根式概念

1） 被开方数中各因式的指数都为 1；

2） 被开方数不含分母.

同时符合上述两个条件的二次根式，叫做最简二次根式.

举例说明：如$\sqrt{3ab}$、$\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2+y}$、$\sqrt{6m(a^2+b^2)}$等都是最简二次根式.

（2）注意掌握化简二次根式的两个基本步骤，即先将二次根式中的分母化去，再把二次根式中所含的完全平方因式移到根号外；在化简二次根式时，要注意判断根号内字母的取值范围，从而正确化简.

（3）几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式。

【典型例题】

★例 1、 x为何值时，下列各式在实数范围内才有意义：

（1）$\sqrt{6-x}$　（2）$\sqrt{x^2+3}$　（3）$\dfrac{\sqrt{3-x}}{3-|x|}$

（4）$\sqrt{2x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{-2x+5}}$　（5）$\dfrac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x}-1}$　（6）$\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$

★★例 2、写出下列各等式成立的条件：

（1）$\sqrt{9x^2}=-3x$（2）$\sqrt{m^3n^2}=-mn\sqrt{m}$

（3）$\sqrt{(2a+1)^2}=1+2a$（4）$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{1-x}$

（5）$\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{4-4x+x^2}=7$

★★例 3.化简下列各式：

（1）$\sqrt{(3-\pi)^2}$（2）$a^2\sqrt{\frac{m}{a}}\,(m<0)$

（3）$\sqrt{(2-x)^2}+|2-x|+\sqrt{x^2-6x+9}\ (2<x<3)$

（4）$\sqrt{(3x-1)^2}$（5）$(x-y)\sqrt{\frac{1}{y-x}}+\sqrt{x^2-2xy+y^2}$

（6）$\sqrt{4x^2y^2+12x^4y^2}\ (y<0)$（7）$\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}$

★★★例 4、把根号外的因式移至根号内：

（1）$2\sqrt{5}$（2）$-5\sqrt{a}$（3）$m\sqrt{n}\left(m\ge 0\right)$

（4）$x\sqrt{y}\left(x\le 0\right)$（5）$a\sqrt{-\frac{1}{a}}$

★★例 5、（1）已知：$y-1=\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}}{3}$，求 $x+2y$ 的值.

（2）如果 $\sqrt{2x+y}+\left|x-2y\right|=0$，求 x^2+y^2 的值.

★★例 6、把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{12}$（2）$\sqrt{45a^2b}$（3）$4\sqrt{1\frac{1}{2}}$；（4）$x\sqrt{\frac{y}{x^3}}$

（5）$\sqrt{0.8}$；（6）$\sqrt{4\frac{1}{2}}$；（7）$\sqrt{\frac{20a^2b}{c}}$；（8）$x^2\sqrt{\frac{1}{8x^3}}$

★★例 7、判断下列各等式是否成立，若不成立请说出正确的解法和答案。

（1）$\sqrt{16+9}$ =4＋3;（2）$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$；（3）$\sqrt{4\frac{1}{2}}$ =$2\sqrt{\frac{1}{2}}$；（4）$2\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{2}{9}\sqrt{5}$

★例 8. 计算

1．(1) $3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$　　(2) $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$

（3）$\frac{2}{3}\sqrt{9m}+\frac{3}{4}\sqrt{16m}$ （4）$\sqrt{50(p-q)}+\sqrt{\frac{8}{p-q}}$

（5）$\frac{2x}{3}\sqrt{18x}+x^{2}\sqrt{\frac{32}{x}}-6x\sqrt{\frac{x}{8}}$ （6）$\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$

（7）$\sqrt{2x}-\sqrt{8x^{3}}+2\sqrt{2xy^{2}}\ (y>0)$ （8）$\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{2}{a}\sqrt{a^{3}b}\right)-\left(3b\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{9ab}\right)$

$(b>0)$

★2. 解下列方程和不等式

（1） $\sqrt{75}-\frac{5}{4}x=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{12}}-3x$ （2）$\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{3}(x+\sqrt{2})<\frac{1}{6}(x-\sqrt{98})+3$

3．(1) 已知：$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 $x^{3}y+xy^{3}$ 的值.

★★★例 9、计算：

（1）$\sqrt{(-8)^{2}-4\times(-4)}$；（2）$\sqrt{25m^{4}+225m^{2}}$；

★★★例 10、已知 m 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分，求 $\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}-2}$ 的值。

★★★例 11、化简

（1）$\sqrt{(1-x)^2}-\sqrt{x^2-8x+16}$ （2）$\frac{1}{2}\sqrt{32x^3}+2x\sqrt{\frac{x}{2}}-x^2\sqrt{\frac{50}{x}}$

（3）$\sqrt{4a-4b}+\sqrt{(a-b)^3}-\sqrt{a^3-a^2b}(a>0)$

★★例 2、已知 $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-3}+1=y$, 求 $\frac{y}{x}$ 的值。

★★★例 3、若 x, y 满足 $|x+y-7|+3\sqrt{2x+\frac{1}{2}y-8}=0$, 求 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的值。

★★★例 4、在⊿ABC 中，a,b,c 是三边长，化简 $\sqrt{(a-b+c)^2}-2|c-a-b|$

★★例 5、 m 为何值时，最简二次根式 $2\sqrt{m^2-7}$ 与 $4\sqrt{8m+2}$ 是同类二次根式？

★★★例 6、（1）已知 $\sqrt[a+b]{4b}$ 与 $\sqrt{3a+b}$ 是同类二次根式，则 a,b 的值是（）

A. $a=0,b=2$　B. $a=1,b=1$　C. $a=0,b=2$ 或 $a=1,b=1$　D. $a=2,b=0$

（2） m 为何值时，二次根式 $4\sqrt{\frac{2-m}{6}}$ 与 $6\sqrt{\frac{2m-3}{4}}$ 是同类二次根式？

第二讲　二次根式的运算

【知识要点】

1、分母有理化：把分母中的根号化去，叫做分母有理化。分母有理化的方法，一般是把分子和分母乘以同一个适当的代数式，使分母不含根号。

2、互为有理化因式：两个含有二次根式的代数式相乘，如果他们的积不含有二次根式，我们就说这两个含有二次根式的代数式互为有理化因式.

3、合并同类二次根式：通过整式的加减归结为合并同类项，类比得到二次根式的加减也归结为合并同类二次根式。

4、二次根式的相加减的一般过程：先把各个二次根式化成**最简二次根式**，再把同类二次根式分别合并。

5、二次根式的乘法法则：两个二次根式相乘，被开方数相乘，根指数不变。

6、二次根式除法法则：两个二次根式相除，被开方数相除，根指数不变。

【典型例题】

例1.　★填空：

1. $\sqrt{2a-b}$ 的有理化因式可以是 _________；$\sqrt{2a}-b$ 的有理化因式可以是 __

$\sqrt{a^2-b^2}$ 的有理化因式可以是 ________；$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ 的有理化因式可以是

2．$2-\sqrt{5}$ 的绝对值是________，倒数是_________.

★例 2.分母有理化：

（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$　　（2）$\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$　　（3）$\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\ (m\neq n)$

（4）$\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$　　（5）$\dfrac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$　　（6）$\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$

★★例 3、计算

(1) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$　　(4) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

★★★例 4、比较大小 $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ **与** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

★★例 5、当 $x=2-\sqrt{3}$ 时，求 $(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$ 的值。

★★例 6、先化简，再求值： $2a\sqrt{3ab^3}-\dfrac{b}{6}\sqrt{27a^3b^3}+2ab\sqrt{\dfrac{3}{4}ab}$，其中 $a=\dfrac{1}{9},b=3$。

★★★★例 7、计算：$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}}\right)\left(\sqrt{2005}+1\right)$

★★★例 8、已知 $a=\sqrt{2}-1$，先化简 $\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}+\dfrac{a-1}{a^2-2a+1}+\dfrac{4a^2-16}{a^2-4a+4}\div\dfrac{4a^2+8a}{a-2}$，再求值。

★★★例 9、已知：$a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，求$\dfrac{a^2-b^2}{2a+2b}$的值。

★★★例 10、已知：$a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，求代数式$\sqrt{a^2-3ab+b^2}$的值。

★★例 11、化简

（1）$4\sqrt{\dfrac{y^2}{x}}+6\sqrt{\dfrac{y^2}{9}}-(7\sqrt{x}+5\sqrt{x^2})$

（2）$(\sqrt{3a}-3\sqrt{27a^3})\div\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

★★★例 12、计算及化简：

（1）$\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$

（2）$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

★★★例 13、计算$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

★★★例 14、计算$(2\sqrt{2}-3)^{2011}(2\sqrt{2}+3)^{2011}$

★★★★例 15、计算（1）$5\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ （2）$\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ （3）$\sqrt{8+\sqrt{48}}$

★★★例 16、比较大小 $\sqrt{5}+\sqrt{11}$ 与 $\sqrt{6}+\sqrt{10}$

★★例 17、当 x 取何值时，$\sqrt{9x+1}+3$ 的值最小，最小值是多少？

★★★例 18、已知 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$，求 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+14}$ 的值。

★★★例 19、已知 $\dfrac{x-b}{a}=2-\dfrac{x-a}{b}$，其中 a,b 是实数，且 $a+b\neq 0$，化简并求值：

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

★★例 20、若 x,y 为实数，且 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}+1}{x+2}$，求 $\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x-y}$ 的值.

★★★例 21、已知：$x+y=-5, xy=4$，求 $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 的值.

第三讲 一元二次方程的概念与解法

【知识要点】

一、一元二次方程概念

1．一元二次方程属于“整式方程”，其次，它只含有一个未知数，并且都可以化为 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 为常数，a≠0）的形式.

2．一元二次方程的一般形式为 $ax^2+bx+c=0$（a≠0），一元二次方程的项及系数都是根据它的一般形式定义的，这与多项式中的项、次数及其系数的定义是一致的.

例：把方程 $3x(x-1)=2(x-2)-4$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

二、一元二次方程的解法

1．开平方法；如：$\frac{1}{2}(3x+1)^2=3$

2．因式分解法；如：$3x^2-2x-1=0$；$x(x-2)=5x-10$

3．配方法；如：$x^2-200x+9996=0$

4．公式法；如：$\sqrt{5}x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$

三．根的判别式

根的判别式：对于一元二次方程：$ax^2+bx=c=0$（a≠0）

根的判别式：$\triangle=b^2-4ac$

①$\triangle>0\Leftrightarrow$有两个不相等的实数根；

②$\triangle=0\Leftrightarrow$有两个相等的实数根；以上两种合并为$\triangle\geqslant0\Leftrightarrow$有两个实数根

③$\triangle<0\Leftrightarrow$没有实数根

【典型例题】

★例题 1.

1、关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+(2k+1)x+1=k^2$ 有一个根是零，求 k 的值，并求出这个一元二次方程。

★例题 2、用合适的方法解下列一元二次方程：

1）$(x-1)^2=49$　　**2）**$25-(x+2)^2=0$　　**3）**$x^2-4x+4=0$

4） $x^2+2x-3=0$　　**5）** $3x^2-2x-5=0$　　**6）** $-x^2+6x+16=0$

7） $5x^2-x-6=0$　　**8）** $6x^2-x-12=0$　　**9）** $x^2-4x-3=0$

10） $x^2-2x-1=0$　　**11）** $x^2-3x+6=0$　　**12）** $2x^2-6x-1=0$

13） $4(x-2)^2-(3x-1)^2=0$　　**14）** $(2x-1)^2+3(2x-1)+2=0$

★例题 3. 请判别下列一元二次方程根的情况：

1） $2x^2+3x+7=0$　　**2）** $\frac{1}{4}x^2-3x+9=0$　　**3）** $x^2+4ax-1=0$

4） $x^2+x+1=0$　　**5）** $x^2-4x+4=0$　　**6）** $x^2-x-1=0$

★★例题 4. 解答题

（1） 证明：关于x的方程$x^2+2mx+m-4=0$总有两个不相等的实数根。

（2） 如果a、b、c是三角形的三条边，请说明关于x的方程$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$一定没有实数根。

（4）已知关于x的方程$2x^2-2x+3m-4=0$有实数根，请化简$\sqrt{m^2-8m+16}-\sqrt{m^2-4m+4}$。

★练习：

1、当m________时，关于x的方程$mx^2-3x=x^2-mx+2$是一元二次方程；

2、方程$(2x+1)(x-3)=x^2+1$化为一般式为________________，二次项系数是________，一次项是________，常数项是________；

3、已知方程$2x^2+mx-1=0$的一个根是 3，则$m=$________；

4、已知方程$ax^2+bx+c=0$

（1）若有且只有一个根为零，则a________，b________，c________；

（2）若有两个根都为零，则a________，b________，c________；

5、方程$-\sqrt{2}x^2=0$的解是____________；

6、如果代数式x^2-x与$2x-3$的值相等，那么x________；

7、用合适的方法解方程

（1）$x^2+7x+3=0$；　　（2）$2x^2-5x+1=0$；

（3）$x^2-4x-21=0$；　　（4）$x^2+3x+1=0$；　　（5）$3x^2+6x-1=0$

（6）$x(x-3)-\sqrt{2}(x-3)=0$；　　（7）$3(x+1)^2+x+1=0$；　　（8）$6(x-2)^2+x=2$；

（9）$x^2-2mx=n(m^2+n\geq 0)$；　　（10）$x^2+mx+n=0(m^2\geq 4n)$

第四讲　一元二次方程的应用及复习

【知识要点】

实数范围内因式分解：

对于二次三项式$\mathrm{ax^2+bx+c}$而言：

设$ax^2+bx=c=0$，①当$\mathrm{b^2-4ac<0}$时，$\mathrm{ax^2+bx+c}$不能实数范围内因式分解；

②$\mathrm{b^2-4ac\ge 0}$时，$\mathrm{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$，$\mathrm{x_1}$、$\mathrm{x_2}$是方程$ax^2+bx=c=0$的两根；

特别地，当$\mathrm{b^2-4ac=0}$时，$\mathrm{ax^2+bx+c}$可化为含完全平方式的形式.

【典型例题】

★例题 1、因式分解：

1） $x^2+2x-15$　　**2）** x^2-15　　**3）** $3y^2+2y-1$

5） x^2-x-1　　**5）** y^2+4y-7　　**6）** a^2+3a-1

★★请用两种方法进行因式分解：

7） $x^2-6xy-3y^2=0$　　**8）** $2x^2y^2-4xy-8=0$

★例 2.（1）要建一个面积为 140 平方米的长方形仓库，仓库的一边靠墙，这堵墙长 16 米；在与墙平行的一边，要开一扇 2 米宽的门。已知围建仓库的现有木板材料可使新建板墙的总长为 32 米，那么这个仓库设计的长和宽分别应是多少？

（2）老同学聚会，设每人与其他人握手一次，共握手 66 次，则一共有多少人？

★★★【复习巩固】

一、选择题：

1、 下列方程中，是一元二次方程的是………………………………………（ ）

（A） 2x+y=5 （B）2x（1-x）=5 （C） $x+\frac{1}{x}=2$ （D） x(x+1)=(x+1)(x-1)

2、判断 x=5 不是下列哪一个一元二次方程的根……………………………………（ ）

（A）$x^2-20=x$ （B）$10x-15=x^2+2x$ （C） $x^2+2x=12+x$ （D） $x^2=5x$.

