高二数学精编教案

目录

第 1 讲　平面向量的坐标表示及其运算

一、知识梳理

1、平面向量的线性运算

（1）若$\vec{a}=\left(x,\ y\right)$，则若$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$；

（2）若$\vec{a}=\left(x_1,\ y_1\right)$、$\vec{b}=\left(x_2,\ y_2\right)$，

则$\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1+x_2,\ y_1+y_2\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(x_1-x_2,\ y_1-y_2\right)$；

（3）设$\lambda\in\mathbf{R}$，若$\vec{a}=\left(x_1,\ y_1\right)$，则$\overrightarrow{\lambda a}=\left(\lambda x_1,\ \lambda y_1\right)$.

2、两个向量平行（共线）的充要条件：

若$\vec{a}=\left(x_1,\ y_1\right)$、$\vec{b}=\left(x_2,\ y_2\right)$，则$\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$.

3、定比分点

设P_1、P_2是直线l上两个点，点P是l上任意一点，若存在一个实数λ使$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则$\lambda$叫做点$P$分向量$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比.

定比分点分点坐标公式：若$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$且 $P_1\left(x_1,\ \ y_1\right)$、$P_2\left(x_2,\ \ y_2\right)$，则点$P$的坐标公式是$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$.

特别地，中点坐标公式：$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$；三角形重心坐标公式：$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\\ y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\end{cases}$.

4、坐标法

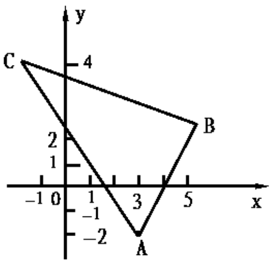
通过建立适当的平面直角坐标系，将平面几何问题转化平面解析几何（平面向量的坐标表示）思想方法.

二、典型例题

★★例 1 、若向量$\vec{a}=\left(x+3,x^2-3x-4\right)$与$\overrightarrow{AB}$相等，其中 A(1，2)，B(3，2)，则$x=$_______.

★★例 2 、已知$\vec{a}=\left(3x+4y,-2x-y\right)$，$\vec{b}=\left(2x-3y+1,-3x+\dfrac{16}{9}y+3\right)$，若$2\vec{a}=3\vec{b}$，试求 x 与 y 的值.

★★★例 3、已知平行四边形三个顶点是(3，-2)，(5，2)，(-1，4)，求第四个顶点的坐标.



★★例 4、已知$\left|\vec{a}\right|=10$，$\vec{b}=\left(3,-4\right)$，且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，求$\vec{a}$.

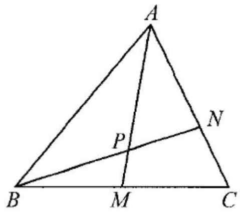
★★例 5、已知$\vec{a}=\left(3,-2\right)$，$\vec{b}=\left(-2,1\right)$，$\vec{c}=\left(7,-4\right)$，用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\vec{c}$.

★★★例 6、如果$A\left(1,-2\right),B\left(4,m\right),C\left(-2,m-1\right)$在一直线上，试求 m 的值.

★★★例 7、设$\overrightarrow{OA}=(1,-2)$，$\overrightarrow{OB}=(a,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(-b,0)$，$a>0,b>0$，$O$ 为坐标原点，若 A、B、C 三点共线，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$的最小值 ________________.

三、拓展提高

★★★★1．如图所示，ΔABC 中，点 M 是 BC 的中点，点 N 在 AC 边上，且 $AN=2NC$，AM 与 BN 相交于点 P，求 $AP:PM$ 的值.



★★★★2．已知向量 $\vec{u}=(x,y)$ 与向量 $\vec{v}=(y,2y-x)$ 的对应关系用 $\vec{v}=f(\vec{u})$ 表示.

（1）证明：对任意向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及常数 m、n，恒有 $f(m\vec{a}+n\vec{b})=mf(\vec{a})+nf(\vec{b})$ 成立；

（2）设 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,0)$，求向量 $f(\vec{a})$ 与 $f(\vec{b})$ 的坐标；

（3）求使 $f(\vec{c})=(p,q)$（p、q 为常数）的向量 $\vec{c}$ 的坐标.

四、巩固练习

★★1、已知 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$，当 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-3\vec{b}$ 平行，实数 k 等于__________.

★2、设向量 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 3)$，且点 A 的坐标为 $(1,\ 2)$，则点 B 的坐标为__________.