3、当 m 为何值时，关于 x 的方程（m^2-1）x^2+mx-2=0 是一元二次方程？…………

（ ）

（A） m=1 （B） m= -1 （C） m=±1 （D） m ≠ ±1

二、填空题：

1.若 $x=-1$ 是一元二次方程 $ax^2-bx-8=0$ 的根，则 $a+b=$________.

2.方程 $(x-1)^2=x-1$ 的根是___________.

3.解方程: $2x(2x+5)-(x-1)(2x+5)=0$ 得____________________________.

4.因式分解： $4x^4-36=$__________________; $5x^2+2xy-y^2=$__________________.

5.一种运动鞋每双原价 200 元，经过两次降价每双 128 元，则平均每次降价的百分比是___________.

三、解方程：

(1) $(3x-2)^2=5$

（2）$2x^2-5x+10=0$

（3）$(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$

（4）$(x-1)^2-4(x-1)+4=0$

四、在实数范围内分解因式：

（1）$9x^4-4$ （2）x^2-2x-4

（3）$4x^2+7x-2$ （4）x^2-3x-5

（5）$4x^2-x-1$ （6）$2a^2-4a+1$

五、解答题：

1、请说明关于 x 的方程 $(1-m)x^2+2x=1$ 是一个怎样的方程？

2、若 a 是方程 $x^2-x-1=0$ 的一个根，求代数式 a^3-2a+3 的值。

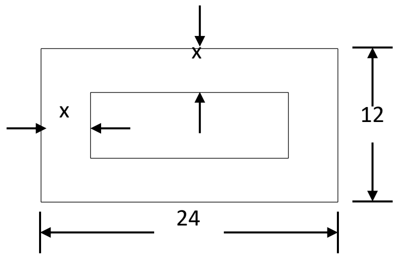
六．解答题

1、已知 x,y 为实数，且 $(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)=20$，求 x^2+y^2 的值。

2、已知等腰三角形的两条边 a、b 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+12=0$ 的两个根，另一条边 c 的长是方程 $x^2-16=0$ 的一个根，求 m 的值。

3、某厂今年产值 400 万元，计划两年后产值将达到 625 万元，若每年的产值增长率相同，求增长率。

4、如图，园林工人要在一块长 24 米，宽 12 米 的矩形土地中砌一个小矩形花坛，四周铺上草，其宽都相等，花坛占矩形土地面积的 $\frac{5}{9}$，求草地的宽



5、某种时装，平时每天销售 20 件，每件盈利 40 元，若每件降价 1 元，则每天可多售出 5 件，如果每天要盈利 1920 元，求每件降价几元？（每件降价不得超过 20 元）

第五讲　　正比例函数

【知识要点一】

一. 常量与变量：

1. 概念;在某一变化过程中，我们称数值发生变化的量为变量，有些量的数值始终不变，我们称它们为常量.

二：函数的概念

1. 概念：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是 x 的函数.

2. 注意：①两个变量 x 与 y②对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应③一个变量的数值随着另一个变量的数值变化而变化

三. 自变量的取值范围的确定

1. 自变量的取值必须使含自变量的代数式（数学式子）有意义

① 整式：全体实数

② 分式：分母不等于 0

③ 二次根式下含自变量：开偶数次方中的被开方数必须大于等于 0。

④ 有分式也有二次根式下含自变量：两个的公共部分

2. 当函数解析式表示实际问题时，自变量的取值必须使实际问题有意义

3. 注意: 自变量的取值范围可以是有限也可以是无限，可以是一个或几个数

4. 有的要列不等式或不等式组来求

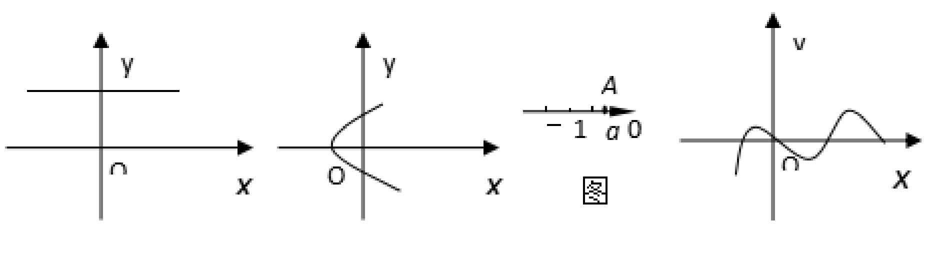
【典型例题】

★★例 1.

1. 下列函数中，不是函数关系的是（　　）

A, $y=\sqrt{x}$（x>0）；　B，$y=\sqrt{-x}$（x<0）　C, $y=\pm\sqrt{x}$（x>0）；　D,　$y=-\sqrt{x}$（x>0）；

2、下列各图象中，y 不是 x 函数的是　　　（　　　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

3、在函数 $y=\frac{\sqrt{x+2}}{3x}$中, 自变量的取值范围是(　　)

A、x≥-2 且 x≠0；　B、x≤2 且 x≠0；　C、x≠0；　D、x≤-2；

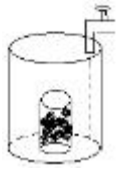
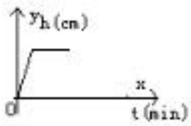
4. 如果函数 y=-2x+3 的自变量取值范围是-1<x≤2, 那么函数的取值范围是__________.

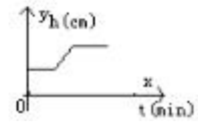
5. 在⊿ABC 中,内角∠B，∠C 的平分线相交于 O 点，若∠A＝x°，∠BOC＝y°，则 y 与 x 之间的函数关系式为__________

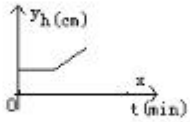
6、长方形相邻两边长分别为 x、y ，面积为 10 ，则用含 x 的式子表示 y 为____________，则这个问题中，_______常量；______是变量.

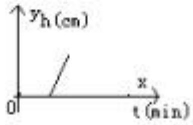
7. 出租车的收费按路程计算 2km 内（包含 2km）收费 3 元，超过 2km 每增加 1km 加收 1 元，则路程 x≥2 时，车费 y(元)与 x 之间的函数关系式是_____________.

8、将一盛有部分水的圆柱形小水杯,放入事先没有水的大圆柱形容器内，现用一注水管沿大容器内壁匀速注水（如图所示），则小水杯内水面高度 h(cm)与注水时间 t(min)的函数图像大致为（　　）


A、

；B、

；C、

D、

；

9、当 x=_____时，函数 y=3x-2 与函数 y=5x+1 有相同的函数值。

10、若点 A（m，2）在函数 y=2x－6 的图象上，则 m 的值为_________。

【知识要点二】

1、正比例

如果两个变量的每一组对应值的比值是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成正比例。用数学式子表示两个变量 x、y 成正比例，就是 $\dfrac{y}{x}=k$ 或者 $y=kx$，其中，k 是不为零的常数。

2、正比例函数

定义域是一切实数的函数 $y=kx$（k 是不为零的常数）叫做正比例函数。其中常数 k 叫做比例系数。确定了比例系数，就可以确定一个正比例函数。

3、函数解析式

表示两个变量之间依赖关系的数学式子叫做函数解析式。

4、正比例函数的图像和性质

正比例函数 $y=kx$（k 是不为零的常数）的图像是经过原点（0，0）和点（1，k）的一条直线。当 $k>0$ 时，直线经过第一、三象限，自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值也随着逐渐增大；当 $k<0$ 时，直线经过第二、四象限，自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值则随着逐渐减小。

★【典型例题】

1. 已知 y=（k+2）x+k^2-4 是正比例函数，求 k 的值.

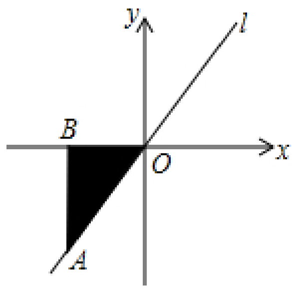
2、如果函数：$f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$，试求：（1）$f(a-1)$；　（2）$f(2a+1)$

3．已知 y 与 $x-1$ 成正比例，且当 $x=3$ 时，$y=4$，求：

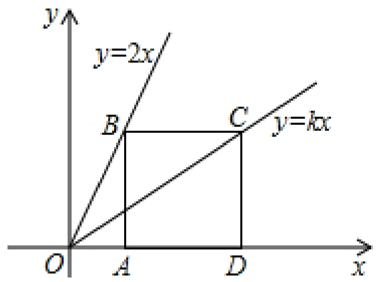
（1）函数解析式；（2）$x=-1$时，y 的值

4.已知直线 $y=kx$ 过点（-2，1），A 是直线 $y=kx$ 图象上的点，若过 A 向 x 轴作垂线，垂足为 B，且 $S_{\Delta ABO}$=9，求点 A 的坐标。

5．如图所示,B 的坐标为(-2,0）,AB 垂直 x 轴于点 B,交直线 l 于点 A,如果三角形 ABO 的面积为 3,求直线 l 的解析式.



6．如图所示,点 B、C 分别在两条直线 y =2 x 和 y =kx 上，点 A、D 是 x 轴上两点,已知四边形 ABCD 是正方形,求 k 的值.



★★★【复习巩固】

1、在△ABC 中，它的底边是 a，底边上的高为 h，则三角形的面积 $s=\frac{1}{2}ah$，当 h 为定长时，在在此关系式中（　　）

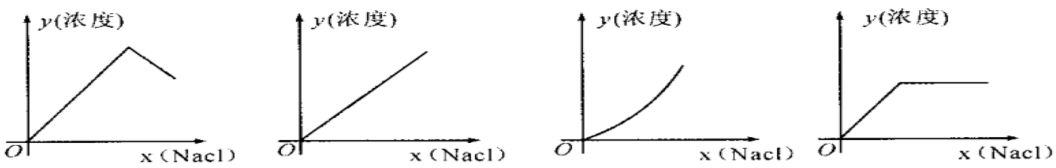
A. s、a 是变量，h、$\frac{1}{2}$ 是常量　　　　B. s、a、h 是变量，$\frac{1}{2}$ 是常量

C. h、a 是变量，s、$\frac{1}{2}$ 是常量　　　　D. s 是变量，a、h、$\frac{1}{2}$ 是常量

2、下列关于圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系式 $S=\pi r^2$ 中，有关常量与变量的说法正确的是（　　）.

（A）S、r^2 是变量，π 是常量　　　　（B）S、π、r 是变量，2 是常量

（C）S、r 是变量，π 是常量　　　　　　　　（D）S、r 是变量，π 和 2 是常量



3、已知圆柱的体积公式是 $V=\pi r^2h$，若 h 为常数，则在这个公式中，变量是（　　）

A. V、π　B. V、π、r　C. V、r　D. V、h

4、以固定的速度 v_0 向上抛一个小球，小球的高度 h 与小球的运动时间 t 之间的关系式是 $h=v_0t-4.9t^2$，在这个关系式中，变量、常量分别是（　　）

A．4.9 是变量，t、h 是变量　　　　B．v_0 是常量，t、h 是变量

C．v_0、-4.9 是常量，t、h 是变量　　　　D．4.9 是常量，t、h 是变量

5、n 边形的内角和 $s=(n-2)\cdot 180^\circ$，其中自变量 n 的取值范围是（　　）

A．全体实数　B．全体整数　C．$n \geqslant 3$　D．大于或等于 3 的整数

6、圆筒形水管的外径为 R，内径是 8，横截面积 S 是外径 R 的函数，$S=\pi(R^2-64)$，则 R 的取值范围是（　　）

A. 全体正数　B. 全体非负实数　C. 所有大于 8 的实数　D. 全体实数

7、函数 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 中，自变量 x 的取值范围是（　　）

（A）$x \neq 0$　（B）$x \neq 1$　（C）$x \neq -1$　（D）$x \neq -2$

8、下列函数中，自变量的取值范围为 x≥2 的是（　　）

A. $y=\sqrt{x+2}$　B. $y=\sqrt{x-2}$　C. $y=\dfrac{1}{x+2}$　D. $y=\dfrac{1}{x-2}$

9、下列函数中，自变量的取值范围选取错误的是（　）

A．$y=2x^2$ 中，x 取全体实数　　　　B．$y=\dfrac{1}{x+1}$ 中，x 取 x≠-1 的实数

C．$y=\sqrt{x-2}$ 中，x 取 x≥2 的实数　　D．$y=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 中，x 取 x≥-3 的实数

10、 某一天早晨，小强从家出发，以 v_1 的速度前往学校，途中在饮食店吃早点，之后，以 v_2 的速度向学校行进. 已知 $v_1 > v_2$，下面的图象（如图）中表示小强从家到学校的时间 t(分钟)与路程 s(千米)之间的是(　　)

11.已知正比例函数 y=2x 上有一点 A,过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 B，若△A0B 的面积为 6，求点 A 的坐标。

12.已知正比例函数 y=2x,点 A 在正比例函数图像上，点 A 的横坐标是 2，点 B 在 x 轴上，若△A0B 的面积为 6，求点 B 的坐标。

13.已知正比例函数 y=2x,点 A 在正比例函数图像上，点 A 的横坐标是 2，过点 A 作 x 轴的的垂线，垂足为点 B,点 C 在 x 轴上，若△ABC 的面积为 6，求点 C 的坐标。

14.已知直线 y=kx 过点（$-\frac{1}{2}$，3），A 为 y=kx 图像上的一点，过点 A 向 x 轴引垂线，垂足为点 B，$S_{\triangle AOB}$=5

(1) 求函数解析式

(2) 在直角坐标平面内画出函数图像；

(3) 求 A 点、B 点的坐标。

15.已知在正比例函数 f(x)=(2m-3) x^{2m^2-7} 中，y 随 x 的值减小而减小。

（A） 求 m 的值；

（B） 求 f($\frac{2}{3}$);

（C） 在直角坐标平面内画出函数图像，并根据图像说明，当 x 取何值时，$y \le -2$

第六讲　反比例函数

【知识要点】

- 反比例函数
  - 定义及表示形式
  - 图象和性质
    - 形状
    - 位置
    - 增减性
    - 对称性
  - 反比例函数与面积有关问题
    - 矩形
    - 三角形
  - 反比例函数与实际问题

（一）反比例函数的概念：

1、一般地，形如 y = $\frac{k}{x}$ （k 是常数, k = 0）的函数叫做反比例函数。

注意：（1）常数 k 称为比例系数，k 是非零常数；

（2）解析式有三种常见的表达形式：

（A）y = $\frac{k}{x}$（k ≠ 0），　（B）xy = k（k ≠ 0）　（C）$y=kx^{-1}$（k≠0）

★★【典型例题】有关反比例函数的解析式

（1）下列函数，① $x(y+2)=1$ ②. $y=\frac{1}{x+1}$ ③ $y=\frac{1}{x^2}$ ④. $y=-\frac{1}{2x}$ ⑤ $y=-\frac{x}{2}$ ⑥ $y=\frac{1}{3x}$；其中是 y 关于 x 的反比例函数的有：________________。

（2）函数 $y=(a-2)x^{a^2-2}$ 是反比例函数，则 a 的值是（　　）

A．－1　　B．－2　　C．2　　D．2 或－2

（3）若函数 $y=\frac{1}{x^{m-1}}$ (m 是常数)是反比例函数，则 m＝________，解析式为________.