★★3、已知向量 $\vec{a}=(1,\ \sin\theta)$，$\vec{b}=(1,\ \sqrt{3}\cos\theta)$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为__________.

★★4、已知向量 $\vec{a}=(-2,\ 2)$，$\vec{b}=(5,\ k)$，若 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 不超过 5，则实数 k 的取值范围是______.

★5、若 $M(3,\ -2)$、$N(-5,\ -1)$ 且 $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，则点 P 的坐标是__________.

★★6、已知向量 $\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(-1,2)$，且 $\vec{a}+\vec{b}=(1,3)$，则 $|\vec{a}-2\vec{b}|=$____________.

★7、已知 $P_1(2,\ -1)$ 、 $P_2(0,\ 5)$ ，若 $\overrightarrow{P_1P}=2\overrightarrow{PP_2}$ ，则点 P 的坐标是______________.

★★8、已知 $\vec{a}=(1,\ 2)$ 、 $\vec{b}=(0,\ 1)$ ，设 $\vec{m}=\vec{a}+k\vec{b}$ ， $\vec{n}=2\vec{a}-\vec{b}$ ，若 $\vec{m}//\vec{n}$ ，则实数 $k=$________.

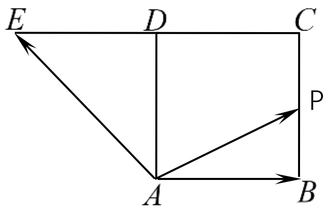
★★★9、在平面直角坐标系中， $O(0,\ 0)$ 、 $P(6,\ 8)$ ，将向量 $\overrightarrow{OP}$ 按逆时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后得向量 $\overrightarrow{OQ}$ ，则点 Q 的坐标是______________.

★★★10、在直角坐标平面内，设点 A、P 的坐标分别为 $(0,\ 1)$ 、$\left(\cos(2t-\frac{\pi}{3}),\ \sin(2t-\frac{\pi}{3})\right)$，则当 t 由 $\frac{\pi}{12}$ 连续变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，向量 $\overrightarrow{AP}$ 所扫过的图形区域的面积是__________

★★★★11、设互相垂直的单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，点 C 在以 O 为圆心、$\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为半径的劣弧 AB 上运动，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 x 、 $y\in\mathbf{R}$，则 $x^2+(y-1)^2$ 的最大值为___________.

★★★★12、在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^\circ$， $AB=1$， $AC=2$， M 是 ΔABC 内部及其边界上一点，且 $AM=\frac{1}{2}$，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+2\mu$ 的最大值是___________.

★★★13、如图,四边形 $ABCD$ 是正方形，延长 CD 至 E，使得 $DE=CD$.若动点 P 从点 A 出发，沿正方形的边按逆时针方向运动一周回到 A 点，其中 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$，下列判断正确的是（　　）



A.满足 $\lambda+\mu=2$ 的点 P 必为 BC 的中点；

B.满足 $\lambda+\mu=1$ 的点 P 有且只有一个；

C.$\lambda+\mu$ 的最大值为 3；

D.$\lambda+\mu$ 的最小值不存在.

★★14、已知 $A(-2,\ 4)$ 、 $B(3,\ -1)$ 、 $C(-3,\ -4)$，且 $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$.求点 M 、 N 的坐标及向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标.

★★★15、已知$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(2,1)$，

（1）求$|\vec{a}+3\vec{b}|$的值；

（2）当k为何实数时，$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$平行？并判断时它们是同向还是反向.

★★★16、已知O是ΔABC的外心，$AB=4$，$AC=2$，$\angle BAC=120^{\circ}$. 若$\overrightarrow{AO}=\mu\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，求$\mu+\lambda$的值.

★★★17、平面内给定三个向量$\vec{a}=(3,2),\vec{b}=(-1,2),\vec{c}=(4,1)$

（1）求$3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$；

（2）求满足$\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$的实数$m$、$n$；

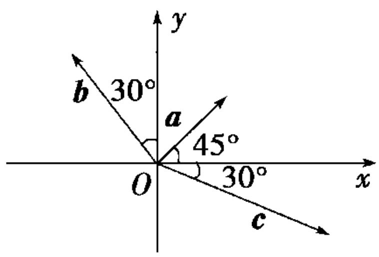
（3）设$\vec{d}=(x,y)$满足$(\vec{d}-\vec{c})//(\vec{a}+\vec{b})$，且$|\vec{d}-\vec{c}|=1$，求$\vec{d}$的坐标.