（4）如果 y 是 m 的反比例函数，m 是 x 的反比例函数，那么 y 是 x 的（　　）

A．反比例函数　　B．正比例函数　　C．一次函数　　D．反比例或正比例函数

练习：（1）如果 y 是 m 的正比例函数，m 是 x 的反比例函数，那么 y 是 x 的（　　）

（2）如果 y 是 m 的正比例函数，m 是 x 的正比例函数，那么 y 是 x 的（　　）

（5）反比例函数 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 的图象经过（—2，5）和（$\sqrt{2}$，n），

求 1）n 的值；　2）判断点 B（$4\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$）是否在这个函数图象上，并说明理由

（6）已知 y 与 $2x$－3 成反比例，且 $x=\frac{1}{4}$ 时，y＝－2，求 y 与 x 的函数关系式.

（7）已知函数 $y=y_1-y_2$，其中 y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，且当 x ＝1 时，y ＝1；x ＝3 时，y ＝5．求：（1）求 y 关于 x 的函数解析式；（2）当 x ＝2 时，y 的值．

(二)反比例函数的图象和性质：

知识要点：

1、形状：图象是双曲线。

2、位置：（1）当 k>0 时,双曲线分别位于第________象限内；（2）当 k<0 时，双曲线分别位于第________象限内。

3、增减性：（1）当 k>0 时,__________________,y 随 x 的增大而________；

（2）当 k<0 时,__________________,y 随 x 的增大而______。

4、变化趋势：双曲线无限接近于 x、y 轴,但永远不会与坐标轴相交

5、对称性：（1）对于双曲线本身来说，它的两个分支关于直角坐标系原点____________；（2）对于 k 取互为相反数的两个反比例函数（如：y = $\frac{6}{x}$ 和 y = $\frac{-6}{x}$）来说，它们是关于 x 轴，y 轴___________。

★★【典型例题】反比例函数的图象和性质：

（1）写出一个反比例函数，使它的图象经过第二、四象限___________________________.

（2）若反比例函数 $y=(2m-1)x^{m^2-2}$ 的图象在第二、四象限，则 m 的值是（　　）

A、 －1 或 1；　B、小于 $\frac{1}{2}$ 的任意实数；　C、－1；　D、不能确定

（3）下列函数中，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大的是（　　）

A． $y=-3x+4$　B． $y=-\frac{1}{3}x-2$　C． $y=-\frac{4}{x}$　D． $y=\frac{1}{2x}$．

（4）已知反比例函数 $y=\frac{-2}{x}$ 的图象上有两点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），且 $x_1<x_2$，则 y_1-y_2 的值是（　　）

A．正数　B．负数　C．非正数　D．不能确定

（5）若点（x_1，y_1）、（x_2，y_2）和（x_3，y_3）分别在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上，且 $x_1<x_2<0<x_3$，则下列判断中正确的是（　　）

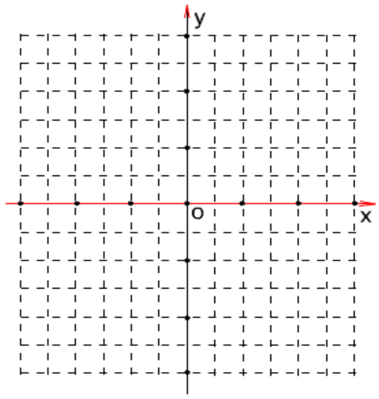
A． $y_1<y_2<y_3$　B． $y_3<y_1<y_2$　C． $y_2<y_3<y_1$　D． $y_3<y_2<y_1$

(6)在反比例函数 $y=\frac{k+1}{x}$ 的图象上有两点 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$，若 $x_1<0<x_2$ 时，

$y_1>y_2$，则 k 的取值范围是____________.

（7）老师给出一个函数,甲、乙、丙三位同学分别指出了这个函数的一个性质:
甲:函数的图象经过第二象限; 乙:函数的图象经过第四象限; 丙:在每个象限内,y 随 x 的增大而增大.请你根据他们的叙述构造满足上述性质的一个函数:_______.

（8）作出反比例函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象，结合图象回答：



(1)当 x＝2 时，y 的值；
(2)当 1＜x≤4 时，y 的取值范围；
(3)当 1≤y＜4 时，x 的取值范围.

（三）反比例函数与面积结合题型。

1、反比例函数与矩形面积：

若 $P(x，y)$为反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ (k≠0)图像上的任意一点如图 1 所示，过 P 作 PM⊥x 轴于 M，作 PN⊥y 轴于 N，求矩形 $PMON$ 的面积.

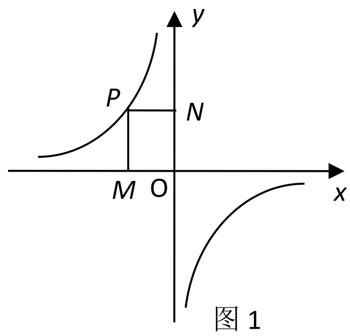


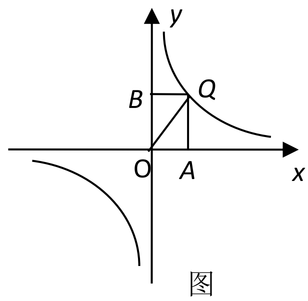
图 1

分析：$S_{矩形PMON}=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$

$\because y=\dfrac{k}{x}$， $\therefore$ xy=k， $\therefore$ $S=|k|$.

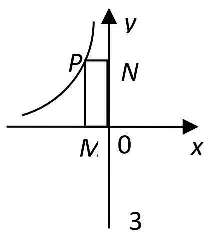
2、反比例函数与矩形面积：

若 $Q(x，y)$为反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ (k≠0)图像上的任意一点如图 2 所示，过 Q 作 QA⊥x 轴于 A(或作 QB⊥y 轴于 B)，连结 QO，则所得三角形的面积为：$S_{\triangle QOA}=\dfrac{|k|}{2}$（或 $S_{\triangle QOB}=\dfrac{|k|}{2}$）.说明：**以上结论与点在反比例函数图像上的位置无关.**



图

（1）如图 3，在反比例函数 $y=-\dfrac{6}{x}$（x＜0）的图象上任取一点 P，过 P 点分别作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足分别为 M、N，那么四边形 $PMON$ 的面积为_________.



3

（2） 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象如图 4 所示，点 M 是该函数图象上一点，MN⊥x 轴，垂足为 N.如果 $S_{\triangle MON}=2$，这个反比例函数的解析式为______________

(3)如图 5，正比例函数 $y=kx\ (k>0)$ 与反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象相交于 A、C 两点，过点 A 作 AB⊥ x 轴于点 B，连结 BC．则 ΔABC 的面积等于（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．随 k 的取值改变而改变.

（4）如图 6，*A*、*B* 是函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象上关于原点对称的任意两点，*BC*∥ x 轴，*AC*∥ y 轴，△*ABC* 的面积记为 S，则（　　）

A．$S=2$　　B．$S=4$　　C．$2<S<4$　　D．$S>4$

（5）如图 7，过 *y* 轴正半轴上的任意一点 *P*，作 *x* 轴的平行线，分别与反比例函数 $y=-\dfrac{4}{x}和y=\dfrac{2}{x}$ 的图象交于点 *A* 和点 *B*，若点 *C* 是 *x* 轴上任意一点，连接 *AC*、*BC*，则△*ABC* 的面积为　　　　（　　）

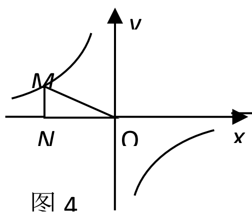


图 4

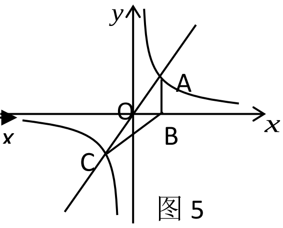


图 5

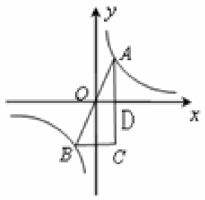
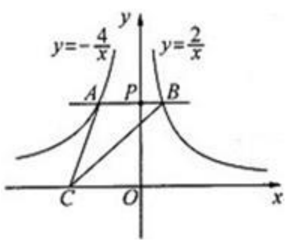


图 6

图 7


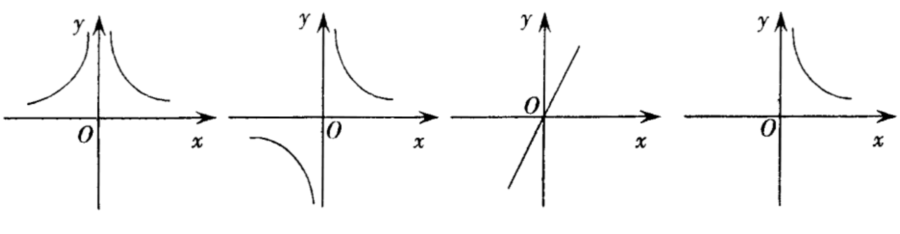
（四）反比例函数的应用：

★★★【典型例题】

1．一个水池装水 12 立方米，如果从水管中每小时流出 *x* 立方米的水，经过 *y* 小时可以把水放完，那么 *y* 与 *x* 的函数关系式是________，自变量 *x* 的取值范围是________.

2．三角形的面积为 6cm²，如果它的一边为 *y*cm，这边上的高为 *x*cm，那么 *y* 与 *x* 之间是________函数关系，以 *x* 为自变量的函数解析式为________.

3．长方体的体积为 40cm³，此长方体的底面积 *y*(cm²)与其对应高 *x*(cm)之间的函数关系用图象大致可以表示为下面的(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

4．下列各问题中两个变量之间的关系，不是反比例函数的是(　　).

(A)小明完成百米赛跑时，所用时间 *t*(s)与他的平均速度 *v*(m/s)之间的关系

(B)长方形的面积为 24，它的长 *y* 与宽 *x* 之间的关系

(C)压力为 600N 时，压强 *p*(Pa)与受力面积 *S*(m²)之间的关系

(D)一个容积为 25L 的容器中，所盛水的质量 *m*(kg)与所盛水的体积 *V*(L)之间的关系

5．在温度不变的条件下，通过一次又一次地对汽缸顶部的活塞加压，测出每一次加压后缸内气体的体积和气体对汽缸壁所产生的压强，如下表：

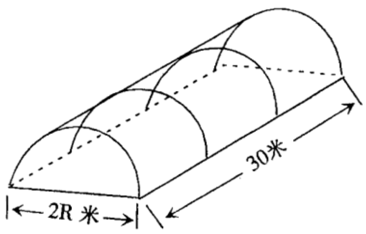
体积 x(ml)	100	80	60	40	20
压强 y(kpa)	60	75	100	150	300

则可以反映 y 与 x 之间的关系的式子是(　　).

(A)$y=3000x$　　(B)$y=6000x$　　(C) $y=\dfrac{3000}{x}$　　(D) $y=\dfrac{6000}{x}$

6．甲、乙两地间的公路长为 300km，一辆汽车从甲地去乙地，汽车在途中的平均速度为 V(km/h)，到达时所用的时间为 $t(h)$，那么 t 是 V________的函数，

V 关于 t 的函数关系式为________.



7．农村常需要搭建截面为半圆形的全封闭蔬菜塑料暖房(如图所示)，则需要塑料布 $y(m^2)$与半径 R(m)的函数关系式是(不考虑塑料埋在土里的部分)________.

8．有一面积为 60 的梯形，其上底是下底长的三分之一，若下底长为 x，高为 y，则 y 关于 x 的函数关系式是(　　).

(A) $y=\dfrac{45}{x}(x>0)$　　(B) $y=\dfrac{30}{x}(x>0)$　　(C) $y=\dfrac{90}{x}(x>0)$　　(D) $y=\dfrac{15}{x}(x>0)$

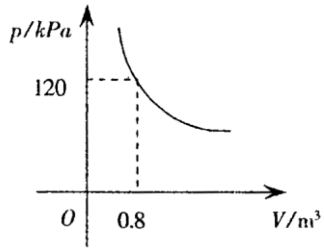
9．一个长方体的体积是 $100cm^3$，它的长是 y(cm)，宽是 5cm，高是 x(cm).

(1)写出长 y(cm)关于高 x(cm)的函数关系式，以及自变量 x 的取值范围；

(2)画出(1)中函数的图象；

(3)当高是 3cm 时，求长.

10．一个气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 p(kPa)是气体体积 $V(m^3)$的反比例函数，其图象如图所示.



(1)写出这一函数的解析式；

(2)当气体体积为 $1m^3$ 时，气压是多少？

(3)当气球内的气压大于 140kPa 时，气球将爆炸，为了安全起见，气体的体积应不小于多少？

第八讲 证明举例；命题与定理

【知识要点】

证明方法上的阶段性总结：

①证明线段相等的不同方法。常见的方法比如：全等三角形、等腰三角形性质

②证明角相等的不同方法。常见的方法比如：平行线性质、全等三角形、等腰三角形

③证明垂直、平行的不同方法。垂直常见的方法：垂直的定义、等腰三角形三线合一；平行常见的方法：三线八角，平行四边形，比例线段等

④证明线段或角度的倍半关系的方法。

⑤证明线段或角的和差问题的方法等。

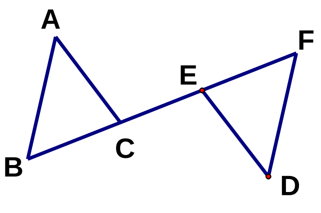
【典型例题 1】

★1、命题“全等三角形的对应角相等”的逆命题是一个_______命题（填“真”或“假”）

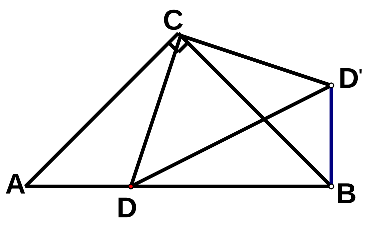
★2、如图，B、C、E、F 在同一条直线上，AC∥DE,且 AC=DE，BE=CF,∠FED=50^0，∠B=55^0,则∠D=______________________________

★3、如图，在△*ABC* 中，∠ABC=90º,AC=BC，点 D 在 AB 上，△D*CD'*是以∠D*CD'*为直角的等腰三角形，则有_______≌__________，从而_________=___________=___________^{0}，所以∠DB*D'*=____________^{0}，得 *BD′*_______*AB.*

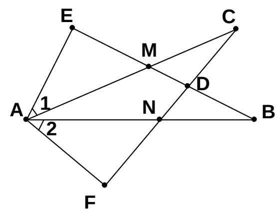
★★4、如图，已知∠*E*=∠*F*=90º，∠*B*=∠*C*，*AE*=*AF*，那么下列结论：①∠1=∠2，②*BE*=*CF*，③△*ACN*≌△*ABM*，④*CD*=*DN*. 其中正确的结论是：___________________(注:将你认为正确的结论的序号都填上).



（第 2 题图）



（第 3 题图）



（第 4 题图）

★★5、下列命题中，是真命题的是 （ ）

A、三角形的任意一个外角总是钝角。

B、等腰三角形的角平分线和中线是互相重合的。

C、两个三角形全等，它们的面积必相等。

D、有两条边和一个角对应相等的两个三角形全等。

★★6、下列命题中，真命题的个数是（　　）.

（1）等角对等边；（2）两直线平行，内错角相等；

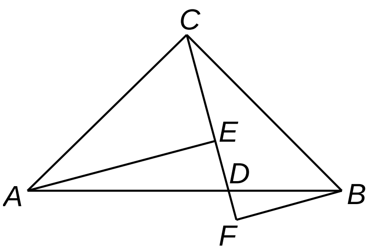
（3）有两边及一角对应相等的两个三角形全等；

（4）等角（同角）的余角（或补角）相等。

A、1 个；　B、2 个；　C、3 个；　D、0 个

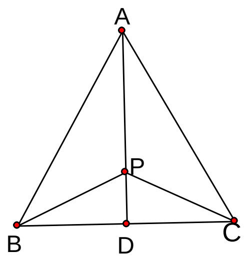
【典型例题 1】★★1、已知：如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$, D 是斜边 AB 上的一点，$AE\perp CD$ 于 E，$BF\perp CD$ 交 CD 的延长线于 F.

求证：$\Delta ACE\cong\Delta CBF$.

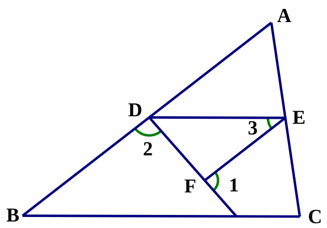


2、已知：如图，D是BC上一点，P是AD上一点，$\angle ABP=\angle ACP$，$\angle BPD=\angle CPD$。

求证：（1）$BD=CD$；（2）$AD\perp BC$。

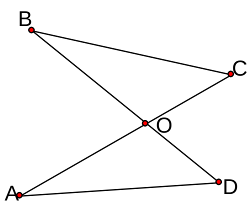


★★3、已知：如图：如果$\angle 1+\angle 2=180^0$，$\angle 3=\angle B$，请猜测$\angle AED$与$\angle C$的大小关系，并对你的猜测进行证明。



★★★4、已知：如图，AC 与 BD 相交于点 O，且 AC=BD，AD=BC。

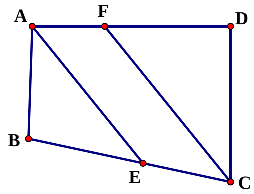
求证：OA=OB。



【典型例题 2】

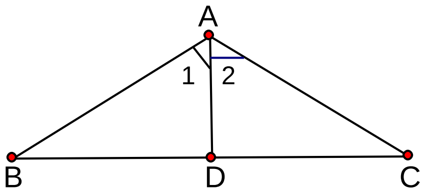
★★5、已知：如图：在四边形 $ABCD$ 中，AE 平分$\angle BAD$，CF 平分$\angle BCD$，$\angle$BAD 与$\angle DCB$ 互补，$\angle$DFC 与$\angle$DCF 互余，

求证：$\angle AEB=\angle FCB$

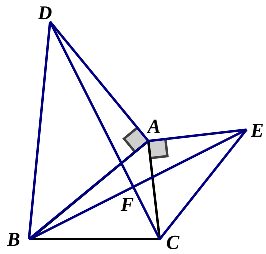


★★★6、已知：如图 D 是 BC 上一点，BD=CD，$\angle 1=\angle 2$.

求证：AB=AC。



★★★7、如图：以锐角$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为直角边，作等腰直角$\triangle ABD$ 和等腰直角$\triangle ACE$，CD 与 BE 交与点 F，求证：（1）$BE=DC$；（2）$CD\perp BE$



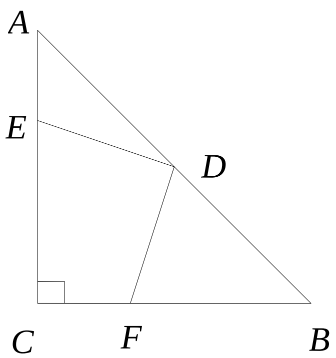
★★★★8、已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=AC=10$，D 是 AB 中点，$AE=CF$.

（1）求证：$\Delta ADE \cong \Delta CDF$

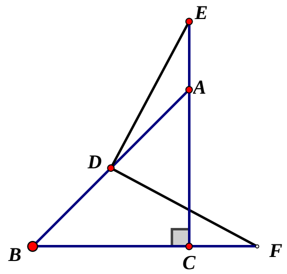
（2）求：$S_{四边形\ ECFD}$

（3）如 E、F 在 AC、BC 上移动，且始终保持 $AE=CF$，

则 $S_{四边形\ ECFD}$面积是否变化？请说明理由.

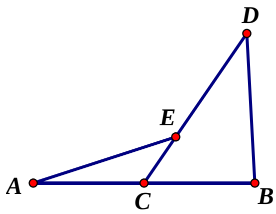


★★★★9、已知：如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*=90⁰，*AC*=*BC*， *D* 是 *AB* 的中点，点 *E*、*F* 分别在 *CA*、*BC* 的延长线上，*AE*=*CF*，联结 *DE*、*DF*。求证：*DE*⊥*DF*。



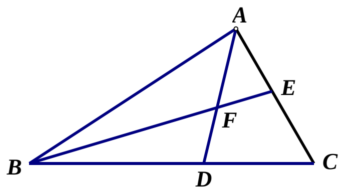
★★★★10、已知：如图，*C* 是 *AB* 的中点，点 *E* 在 *CD* 上，*AE*=*BD*，

求证：∠AEC=∠*CDB*



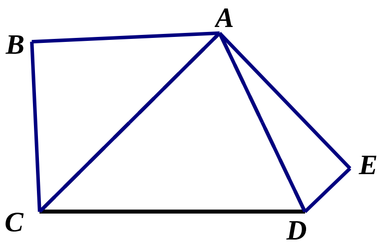
★★★★★11、已知：如图，△*ABC* 的角平分线 *AD*、*BE* 相交于点 *F*，∠C=60⁰，

求证：*AB*=*AE*+*BD*



★★★★★12、已知：如图，*AB*=*AE*，∠*ABC*=∠*AED*=90⁰，*BC*+*DE*=*CD*，

求证：*AC* 平分∠*BCD*



★★★13、求证：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

第九讲　　线段的垂直平分线

【知识要点】

线段的垂直平分线

定理：线段垂直平分线上任意一点到这条线段两个端点的距离相等。

逆定理：和一条线段的两个端点距离相等的点，在线段的垂直平分线上。

对于线段垂直平分线的定理与逆定理，一定是文字语言、数学图形、几何说理过程完全结合。

【典型例题 1】

★1、如图 1，(1)如果 CD⊥AB，那么 CD 是线段 AB 的______。

（2）如果 CD 是 AB 的垂直平分线，那么图中

相等且不重合的线段有______和______，______和______，

相等的锐角有______＝______，______＝______，

全等三角形有______≌______。

★2、如图 2，AB=AC＝12cm，DE 垂直平分 AC，

（1）如果△BDC 的周长是 17cm，那么 BC=__________，

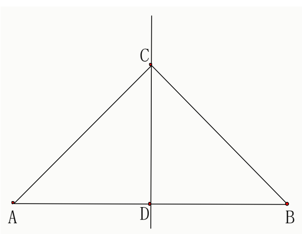
（2）如果 BC=6cm，那么△BDC 的周长为__________。

★3、如图 3，Rt△ABC 中，∠C＝90°，

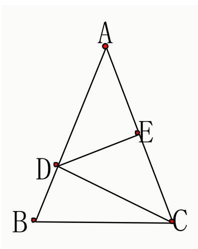
（1）如果∠A＝32°，BD 平分∠ABC，那么∠ABD＝______°。

（2）如果 DE 垂直平分 AB，∠DBC：∠ABD =2 : 1，那么∠A＝______°

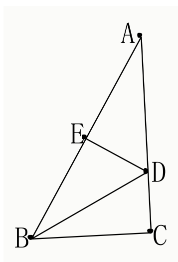
★★4、如图，△ABC，∠C=90°，∠B=15°，DE 垂直平分 AB，若 BD=8cm，则 AC=



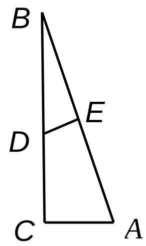
第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图



4题图

★5、(1) 任何命题________有逆命题，定理_____有逆定理。(填：一定或不一定)

（2）命题："如果 $ab>0$,那么 a 与 b 同号"的逆命题是__________________。

（3）命题"全等三角形的对应边相等"的逆命题是________________________

★★6、下列命题中，逆命题是**假命题**的是　　（　　）

A．等腰三角形的两个底角相等

B．若一元二次方程有两个实数根，则判别式△≥0

C．若 $a>0,b>0$，则 $a+b>0$

D．若 $a \geqslant 0$，则 $\sqrt{a^2}=a$

★★7、 下列定理的逆命题是真命题的有 （ ）
①同旁内角互补，两直线平行。 ②等腰三角形顶角的平分线垂直平分底边。
③全等三角形的对应角相等。 ④同角的补角相等。
A．1 个 B.2 个 C.3 个 D.4 个

★8、已知：MN 是线段 AB 的中垂线，下列说法正确的是（ ）
（A）与 MN 距离相等的点的 AB 上； （B）AB 垂直平分 MN；
（C）与 AB 距离相等的点在 MN 上； （D）与点 A、B 距离相等的点在 MN 上。

★★9、三角形内有一点到三角形三个顶点的距离相等，则这个点是三角形（ ）
（A）三条角平分线的交点 （B）三条高的交点
（C）三条边的垂直平分线的交点 （D）三条中线的交点

★★10、如果三角形三条边的中垂线的交点在三角形的外部，那么这个三角形是 （ ）
（A）直角三角形； (B)锐角三角形；（C）钝角三角形； （D）等边三角形。

【典型例题 2】

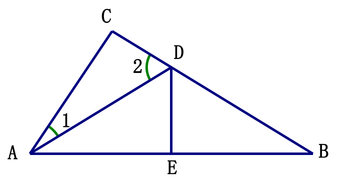
★★1、说出下列命题的逆命题，并判断它们的逆命题的真假，若逆命题是假命题，请举反例证明。

（1） 如果 $a=b$，那么 $|a|=|b|$.

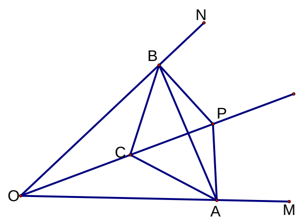
（2） 在一元二次方程中，如果判别式△≥0，那么这个方程有两个实数根。

（3） 全等三角形的面积相等。

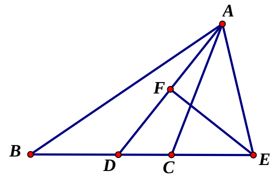
★★2、如图，∠C=90^0，DE 垂直平分 AB，∠1：∠2=2:3，求：∠CAB 的度数。



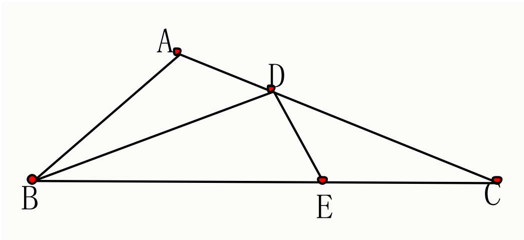
★★★3、已知：如图：PO 平分∠MON，过 P 作 PB⊥ON 于 B、PA⊥OM 于 A C 为 OP 上点 分别连接 CB、CA、AB。
求证 CP 垂直平分 AB



★★★4、已知：如图 AD 平分$\angle BAC$ ，AD 的垂直平分线交 BC 的延长线于点 E，交 AD 于点 F。求证：$\angle EAC=\angle B$

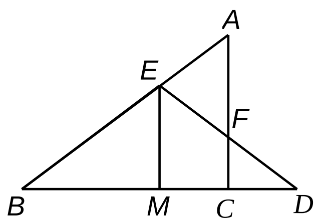


★★★★5、已知： 如图，BD 是△ABC 的角平分线，E 是 BC 边上的一点，
且∠A＋∠BED=180°。求证：DA=DE。

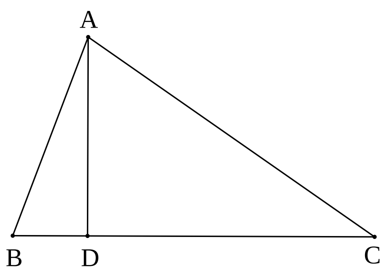


【典型例题 3】

★★★6、已知：如图所示△ABC，∠ACB=90°，D 为 BC 延长线上一点，E 是 AB 上一点，EM 垂直平分 BD，M 为垂足，DE 交 AC 于 F，
求证：E 在 AF 的垂直平分线上.



★★★★7、如图，AD 是△ABC 的高，$\angle B=2\angle C$，$BD=5$，$BC=20$. 求 AB 的长.



第十讲 角平分线及轨迹

【知识要点】

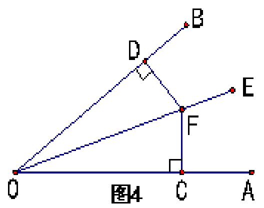
角平分线定理

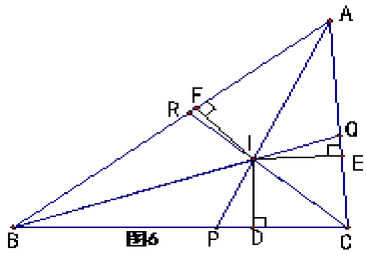
1、角是轴对称图形，它的对称轴是角平分线所在的直线。
2、定理：在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等。

逆定理：在一个角的内部（包括顶点）且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上。

如图 4：∵ OE 是∠AOB 的平分线，F 是 OE 上一点，且 CF⊥OA 于点 C，DF⊥OB 于点 D，

∴ CF＝DF.