★★★★18、设$\overrightarrow{OA_n}=\left(x_n,\ y_n\right)$，$\overrightarrow{OA_{n+1}}$满足：$\overrightarrow{OA_{n+1}}=\left(x_n-y_n,\ x_n+y_n\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$．已知$\overrightarrow{OA_1}=\left(3,\ 4\right)$.

（1）求出所有的正整数n，使得$\overrightarrow{OA_n}$与$\overrightarrow{OA_1}$平行；

（2）求数列$\{x_n y_n\}$的前102项的和.

★★★★19、在平面直角坐标系中，向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的方向如图所示，且$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\left|\vec{c}\right|=4$.试用$\vec{a}$与$\vec{b}$的线性运算表示$\vec{c}$.



第 2 讲　平面向量的数量积

一、知识梳理

1、向量的夹角

已知两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB=\theta$　（$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$）叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角（两个向量必须有相同的起点）.

2、向量的数量积

已知两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，它们的夹角为θ，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$|\vec{b}|\cos\theta$称为向量$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影.

设$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$、$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$（$\vec{a}$、$\vec{b}$为非零向量）

（2）$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}}$（可用于判定角是锐角还是钝角）

三、典型例题

★**例 1．** 已知向量$\boldsymbol{\vec{a}}$与$\boldsymbol{\vec{b}}$的夹角为 120°，$|\boldsymbol{\vec{a}}|=1,|\boldsymbol{\vec{b}}|=3$，则$|5\boldsymbol{\vec{a}}-\boldsymbol{\vec{b}}|=$________

★★**例 2．** 已知$|\boldsymbol{\vec{a}}|=2$，$|\boldsymbol{\vec{b}}|=1$，$\boldsymbol{\vec{a}}$与$\boldsymbol{\vec{b}}$夹角为60^0，则向量$\boldsymbol{\vec{m}}=2\boldsymbol{\vec{a}}+\boldsymbol{\vec{b}}$与向量$\boldsymbol{\vec{n}}=\boldsymbol{\vec{a}}-4\boldsymbol{\vec{b}}$的夹角的余弦值为________.

★★★**例 3．** 已知向量$\vec{a}=(1,2),\vec{b}(-2,-4),|\vec{c}|=\sqrt{5}$,若$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{2}$,则$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角为____

★★例 4．两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$互相垂直，给出下列各式：①$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；②$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$；③$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$；④$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$；⑤$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$．其中正确的式子有（　　）

A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

★★★例 5. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$．若$\vec{e}$为平面单位向量，则$|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|$的最大值是______.

★★例 6.若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$均为单位向量，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$的最大值为________

★★★例 7.设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，$<\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}>=60^\circ$则$\left|\vec{c}\right|$的最大值等于___________

★★★例 8. 在△ABC 和△AEF 中，B 是 EF 的中点，AB=EF=1，BC=6，$CA=\sqrt{33}$，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，则$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角的余弦值等于____.

★★例 9. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，$|\vec{a}|=1$，且对任意实数 x，不等式$|x\vec{a}+2\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$恒成立，则$|\vec{b}|$的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{2}$，$+\infty)$　　B．$(\frac{1}{2}$，$+\infty)$　　C．$[1$，$+\infty)$　D．$(1$，$+\infty)$

★★例 10.已知$\vec{a}$、$\vec{b}$都是非零向量，且$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}-2\vec{b}$垂直，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ。

三、拓展提高

★★★1.已知$\vec{\boldsymbol{a}}$与$\vec{\boldsymbol{b}}$均为单位向量，其夹角为θ，有下列四个命题

$p_1:\left|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right|>1\Leftrightarrow\theta\in[0,\frac{2\pi}{3})$　　$p_2:\left|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right|>1\Leftrightarrow\theta\in(\frac{2\pi}{3},\pi]$

$p_3:\left|\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}\right|>1\Leftrightarrow\theta\in[0,\frac{\pi}{3})$　　$p_4:\left|\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}\right|>1\Leftrightarrow\theta\in(\frac{\pi}{3},\pi]$

其中的真命题是（　　）　A．p_1，p_4　B．p_1，p_3　C．p_2，p_3　D．p_2，p_4

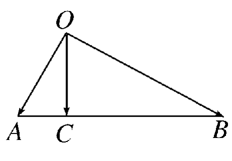
★★★2.设向量$\vec{\boldsymbol{a}}=(4\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{\boldsymbol{b}}=(\sin\beta,4\cos\beta)$，$\vec{\boldsymbol{c}}=(\cos\beta,-4\sin\beta)$.