（典型例题 1）：

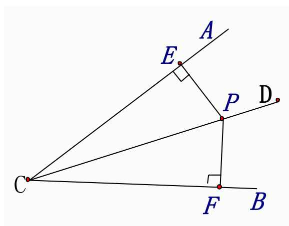
★1、如图，点 P 是射线 CD 上一点，线段 PE、PF 分别垂直于 CA、CB，E、F 为垂足，

(1) 如果 CD 是∠ACB 的平分线，那么图中

相等且不重合的线段有________=________，_______=______；

相等的锐角有_______=_________，_______=_________，

全等△有__________≌________。



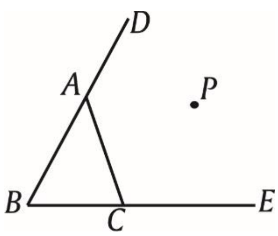
(2) 如果 PE=PF，列举图中一定在∠ACB 的平分线上的点：________，

这时射线 CP________ （填“是”或“不一定是” ）∠ACB 的角平分线。

★2、如图，已知点 P 到 BE、BD、AC 的距离恰好相等，则 P 点的位置： ①在∠B 的平分线上 ②在∠DAC 的平分线上 ③在∠ECA 的平分线上④恰好是∠B、∠DAC、∠ECA 的三条角平分线的交点。

上述结论中正确的个数是 （   ）

A 1 个 B 2 个 C 3 个 D 4 个



★★3、下列说法中：

（1）若直线 PE 是线段 AB 的中垂线，则 EA=EB，PA=PB；

（2）若 EA=EB，则经过点 E 的直线垂直平分线段 AB；

（3）若 OP 是∠AOB 的平分线，点 D 在 OP 上，点 E、F 分别在 OA、OB 上，则 DE＝DF；

（4） 若点 P 到∠AOB 的两边的距离相等，则点 P 一定在∠AOB 的平分线上。

其中错误的个数是　　　　　　　　（　　　）

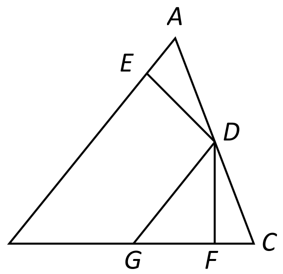
A　1 个；　　B　2 个；　　C　3 个；　　D　4 个。

【典型例题 2】

★★1、已知：如图，点 *D* 是△*ABC* 的边 *AC* 上的一点，过点 *D* 作 *DE*⊥*AB*，*DF*⊥*BC*，E、F 为垂足，再过点 D 作 *DG*∥*AB*，交 *BC* 于点 *G*，且 *DE*=*DF*。

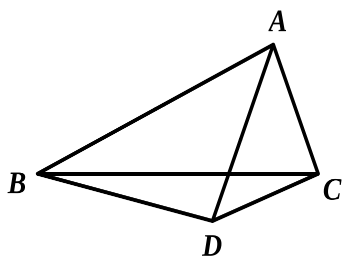
（1）求证：*DG*=*BG*；

（2）求证：BD 垂直平分 EF.



★★★★2、已知：如图，在△*ABC* 中，$AB = 2AC$，过点 *C* 作 *CD*⊥*AC*，交∠*BAC* 的平分线于点 *D*.

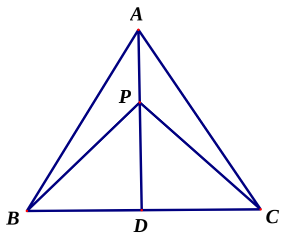
求证：*AD* =*BD*.

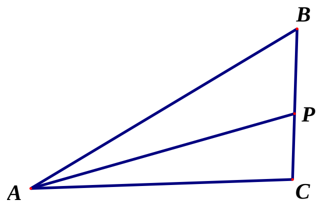


【典型例题 3】

★★★★3、到三角形三条边距离相等的点，叫做此三角形的内心，由此我们引入如下定义：到三角形的两条边距离相等的点，叫做此三角形的准内心.（1）如图 AD 为等边三角形 ABC 的高，准内心 P 在高 AD 上，且 $PD=\frac{1}{2}AB$，则 $\angle BPC$ 的度数为___度.

（2）如图已知直角△ABC 中斜边 AB=5，BC=3，准内心 P 在 BC 边上，求 CP 的长.





二、轨迹：

我们把符合某些条件的所有的点的集合叫做点的轨迹。

常见的三个轨迹：

（1）和线段两个端点距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线。

（2）在一个角的内部（包括顶点）且到角两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线。

(3)到定点的距离等于定长的点的轨迹是以这个定点为圆心、定长为半径的圆。

利用轨迹相交进行作图的方法叫做**交轨法**，“轨迹”的重点在于理解，可以通过练习“尺规作图的五种基本作图”来进行巩固。

【典型例题 1】

★1、________________________的点的轨迹是这条线段的垂直平分线.

★2、____________________________的点的轨迹是这个角的平分线.

★3、_____________________________的点的轨迹是以________为圆心、_________为半径的圆.

★★4、经过已知线段的两个端点的圆的圆心的轨迹是_______________

★★5、经过点 P,且半径等于 3 厘米的圆的圆心的轨迹是____________

★★6、以线段 AB 为底边的等腰三角形的顶点的轨迹是___________

★★7、锐角三角形 ABC 内有一点 O，如果点 O 到三角形 ABC 的三个顶点的距离相等，那么点 O 是_____________的交点；如果点 O 到三角形 ABC 三条边的距离相等，那么点 O 是_______________的交点

★★8、下列说法错误的是（　　　　）

A、到点 P 距离等于 1 cm 的点的轨迹是以点 P 为圆心，半径长为 1cm 的圆；

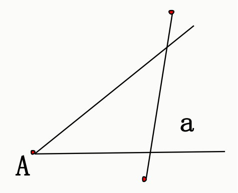
B、等腰△ABC 的底边 BC 固定，顶点 A 的轨迹是线段 BC 的垂直平分线；

C、在一个角的内部（包括顶点）到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线；

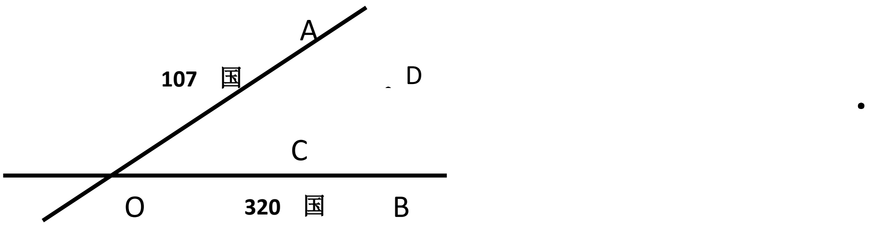
D、到直线l距离等于 2cm 的点的轨迹是两条平行于l且与l的距离等于 2cm 的直线.

【典型例题 2】

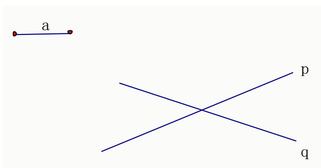
★★★ 9、已知：∠A 及线段 a，求作：点 P，使点 P 到∠A 两边的距离相等，且到 a 的两个端点的距离也相等。



★★★10、如图：107 国道 OA 和 320 国道 OB 在某市交于点 O，在∠AOB 的内部有工厂 C 和 D，现要修建一个货站 P，使 P 到 OA、OB 的距离相等，且 PC=PD。请在∠AOB 的内部画出货站的位置(不写画法，保留画图痕迹，写出结论)



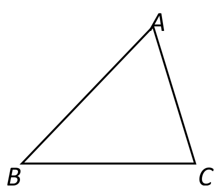
★★★3、如图，求作点 M，使得点 M 与两条相交直线 p、q 的距离都等于 a。



【典型例题 3】

★★★★4、（1）根据要求作图：在边 BC 上求作一点 D，使得点 D 到 AB、AC 的距离相等，在边 AB 上求作一点 E，使得点 E 到点 A、D 的距离相等；（不需要写作法，但需要保留作图痕迹和结论）

（2）在第（1）小题所作出的图中，求证：$DE // AC$.



第十一讲　直角三角形全等的判定

【知识要点】

一、直角三角形全等的判断

直角三角形全等的判定定理：斜边、直角边公理：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（HL）

【典型例题 1】

★1、下列语句是正确的是　　　　　　　　　　（　　　）

A、每个定理都有逆定理　　　　　B 、每个命题都有逆命题

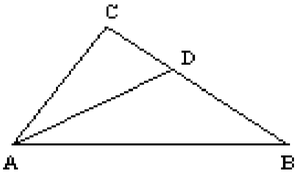
C、真命题的逆命题一定是真命题　　D、假命题的逆命题一定是假命题

★2、下列命题：①两底角相等的三角形是等腰三角形；②在三角形中，等边对等角；③有两个角相等的三角形是等腰三角形； ④在三角形中，等角对等边，其中是命题“等腰三角形的底角相等”的逆命题是　（　　　）

A、①和②；　B、③和④；　　C、①和③；　　D、②和④.

★3、如图，已知∠C＝90º，∠CAB 的平分线 AD 交 BC 与 D，

BC＝10，BD＝7，则点 D 到 AB 的距离是　　　　　　（　　　）



A、3　　B、4　　C、6　　D、8

★4、下列说法正确的有　　　　　　　　　　　　　（　　　）

1）斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等

2）两条边分别相等的两个直角三角形全等

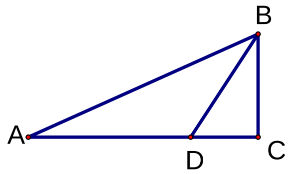
3）两条直角边对应相等的两个直角三角形全等。

4）斜边相等的两个等腰直角三角形全等

A、1 个　　B、2 个　　C、3 个　　D、4 个

★5、已知：如图，在△ABC 中，∠C= 90°,BD 平分∠ABC，

BC=$\frac{1}{2}AB, BD=4,$ 则点 D 到 AB 的距离为　　　　　（　　　）



A、2　　B、4　　C、3　　D、无法确定

★6、下列命题中真命题是　　　　　　　　　　　（　　）

A、如果两个直角三角形的两条边对应相等，那么这两个直角三角形全等

B、如果两个直角三角形的一条边和一个锐角对应相等，那么这两个直角三角形全等

C、如果两个直角三角形的两个角对应相等，那么这两个直角三角形全等

D、如果两个直角三角形的一条直角边和斜边对应相等，那么这两个直角三角形全等

★★★7、在 Rt△ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=15°$，*AC*=2，如果将这个三角形折叠，使得点 *B* 与点 *A* 重合，折痕交 *AB* 于点 *M*，交 *BC* 于点 *N*，那么 *BN* 等于（　　）.

A、2;　　B、4;　　C、6;　　D、8.

★★8、在△ABC 中，∠C=90°，BD 平分∠ABC 交 AC 于 D，CD=6，则点 D 到 AB 的距离为________.

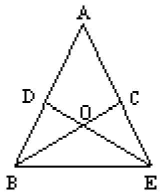
★9、△ABC 中，∠ABC 和∠ACB 的平分线相交于点 O，且∠BOC＝108º，则∠A＝___度。

★10、若 BC 是等腰△ABC 和等腰△DBC 的公共底，则直线 AD 与线段 BC 的关系是___

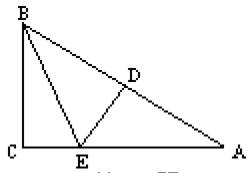
★11、如图，AB＝AE，AC＝AD，则△OBE 的形状为______________。

★12、如图，DE 垂直平分 AB，若△CBE 周长为 14，AB＝10，则△ABC 的周长_。

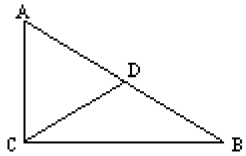
★13、如图，在△ABC 中，D 为 AB 中点，CD＝$\frac{1}{2}$AB，则点 D 在线段_______________的垂直平分线上。



第 11 题

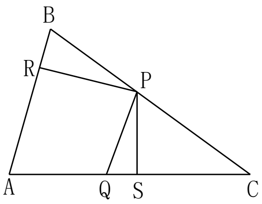


第 12 题



第 13 题

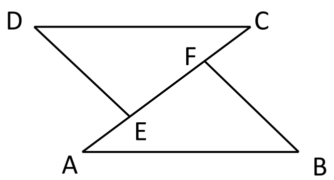
★14、如图,△ABC 中,P、Q 分别是 BC、AC 上的点,作 PR⊥AB,PS⊥AC,垂足分别是 R、S, 若 AQ=PQ,PR=PS,下面三个结论中 :①AS=AR ②QP∥AR ③△BRP≌△CSP 正确的是(　　)



【典型例题 2】

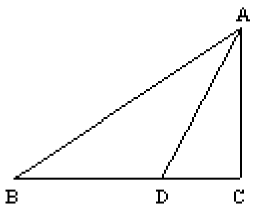
★★1、如图，已知， AB=CD，DE⊥AC，BF⊥AC，E、F 是垂足，DE=BF.

求证：AF=CE.



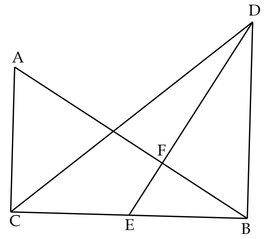
★★2、如下图，△ABC 中，AD 平分∠BAC，若 BC＝35cm，CD：DB＝3：4。

求点 D 到 AB 的距离。



第 18 题

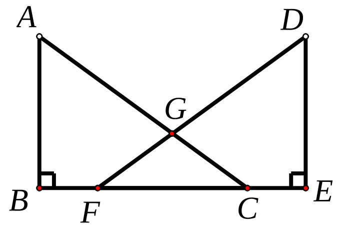
★★3、如图，△ABC 和△DBC 中，∠ACB=∠DBC=90°，E 是 BC 的中点，且 ED⊥AB 于点 F，且 AB=DE.（1）求证：BD=2EC;（2）若 BD=10 cm，求 AC 的长.



★★4、已知：如图，点 *B*、*F*、*C*、*E* 在同一直线上，*AB*⊥*BE*，垂足为 *B*，*DE*⊥*BE*，垂足为 *E*，

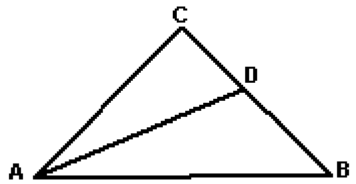
AC、*DF* 相交于点 *G*，且 *AC*＝*DF*，*BF*＝*CE*.

求证：*GF*＝*GC*.



★★5、如下图，已知，在△ABC 中，AC=BC，AD 是△ABC 的角平分线，AB=AC+CD。

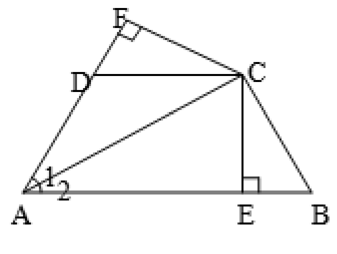
求证：∠C=90°



第 21 题

【典型例题 3】

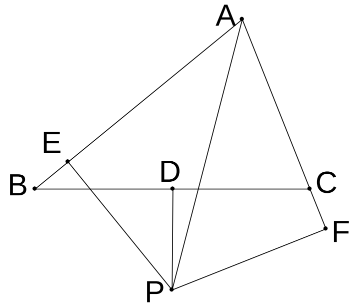
★★6、已知：如图，AC 平分∠BAD，CE⊥AB 于 E，CF⊥AD 于 F，且 BC＝DC. 求证： BE=DF



★★★7、如图：已知△ABC，点 P 是边 BC 的垂直平分线 DP 上一点，作 PE⊥AB 交边 AB 于点 E，

PF⊥AC 交 AC 延长线于点 F，且 BE=CF.

求证：AP 平分∠BAC.

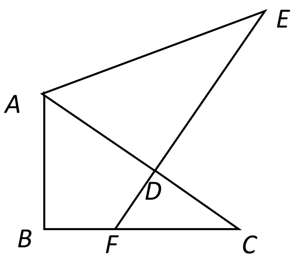


★★★★8、已知 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，将 Rt△ABC 绕点 A 旋转，得 Rt△ADE（点 B、C 分别落在点 D、E 处），设直线 DE 与直线 BC 交于点 F。

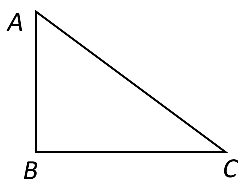
2、当点 D 在 AC 边上时（如图 1），求证：$DE=DF+FC$;

3、当点 E 在 AB 边的延长线上时，请在图 2 中画出示意图，并直接写出 DE、DF、FC 之间的数量关系；

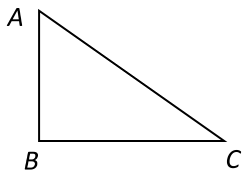
4、试在图 3 中画出点 F 不存在的情况示意图。



图(1)



图(2)



图(3)

第十二讲 直角三角形的性质 1

【知识要点】

定理 1：直角三角形的两个锐角互余。

定理 2：直角三角形斜边上的中位线等于斜边的一半。

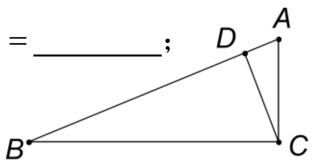
推论 1：在直角三角形中，如果一个锐角等于 30 度，那么它所对的直角边等于斜边的一半。

推论 2：在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30 度。

【典型例题 1】

★1、如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90^\circ, \angle B=25^\circ, CD\perp AB$于$D$，则$\angle ACD$ $=$________；

★2、如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90^\circ, \angle B=30^\circ, AC=2, CD\perp AB$于$D$，则$AD=$________；



第 1、2 题

★★3、下列命题中，正确的是　　　　　　（　　　）

A、Rt△ABC中，CD是AB上中线，则$CD=\frac{1}{2}AB$

B、点P是∠AOB的平分线上一点，点M、N分别在OA、OB上，则$PM=PN$

C、Rt△ABC中，若∠B=30°，则$AC=\frac{1}{2}AB$

D、一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形

★★4、下列命题中，正确的是　　　　　　（　　　）

A、Rt△ABC中，如果CD是AB上中线，那么$CD=\frac{1}{2}AB$

B、Rt△ABC中，如果∠B=30°，那么$AC=\frac{1}{2}AB$

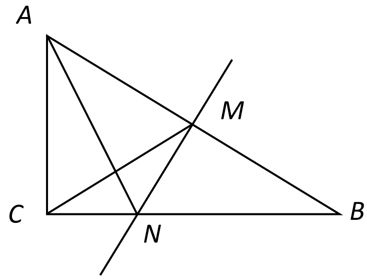
C、如果点P在∠AOB的平分线上，点M、N分别在OA、OB上，那么$PM=PN$

D、如果点P在MN的垂直平分线上，那么$PM=PN$

【典型例题 2】

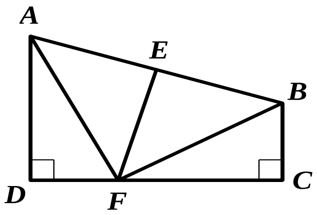
★1、直角三角形斜边上的中线与斜边上的高分别是$6cm,5cm$；求这个直角三角形的面积.

★★2、如图，在 Rt△ABC 中，斜边 AB 的垂直平分线交 AB 于点 M、交 BC 于点 N，连结 CM 和 AN．求证：$\angle BCM=\angle BAN$．



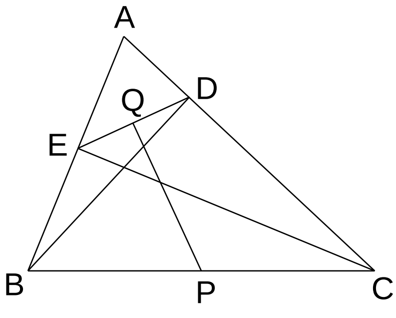
★★3、已知：如图，$AD\perp CD$，$BC\perp CD$，D、C 分别为垂足，AB 的垂直平分线 EF 交 AB 于点 E，交 CD 于点 F，$BC=DF$.

求证：（1）$\angle DAF=\angle CFB$；（2）$EF=\dfrac{1}{2}AB$.

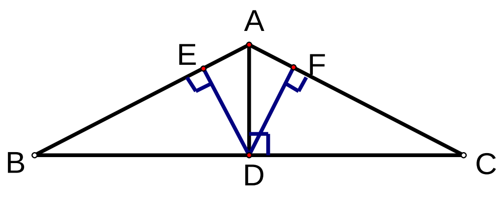


★★★4、已知：如图，BD、CE 分别是 AC、AB 的高，P、Q 分别是 BC、ED 的中点.

求证：PQ⊥DE.



【典型例题 3】



★★★★5、已知：如图，AD 是 BC 上的高，AB=AC=2AD,

$DE\perp AB$于E,$DF\perp AC$于F，求证：

$DE+DF=\dfrac{1}{2}BC$

第十三讲 直角三角形的性质 2

【知识要点】:

一、直角三角形全等的判断

直角三角形全等的判定定理：斜边、直角边公理：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（HL）

二、直角三角形的性质

直角三角形的性质定理及其推论：

①直角三角形的性质，在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半；

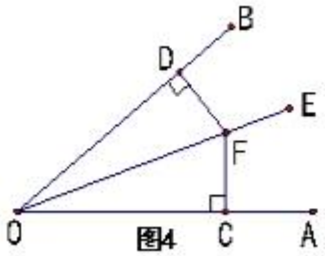
②推论：(1) 在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，则它所对的直角边等于斜边的一半；

(2) 在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角为 30°.

三、角平分线的性质定理

1.角平分线的性质定理：角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

定理的数学表示：如图 4，



∵ OE 是∠AOB 的平分线，F 是 OE 上一点，且 CF⊥OA 于点 C，DF⊥OB 于点 D， ∴ CF＝DF.

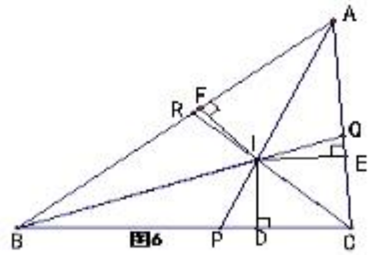
定理的作用：①证明两条线段相等；②用于几何作图问题；

角是一个轴对称图形，它的对称轴是角平分线所在的直线.

2.关于三角形三条角平分线的定理：

(1) 关于三角形三条角平分线交点的定理：

三角形三条角平分线相交于一点，并且这一点到三边的距离相等.



【典型例题】:

★1、适合下列条件的△ABC 中，直角三角形的个数为 (　　)

① $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{5}$; ② $a=6,$ ∠A=45°;③∠A=32°，∠B=58°;

④ $a=7, b=24, c=25$;　⑤ $a=2, b=2, c=4$.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

★★2、在△ABC 中，若三边长各为 $a=n^2-1, b=2n, c=n^2+1$，(n 是大于 1 的实数）则△ABC 是 (　　)

A. 锐角三角形　B. 钝角三角形　C. 等腰三角形　　D. 直角三角形

★3、直角三角形斜边的平方等于两条直角边乘积的 2 倍，这个三角形有一个锐角是（　）

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°

★★4、在直角坐标平面内，以 A（－2，0）、B（2，4）、C（6，0）为顶点的△ABC 是（）

（A）锐角三角形　（B）直角三角形

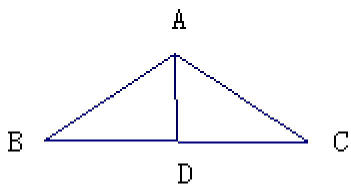
（C）钝角三角形　（D）等腰直角三角形.

★5、在直角坐标平面内，已知点 A（－1，3），B（2，1），则 AB=______.

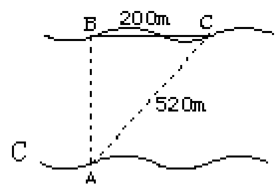
★6、已知点 A（1，3），点 B 在 x 轴上，且 AB=5，则点 B 的坐标是________________.

★★7、如图，　等腰△ABC 的底边 BC 为 16，底边上的高 AD 为 6，则腰上高为_______.

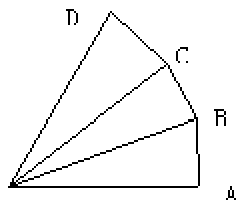
★★8、如图，某人欲横渡一条河，由于水流的影响，实际上岸地点 C 偏离欲到达点 B 200m，结果他在水中实际游了 520m，求该河流的宽度为_______m.



第 7 题



第 8 题



第 9 题

★★9、如图，∠OAB=∠OBC=∠OCD=90°，　AB=BC=CD=1，OA=2，则 OD=_____.

★10、正方形的面积为 18cm²，则正方形对角线长为______ cm.

★★11、小华和小红都从同一点 O 出发，小华向北走了 9 米到 A 点，小红向东走了 12 米到了 B 点，则 $AB=$_______米.

★★12、一个三角形三边满足 $(a+b)^2-c^2=2ab$，则这个三角形是________三角形.

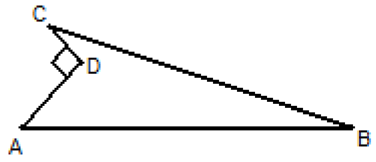
★★13、木工做一个长方形桌面，量得桌面的长为 60cm，宽为 32cm，对角线为 68cm，这个桌面________（填”合格”或”不合格”）.

★14、直角三角形一直角边为 $12cm$，斜边长为 $13cm$，则它的面积为__________ cm^2.

★★15、在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AD 平分∠BAC，交 BC 于 D，如果 BC=40，BD：CD=5：3，那么点 D 到 AB 的距离是_____.

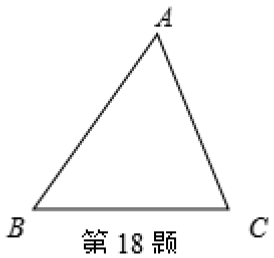
★★16、已知等腰直角三角形 ABC 斜边 BC 的长为 2，△DBC 为等边三角形，那么 A、D 两点的距离为_______________.

★★17、如图所示的一块地，∠ADC＝90°，AD＝12m，CD＝9m，AB＝39m，BC＝36m，求这块地的面积.



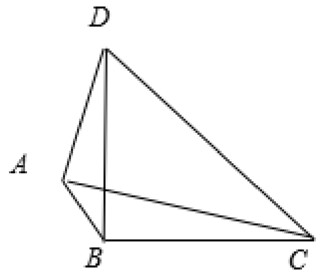
第 17 题

★★18、如图，在△ABC 中，AB=15，BC=14，AC=13. 求：△ABC 的面积.



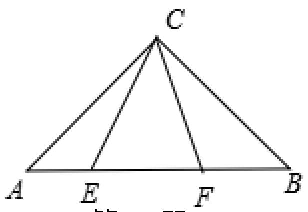
第 18 题

★★19、如图，在△ABC 中，∠A=45º，DB⊥BC，且 BD=BC，
求证：△DAC 是直角三角形。



第 19 题

★★★20、如图，已知ΔABC 是等腰直角三角形，∠C=90°，将三角板的 45°角的顶点与点 C 重合，使这个角落在∠ACB 的内部，两边分别与斜边 AB 交于 E、F 两点。探索：AE、EF、FB 这三条线段能否组成以 EF 为斜边的直角三角形？如果不能，请举反例说明；如果能，试加以证明。



第 20 题

第十四讲 勾股定理

【知识要点】:

勾股定理：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方．如果直角三角形的两直角边长分别为a，b，斜边长为c，那么$a^2+b^2=c^2$．

要点诠释：（1）勾股定理揭示了一个直角三角形三边之间的数量关系．

（2）利用勾股定理，当设定一条直角边长为未知数后，根据题目已知的线段长可以建立方程求解，这样就将数与形有机地结合起来，达到了解决问题的目的．

（3）理解勾股定理的一些变式：

$a^2=c^2-b^2$，$b^2=c^2-a^2$，$c^2=(a+b)^2-2ab$．

【典型例题】：

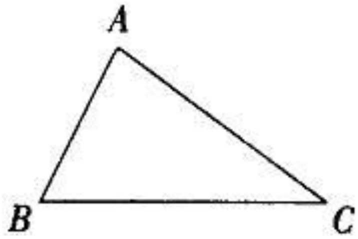
★例一：勾股定理的直接用法

1、在 Rt△ABC 中，∠C=90°

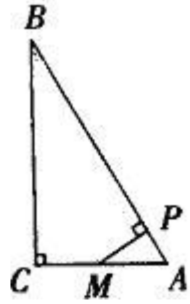
(1)已知 a=6， c=10，求 b， (2)已知 a=40，b=9，求 c； (3)已知 c=25，b=15，求 a.

★例二：勾股定理的构造应用

2、如图，已知：在ΔABC中，$\angle B=60°$，$AC=70$，$AB=30$．求：BC的长.



★★ 举一反三【变式 1】如图，已知：$\angle C=90°$，$AM=CM$，$MP\perp AB$于P．求证：$BP^2=AP^2+BC^2$．



★★【变式 2】已知：如图，∠B=∠D=90°，∠A=60°，AB=4，CD=2。求：四边形 ABCD 的面积。

【典型例题】：

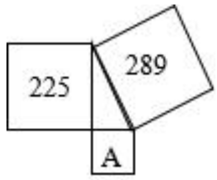
★1、下列各组线段不能组成直角三角形三边的是 （　）

（A）9 cm，12 cm，15 cm；　（B）10 cm，24 cm，26 cm；

（C）9 cm，40 cm，41 cm；　（D）16 cm，20 cm，25 cm.