（1）若$\vec{\boldsymbol{a}}$与$\vec{\boldsymbol{b}}-2\vec{\boldsymbol{c}}$垂直，求$\tan(\alpha+\beta)$的值；

（2）求$\left|\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}\right|$的最大值；

（3）若$\tan\alpha\tan\beta=16$，求证：$\vec{\boldsymbol{a}}\parallel\vec{\boldsymbol{b}}$.

★★★★3.已知$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点 C 在$\angle AOB$内，且$\angle AOC=30°$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (m，$n\in$R)，则$\frac{m}{n}$等于（　）



A. $\frac{1}{3}$　　B．3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

四、巩固练习

★1、已知$\vec{a}=(1,\ 2)$、$\vec{b}=(-1,\ 3)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角的余弦值等于__________.

★★2、已知点$O(0,\ 0)$、$A(1,\ -2)$在以$\vec{e}=\left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$为方向向量的直线$l$上的投影分别是$O_1$、$A_1$，若$\overrightarrow{O_1A_1}=\lambda\vec{e}$，则实数$\lambda=$________.

★★3、若非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$，则$\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角大小为__________.

★★4、 已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}\perp\vec{b}$，且$\{|\vec{a}|,|\vec{b}|,|\vec{c}|\}=\{1,2,3\}$，则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$的最大值是__________.

★★5、在ΔABC中，$\angle BAC=120^\circ$，$AB=2$，$AC=1$，点D在BC边上且$DC=2BD$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$___________.

★★★6、在ΔABC中，$\angle A=90^\circ$，ΔABC的面积为1．若$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=4\overrightarrow{NC}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的最小值为___________.

★★★7、已知正三角形ABC的边长为$\sqrt{3}$，点M是ΔABC所在平面内的任一动点，若$|\overrightarrow{MA}|=1$，则$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$的取值范围为___________.

★★8、已知A、B、C是单位圆上三个互不相同的点.若$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最小值是（　　）

（A）0　　（B）$-\frac{1}{4}$　　（C）$-\frac{1}{2}$　　（D）$-\frac{3}{4}$

★★★9、已知向量$\vec{a}$和$\vec{b}$满足条件：$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$.若对于任意实数$t$，恒有$|\vec{a}-t\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{b}|$，则在$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}-\vec{b}$这四个向量中，一定具有垂直关系的两个向量是（　　）

A.$\vec{a}$与$\vec{a}-\vec{b}$　　B. $\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$　　C. $\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$　　D. $\vec{b}$与$\vec{a}+\vec{b}$

★★★10、设θ为两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角，已知对任意实数t，$\left|\vec{b}-t\vec{a}\right|$的最小值为 2，则（　　）

（A）若θ确定，则$\left|\vec{a}\right|$唯一确定　　（B）若θ确定，则$\left|\vec{b}\right|$唯一确定

（C）若$\left|\vec{a}\right|$确定，则θ唯一确定　　（D）若$\left|\vec{b}\right|$确定，则θ唯一确定

★★★11、已知P_0是ΔABC中AB边上一定点且$AB=4P_0B$，P是AB边上任意一点，恒有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\ge\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则（　　）

（A）$\angle ABC=90^\circ$　（B）$\angle BAC=90^\circ$　（C）$AB=AC$　（D）$AC=BC$

★★12、在边长为 2 的等边三角形ABC中，D是AB的中点，E是AC边上一动点，则$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}$的取值范围是_____________.

★★13、若平面向量$\vec{a},\ \vec{b}$满足:$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|\le 3$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值是_________.

★★★14、已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，若对任意单位向量$\vec{e}$，均有$\left|\vec{a}\cdot\vec{e}\right|+\left|\vec{b}\cdot\vec{e}\right|\le\sqrt{6}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值等于_________.

★★★15、已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足：$\vec{a}\cdot\vec{c}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=6$，$\left|\vec{c}\right|=2$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=6$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的取值范围为___________.

★16、已知$\vec{a}=(2,4)$,$\vec{b}=(1,1)$,若$\vec{b}\perp(\vec{a}+\lambda\vec{b})$,则实数$\lambda=$__________.