★2、一直角三角形的斜边长比一直角边长大 1，另一直角边长为 9，则一直角边与斜边长各为　　　　　　（　　）

A. 12，13　　B. 24，25　　C. 40，41　　D. 60，61



第 3 题

★3、如图中字母 A 所代表的正方形的面积为　　（　　）

A. 4　　B. 8

C. 16　　D. 64

★4、一直角三角形的一条直角边长是 7cm ，另一条直角边与斜边长的和是 49cm ，则斜边的长 （　）

A. 18cm　B. 20 cm　C. 24 cm　D. 25cm

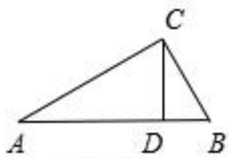
★5、在△ABC 中，∠C＝90°，且∠A＝73°12′，那么∠B＝________。

★6、若等腰三角形底角 75°，腰上的高为 4 厘米，则腰长为___厘米.

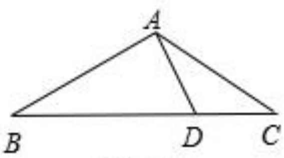
★★7、等边三角形的边长为 12，则三条角平分线的交点到一条边的距离为_______.

★★8、如图，在△ABC 中，∠ACB=90°，CD⊥AB 于点 D，∠A=30°，AB=8 厘米，则 BD=_____.

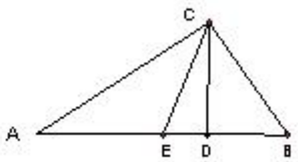
★★9、如图，在△ABC 中 AB=AC，∠C=30°，DA⊥AB 交 BC 于点 D。如果 BD=12 厘米，则 DC=______厘米.



第 8 题



第 9 题



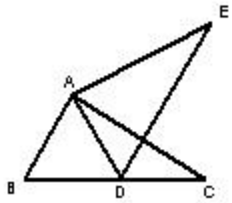
第 10 题

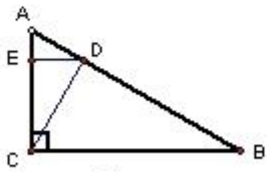
★★10、如图，已知，在△ABC 中，∠ACB=90°，CE 是中线，CD 是高，且 ED=BD，∠A 度数是_______.

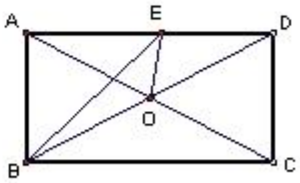
★★11、等腰三角形的顶角为 120°，则它的腰长为 4 cm ，则面积为_________cm^2.

★★★12、如图，将 ΔABC 绕点 A 逆时针旋转 50^0 后得到 ΔADE ，点 D 在 BC 上，那么 $\angle EDC$ =________°.

★★★13、如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90$°，$\angle B=30$°，$CD\perp AB$，$DE\perp AC$，则$AE=$ ______ AB （填有理数）


第 12 题


第 13 题


第 14 题

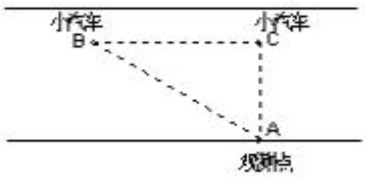
★★★14、如图，矩形 ABCD 中，对角线 AC，BD 交于点 O，BE平分$\angle ABC$，$AC=2AB$，则$\angle AOE=$______°.

★★15、等腰直角三角形 ABC，∠A＝90°，AC=12，BD 是角平分线，DE⊥BC 于点 E，则△DEC 的周长为______.

★★16、在△ABC 中，AB=13，AC=15，高 AD=12，则 BC 的长为___________.

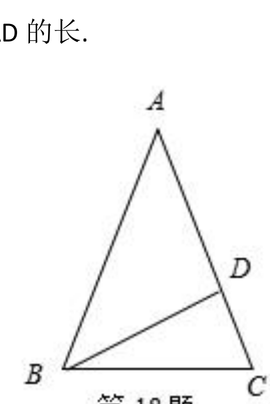
三、解答题

★★17、“中华人民共和国道路交通管理条例”规定：小汽车在城街路上行驶速度不得超过70千米/小时，如图，一辆小汽车在一条城市街路上直道行驶，某一时刻刚好行驶到路面对车速检测仪正前方30米处，过了2秒后，测得小汽车与车速检测仪间距离为50米，这辆小汽车超速了吗？

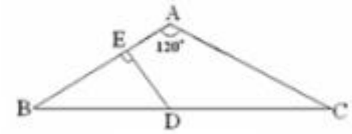


第 17 题

★★18、如图，在△ABC 中 AB=AC，BD⊥AC 于点 D，若 BC=6，CD=2，求 AD 的长.

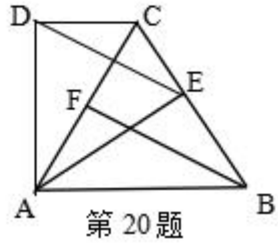

第 18 题

★★19、已知，如图，△ABC 中，AB=AC, ∠BAC=120°，D 是 BC 的中点，DE⊥AB 于 E，求证：EB=3EA



第 19 题

★★★20、如图，梯形 ABCD 中，DC∥AB，∠D=90°， BA=BC，AE^BC，垂足为 E，点 F 是 AC 的中点，联结 DE.（1）试判断 DE 与 BF 的位置关系，并证明；（2）若∠DBC=120°，试判断 DE 与 BF 的数量关系，并证明.



第 20 题

第十六讲 两点之间距离公式

【知识要点】:

平面内任意两点 P1（x1，y1），P2（x2，y2）之间距离公式：

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

平面内任意两点 P1（x1，y1），P2（x2，y2）之间中点坐标公式：

$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

★**【典型例题】**试一试，求下列两点间的距离：

（1）$A(-2,0),B(2,0)$　　（2）$A(-3,5),B(3,5)$

（3）$A(0,3),B(0,-7)$　　（4）$A(-5,3),B(-5,-7)$

（5）$A(6,8),B(0,0)$　　（6）$A(0,0),B(-4,-3)$

要点诠释：

若平面上的有两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，

1、如果P_1、P_2两点在x轴上或在平行于x轴的直线上，则两点距离$\left|P_1P_2\right|$是________

2、如果P_1、P_2两点在y轴上或在平行于y轴的直线上，则两点距离$\left|P_1P_2\right|$是________

3、点P_1到原点的距离是 ，点P_2到原点的距离是_________

【典型例题】

★1、求 A（−3，1）、B（2，−5）两点间的距离.

★★2、 已知点 S（0，2）、点 T（−6，−1），现将线段 ST 四等分，试求出各分点的坐标.

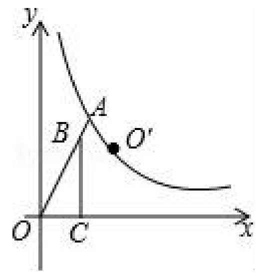
★★3、已知 ΔABC 的三个顶点为 $A(1,0)$、$B(-2,1)$、$C(0,3)$，试求 BC 边上的中线 AD 的长度.

★★4、在平面直角坐标系内，描出下列各点： $A(1,1)$、$B(3,4)$、$C(5,7)$. 并计算每两点之间的距离.

★★5、已知点 $A(2,3)$ 和点 $B(8,-3)$，求线段 AB 中点的坐标.

★★6、已知 ΔABC 的三个顶点为 $A(2,2)$、$B(-4,6)$、$C(-3,-2)$，求 AB 边上的中线 CD 的长度.

★★7、如图，点 A 是双曲线 y=$\frac{k}{x}$（x＞0）上的一点，连结 OA，在线段 OA 上取一点 B，作 BC⊥x 轴于点 C，以 BC 的中点为对称中心，作点 O 的中心对称点 O′，当 O′落在这条双曲线上时，$\frac{OB}{OA}$ =__.



【课堂练习】

★★1、已知两点 $A(-1,2)$，$B(2,\sqrt{7})$。

（1）求 $|AB|$；（2）在 x 轴上求一点 P，使得 $|PA|=|PB|$，并求 $|PA|$

★★2、已知△ABC 的三个顶点是 $A(-1,0),B(1,0),C(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，试判断△ABC 的形状。

★★3、已知△ABC 的顶点坐标为 A（3，2），B（1，0），C（2+$\sqrt{3}$，1－$\sqrt{3}$），求 AB 边上的中线 CM 的长；

练习：

★1.式子 $\sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2}$ 可以理解为（　　）

(A) 两点(a,b)与(1,-2)间的距离 (B) 两点(a,b)与(-1,2)间的距离

(C) 两点(a,b)与(1,2)间的距离 (D) 两点(a,b)与(-1,-2)间的距离

★2.已知 A 在 y 轴上，B（4，-6），且两点间的距离 $|AB|$=5，求点 A 的坐标

★★3.已知 A（a,-5），点 B 在 y 轴上，点 B 的纵坐标为 10，AB=17，求 a。

★★4.已知 A（2，1）,B（-1，2）,C（5,y）,且为等腰三角形，求 y 并求底上中线的长度

巩固提高：

★1．若 $A(-1,3)$、B（2，5）则 $AB=$ ＿＿＿＿＿＿．AB 的中点 M 的坐标为＿＿＿＿＿

★2．已知 *A*（*0*，*10*），*B*（*a*，*-5*）两点之间的距离为 17，则 *a* 的值为______.

★★3.已知点 $M(m,-1)$， $N(5,m)$，且 $|MN|=2\sqrt{5}$，则 $m=$___________.

★★4.已知 $A(1,-1),B(a,3),C(4,5)$，且 $|AB|=|BC|$，则 $a=$_______________.

★★5.已知△ABC 的三个顶点是 $A(-1,0),B(1,0),C(0,3)$，试判断△ABC 的形状。

★★6.已知△ABC 的三个顶点是 $A(-2,1),B(-2,-3),C(4,-1)$，试判断△ABC 的形状。

★★ 7、已知△ABC 的三个顶点是 $A(-1,-1),B(3,-1),C(3,2)$，试判断△ABC 的形状。

★★8、已知△ABC 的三个顶点是 $A(-2,-1),B(4,-1),C(1,2)$，试判断△ABC 的形状。

第十七讲 几何章节复习

一、选择题

★1、如果一个三角形两边的垂直平分线的交点在第三边上，那么这个三角形是……………………………………………（　　）

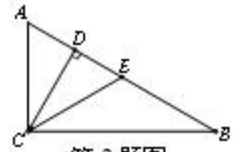
（A）锐角三角形（B）钝角三角形（C）直角三角形（D）不能确定.

★2、下列命题中，是假命题的是…………………………（　　）

（A）对顶角相等；（B）互为余角的两个角都是锐角；

（C）互为补角的两个角中至少有一个角是钝角；

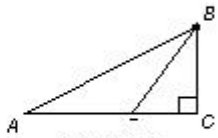
（D）如果两条直线都和第三条直线垂直，那么这两条直线互相平行.



第3题图

★3、在 Rt△*ABC*，∠*ACB*＝90°，*CD*、*CE* 是斜边上的高和中线，*AC*＝*CE*＝10cm，则 *BD* 长为……（　　）

（A）25cm；　（B） 5cm；　（C）15cm；　（D）10cm.



第4题图

★★4、如图在⊿ABC 中，∠C=90^0，$BC=\frac{1}{2}AB$，*BD* 平分∠ABC，*BD*=2，则以下结论错误的是…………………………（　　）

（A）点 *D* 在 *AB* 的垂直平分线上；

（B）点 *D* 到 *AB* 的距离为 1；

（C）点 A 到 BD 的距离为 2；

（D）点 B 到 AC 的距离为 $\sqrt{3}$.

二、填空题

★5、三角形三边的垂直平分线的交点到____________的距离相等；

★★6、命题：“同角的余角相等”的逆命题是:______________________________________；这个命题是______命题.（填“真”或“假”）

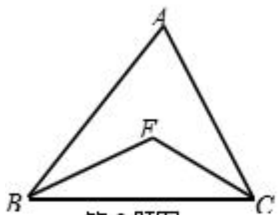
★7、用函数解析式表示：在直角坐标平面上到两坐标轴距离相等的点的轨迹是____________.

★★8、已知在△*ABC* 中，*CD* 是角平分线，∠*A*=2∠*B*，*AD*=3，*AC*=5，那么 *BC*=________.

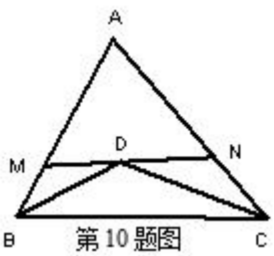
★★9、如图，在△*ABC* 中，*BF* 平分∠*ABC*，*CF* 平分∠*ACB*.如果∠A=60^0，那么∠*BFC* 的度数为________.

★★10、如图，在△ABC 中，BD、CD 分别平分∠ABC、∠ACB，过点 D 作 MN//BC，交 AB、AC 于 M、N，若 AB＝12，AC＝15，BC＝14，则△AMN 的周长是_______.

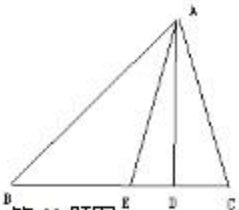
★★11、如图在 ΔABC 中，AD 是 BC 边上的高，AE 是 $\angle BAC$ 的角平分线，若 $\angle B=30°, \angle C=68°$，则 $\angle DAE=$ ________ 度.



第9题图



第10题图

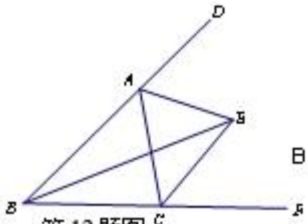


第11题图

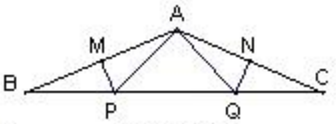
★★12、如图，在△*ABC* 中，∠*B*=47°，三角形的外角∠*DAC* 和∠*ACF* 的平分线交于点 *E*，则∠*ABE*=________°.

★★13、如图，∠BAC=130°，若 MP、NQ 分别垂直平分 AB、AC，则∠PAQ 的度数是_______°.

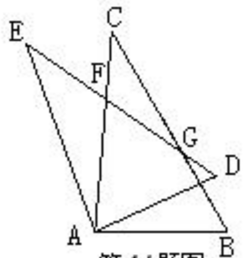
★★★14、如图，将△*ABC* 绕点 *A* 按逆时针方向旋转得到△*ADE*，*DE* 交 *AC* 于 *F*，交 *BC* 于 *G*，若∠*C*=35°，∠*EFC*=60°，则这次旋转了________度.



第 12 题图



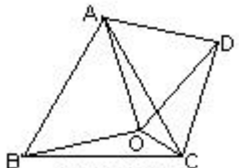
第 13 题图



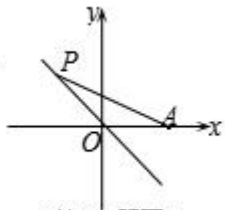
第 14 题图

★★15、如图，ΔABC、ΔAOD 都是等边三角形，点 *O* 是ΔABC 内一点，已知：*AO*=4，*BO*=5，*CO*=3，那么ΔDOC 的周长等于_______.

★★★16、如图，点 P 在函数 $y=-x$ 的图像上运动，点 A 的坐标为 $(1,0)$，当线段 AP 最短时，点 P 的坐标为_________.



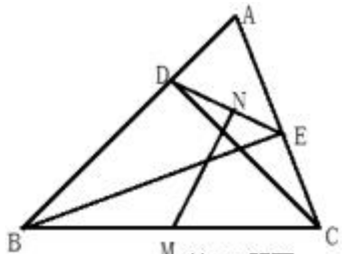
第 15 题图



（第 16 题图）

三、解答题

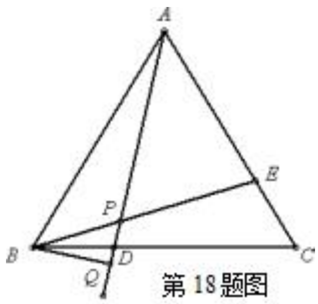
★★17、已知：如图，CD、EB 分别是△ABC 的两边 AB、AC 上的高，M 是 BC 的中点，N 是 DE 的中点，连结 MN，求证：MN⊥DE.



第 17 题图

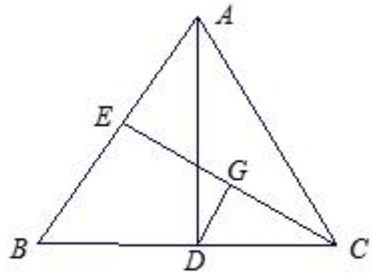
★★18、如图，在等边三角形 *ABC* 中，*D*、*E* 分别为 *BC*、*AC* 上的点，且 *AE*＝*CD*，连结 *AD*、*BE* 交于点 *P*，作 *BQ*⊥*AD*，垂足为 *Q*.

求证：(1) ∠ABE=∠CAD (2) *BP*＝2*PQ*.



第 18 题图

★★19、已知：如图，$\triangle ABC$中，AD是高，CE是中线，$DC=BE$，$DG\perp CE$，G是垂足。求证：（1）G是CE的中点；（2）$\angle B=2\angle BCE$。



（第 19 题图）

★★★20、已知$\angle MAN=120^\circ$，AC平分$\angle MAN$.

（1）在图 1 中，若$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$．求证：$AB+AD=AC$．

（2）在图 2 中，若$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，则（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

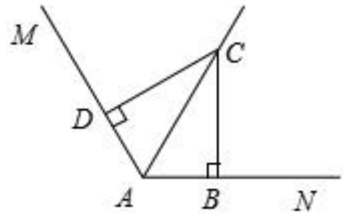


图 1

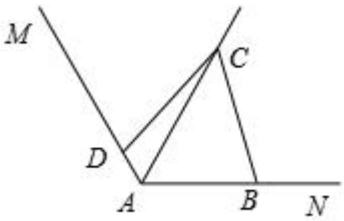


图 2

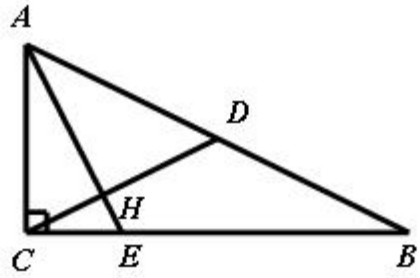
【 综合问题】:

★★★如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，D是AB的中点，$CD=3$，过点A作$\angle CAE=\angle B$，交边CB于点E，交线段CD于点H.

（1）求证：$AE\perp CD$；

（2）设$AC=x$，$CH=y$，求y关于x的函数解析式及定义域;

（3）当$AE=CD$时，求CH的长.



题 4

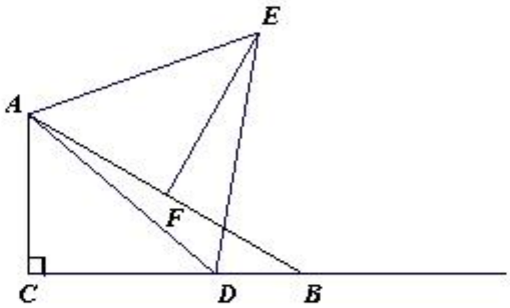
★★★在 Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AB=10$，点D是射线 *CB* 上的一个动点，△*ADE* 是等边三角形，点F是AB的中点，联结EF.

（1）如图，当点D在线段 *CB* 上时，

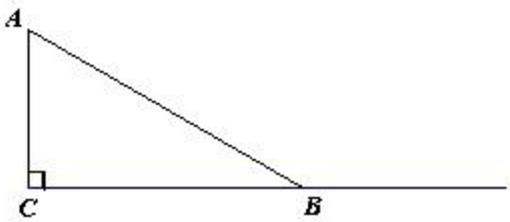
①求证：△$AEF\cong$△ADC；

②联结 *BE*，设线段$CD=x$，线段$BE=y$，求y关于x的函数解析式及定义域；

（2）当$\angle DAB=15°$时，求△*ADE* 的面积.



题 5 图



题 5 备用图

第十八讲　期末复习

一、填空题：

★1．方程 $x^2-64=0$ 的根是____________.

★2．函数 $y=\sqrt{2+x}$ 的定义域是____________.

★3．当 $x<2$ 时，化简二次根式 $\sqrt{x^2-4x+4}$ =____________.

★★4．分解因式：x^2-x-1=________________________.

★5．如果函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，那么 $f(2)$ =____________.

★6．如果 x^2+6x+m 是一个完全平方式，那么 m=____________.

★7．已知正比例函数 $y=-2x$ 的图像经过点（m，4），那么 m 的值是____________.

★★8．如果三角形的面积为 12cm^2，一条边比这条边上的高短 2cm，那么这条边的长度等于____________cm.

★★9．在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 BC 上一点，如果这个正方形的面积为 m，△ABE 的面积等于正方形面积的四分之一，那么 BE 的长用含 m 的代数式表示为____________.

★★10．如果在直角三角形中，一个锐角是另一个锐角的 3 倍，那么这个三角形中最小的一个角等于____________度.

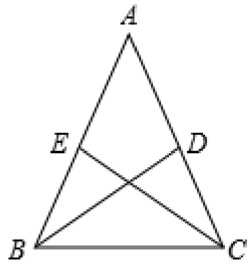
★★11．在直角坐标平面中，如果线段 AB 的两个端点的坐标分别为（3，5）和（−1，2），那么线段 AB 的长为____________.

★★12．已知在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AB=16cm，那么中线 CD=____________cm.

★★13．如果在△ABC 中，AB=5，BC=4，边 AC 的垂直平分线交边 AB 于点 D，那么△BCD 的周长等于____________.

★14．到点 A 的距离等于 6cm 的点的轨迹是____________________.

★★15．已知：如图，AB=AC，要使 BD=CE，还需添加一个条件，这个条件可以是________________________.



（第 15 题）

★★16．命题：“同角的余角相等”的逆命题是________________________.

二、选择题：

★17. 下列二次根式中，是最简二次根式的是……………………………………………………（　　）.

（A）$\sqrt{8}$　　（B）$\sqrt{\frac{1}{2}}$　　（C）$\sqrt{x+y^3}$　　（D）$\sqrt{xy^3}$

★18. 如果正比例函数图像与反比例函数图像的一个交点的坐标为（2，3），那么另一个交点的坐标为 ………………………………………………………………………（　　）.

（A）（3，2）　　（B）（2，−3）　　（C）（−2，3）　　（D）（−2，−3）

★★19. 如果三角形的三个内角的度数之比为 1∶2∶3，那么这个三角形的三条边长之比为…………………………………………………………………………（　　）.

（A）1∶2∶3　　（B）1∶4∶9　　（C）1∶$\sqrt{3}$∶2　　（D）1∶$\sqrt{2}$∶$\sqrt{3}$

★★20. 下列命题中，假命题是………………………………………………（　　）.

（A）平面中，过一点有且只有一条直线平行于已知直线

（B）平面中，过一点有且只有一条直线垂直于已知直线

（C）平面中，垂直于同一条直线的两条不重合的直线互相平行

（D）平面中，平行于同一条直线的两条不重合的直线互相平行

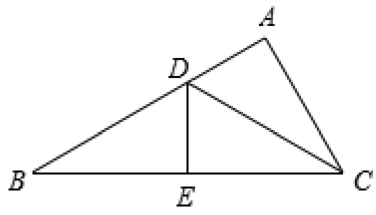
三、

★★21. 计算：$\sqrt{12}+\sqrt{0.5}-3\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.　　★★22. 解方程：$2x(x-2)=5$

★★23. 已知方程 $x^2+2kx+x+k^2=0$ 有实数根，求 k 的取值范围.

★★24．已知：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，$\angle B=30°$，CD 平分$\angle C$，交边 AB 于点 D，E 是边 BC 的中点．

求证：$DE\perp BC$．

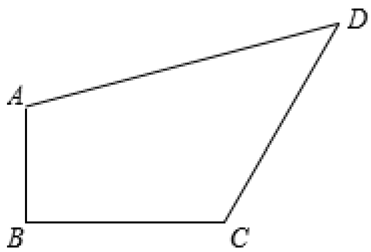


（第 24 题）

★★25．已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$，$\angle C=120°$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{3}$，$AD=4\sqrt{2}$．

求：四边形 $ABCD$ 的面积．

解：



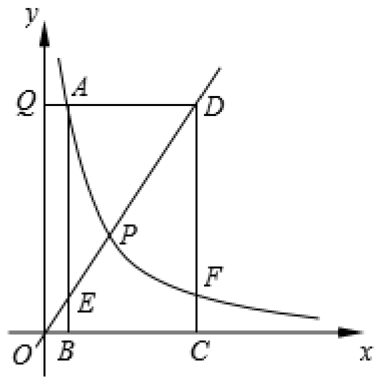
（第 25 题）

★★26．某种型号的优盘经过两次降价后，每只由原来的 200 元下降至 128 元，求这种型号的优盘平均每次降价的百分率．

★★★27．已知：如图，正比例函数的图像与反比例函数的图像都经过点 P（2，3），点 D 是正比例函数图像上的一点，过点 D 分别作 x 轴与 y 轴的垂线，垂足分别为点 C 和点 Q，DC、DQ 分别交反比例函数的图像于点 F 和点 A，过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 B，AB 交正比例函数的图像于点 E．

（1）当点 D 的纵坐标为 9 时，求：点 E 的坐标．

（2）当点 D 在线段 OP 的延长线上运动时，试猜想 AE 与 DF 的数量关系，并证明你的猜想．

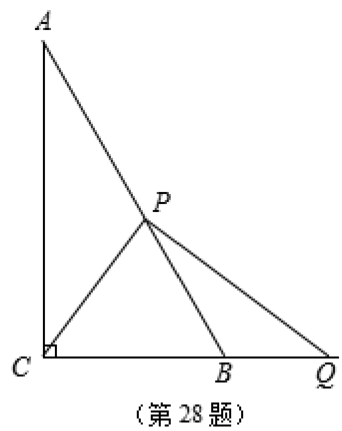


（第 27 题）

★★★28．已知：如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，P 是边 AB 上的一个动点，PQ⊥PC，交线段 CB 的延长线于点 Q．

（1）当 BP=BC 时，求证：BQ=BP．

（2）当∠A=30°，AB=4 时，设 BP=x，BQ=y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域．



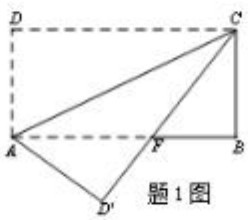
（第 28 题）

综合问题：

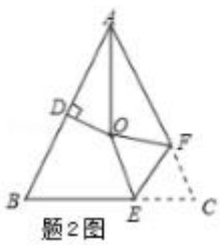
★★★★1、如图，已知长方形 *ABCD* 纸片，*AB*=8，*BC*=4，若将纸片沿 *AC* 折叠，点 *D* 落在 D'，则重叠部分的面积为_______.

如图，△ABC 中，AB=AC，∠BAC=56°，∠BAC 的平分线与 AB 的垂直平分线交于点 O，将∠C 沿 EF（E 在 BC 上，F 在 AC 上）折叠，点 C 与点 O 恰好重合，则∠OEC 为_______度.

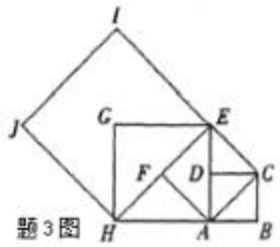
四边形 ABCD 是边长为 1 的正方形，以对角线 AC 为边作第二个正方形 ACEF，再以对角线 AE 为边作第二个正方形 AEGH，如此下去……. 记正方形 ABCD 的边长为 $a_1=1$，按上述方法所作的正方形的边长依次为 $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n$，请根据以上规律写出 a_n 的表达式 a_n =_________.



题1图



题2图



题3图

★★★★(1)问题发现：

如图 1，△*ACB* 和△*DCE* 均为等边三角形，点 *A*、*D*、*E* 在同一直线上，连接 *BE*。

填空：①∠*AEB* 的度数为_________；

②线段 *AD*、*BE* 之间的数量关系是________。

(2)拓展探究：

如图 2，△*ACB* 和△*DCE* 均为等腰直角三角形，且∠*ACB*=∠*DCE*= $90°$，点 *A*、*D*、*E* 在同一直线上，*CM* 为△*DCE* 中 *DE* 边上的高，连接 *BE*。

①求∠*AEB* 的度数；

②猜想线段 *CM*、*AE*、*BE* 之间的数量关系，

并证明。

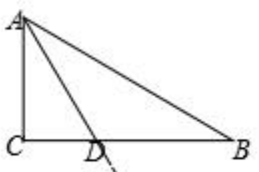


图 1

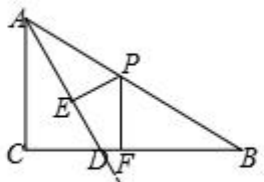


图 2

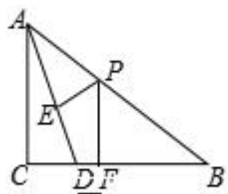


图 3

★★★★2、如图，已知△ABC（$AB>AC$），在∠BAC内部的点P到∠BAC两边的距离相等，且$PB=PC$.

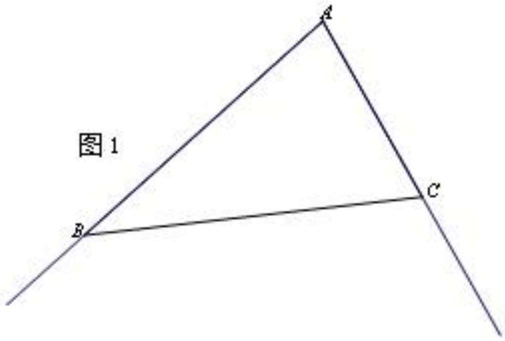
（1）利用尺规作图,确定符合条件的P点（保留作图痕迹，不必写出做法）；

（2）过点P作AC的垂线，垂足D在AC延长线上，求证：$AB-AC=2CD$；

（3）当∠$BAC=90°$时，判断△PBC的形状并证明你的结论；

（4）当∠$BAC=90°$时，设$BP=m$，$AP=n$，直接写出△ABC的周长和面积(用含m、n的代数式表示).

图 1



备用图