★17、若$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,且$\vec{c}\perp\vec{a}$,则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为__________.

★★18、已知$\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{CA}\right|=5$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$__________.

★★★19、已知向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$，$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为60°，当$1\le m\le 2$，$0\le n\le 2$时，$\left|m\vec{a}+n\vec{b}\right|$的最大值为__________.

★★20、$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$满足$\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$且$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{2}$，则$\Delta ABC$一定是（　　）

A．三边均不相等的三角形　B．直角三角形　C．等腰非等边三角形　D．等边三角形

★★21、 在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}$ =(2, 3)，$\overrightarrow{AC}$ =(1, k)，且△ABC 的一个内角为直角，求 k 值

★★22、已知$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$.

（1）若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为150°，求$|\vec{a}+2\vec{b}|$；

（2）若$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角大小.

★★★23、已知$|\overrightarrow{e_1}|=2$，$|\overrightarrow{e_2}|=1$，$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$的夹角为60°，若向量$2t\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2}$与$\overrightarrow{e_1}+t\overrightarrow{e_2}$的夹角为钝角，求实数$t$的取值范围.

第 3 讲 平面向量综合复习

一、选择题

★1.对于向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 和实数 λ，下列命题中是真命题的是（　　）

A.若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}=\vec{0}$ 或$\vec{b}=\vec{0}$　　B.若 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$，则 $\lambda=0$ 或$\vec{a}=\vec{0}$

C.若$\vec{a}^2=\vec{b}^2$,则$\vec{a}=\vec{b}$ 或$\vec{a}=-\vec{b}$　　D.若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$

★2.设平面向量$\vec{a}=(-2，1)$，$\vec{b}=(\lambda，-1)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则λ的取值范围是

A、$(-\frac{1}{2},2)\cup(2,+\infty)$　　B、(2，+∞)

C、$(-\frac{1}{2}，+\infty)$　　D、$(-\infty，-\frac{1}{2})$

★★3.设$\vec{a}=(x_1，y_1)$，$\vec{b}=(x_2，y_2)$，则下列为$\vec{a}$与$\vec{b}$共线的充要条件的有

①存在一个实数λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$或$\vec{b}=\lambda\vec{a}$；②$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$;

③$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$；④$(\vec{a}+\vec{b})//(\vec{a}-\vec{b})$

A、1 个　　B、2 个　　C、3 个　　D、4 个

★★4.若函数 y=2sin(x+θ)的图象按向量($\frac{\pi}{6}$，2)平移后，它的一条对称轴是 x=$\frac{\pi}{4}$，则θ的一个可能的值是

A、$\frac{5\pi}{12}$　　B、$\frac{\pi}{3}$　　C、$\frac{\pi}{6}$　　D、$\frac{\pi}{12}$

★★5.ΔABC 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，则ΔABC 必约

A、直角三角形　　B、钝角三角形

C、锐角三角形　　D、等腰三角形

★★6.已知ΔABC 的三个顶点 A、B、C 及所在平面内一点 P 满足$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则点 P 与ΔABC 的关系是

A、P 在ΔABC 内部　　B、P 在ΔABC 外部

C、P 在直线 AB 上　　D、P 在ΔABC 的 AC 边的一个三等分点上

★★7.在边长为 1 的正三角形 ABC 中，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$

A、1.5　　B、－1.5　　C、0.5　　D、－0.5

★★★8.点 O 在△ABC 内部且满足$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{\mathbf{0}}$,则△ABC 的面积与凹四边形 ABOC 的面积之比是（　　）

A.0　　B.$\dfrac{3}{2}$　　C.$\dfrac{5}{4}$　　D.$\dfrac{4}{3}$

★★★9.在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的高，则下列等式不成立的是（　　）

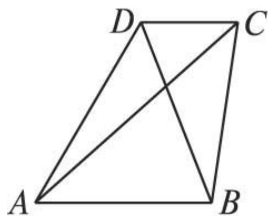
A.$|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}$　　B.$|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$

C.$|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{CD}$　　D.$|\overrightarrow{CD}|^2=\dfrac{(\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$

★★10.若$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$是一组基底，向量$\vec{\gamma}$ =x·$\vec{\alpha}$ +y·$\vec{\beta}$（x,y∈**R**），则称(x,y)为向量$\vec{\gamma}$在基底$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$下的坐标.现已知向量$\vec{\alpha}$在基底$\vec{p}$ =(1,-1),$\vec{q}$ =(2,1)下的坐标为(-2,2)，则$\vec{\alpha}$在另一组基底$\vec{m}$ =(-1,1),$\vec{n}$ =(1,2)下的坐标为（　　）

A.（2，0）　　B.（0，-2）　　C.（-2，0）　　D.（0，2）

★★★11.如图,在四边形 ABCD 中,$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{DC}|=4$,$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{DC}=0$,$|\overrightarrow{AB}|\bullet|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{BD}|\bullet|\overrightarrow{DC}|=4$,则$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\bullet\overrightarrow{AC}$的值为(　　)

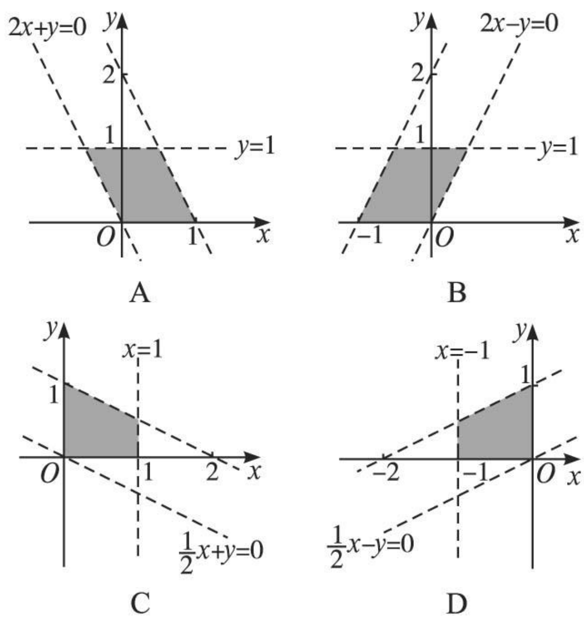


A.2　　B.$2\sqrt{2}$　　C.4　　D.$4\sqrt{2}$

★★★★12.向量$\overrightarrow{OA}=(1,\dfrac{1}{2})$,$\overrightarrow{OB}=(0,1)$,

若动点 P(x,y)满足条件$\begin{cases}0<\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OA}<1,\\0<\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OB}<1,\end{cases}$

则 P(x,y)的变动范围(不含边界的阴影部分)是(　　)



★★★13.设两个向量 $\boldsymbol{a}$=(λ+2,λ²-cos²α)和 $\boldsymbol{b}$=(m, $\frac{m}{2}+\sin\alpha$),其中 λ,m,α 为实数,若 $\boldsymbol{a}$=2$\boldsymbol{b}$,则 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围是(　　)

A.［-6,1］　　B.［4,8］　　C.(-∞,1］　　D.［-1,6］

★★14.△ABC 中，a、b、c 分别为∠A、∠B、∠C 的对边，如果 a、b、c 成等差数列，∠B=30°，△ABC 的面积为 $\frac{3}{2}$，那么 b 等于（　　）

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$　　D. $2+\sqrt{3}$

★★★15.在△ABC 中，a、b、c 分别是内角 A、B、C 所对的边, $C=\frac{\pi}{3}$.若 $\overrightarrow{OD}=a\overrightarrow{OE}+b\overrightarrow{OF}$,且 D、E、F 三点共线（该直该不过点 O），则△ABC 周长的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{9}{4}$

★★16.已知 O 是平面上的一定点,A、B、C 是平面上不共线的三点,动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C})$,λ∈(0,+∞),则动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的（　　）

A.外心　　B.内心　　C.重心　　D.垂心

二、填空题

★17.若 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{CD}=-5\overrightarrow{e_1}$,且 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，则四边形 ABCD 是______________.

★★18. 在△ABC 中，若 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}<0$ ，$S_{\Delta ABC}=\frac{15}{4}$ ，$|\overrightarrow{AB}|=3$ ，$|\overrightarrow{AC}|=5$ ，则∠BAC=__________.

★★19.已知向量 $\vec{a}$ =(cosα,sinα), $\vec{b}$ =($\sqrt{3}$,-1)，那么 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值是_________.

★★★20.设 $\vec{m}$ =(a,b)， $\vec{n}$ =(c,d)，规定两向量 m, n 之间的一个运算“$\otimes$”为 $\vec{m}\otimes\vec{n}$ =(ac－bd，ad+bc)，若已知 $\vec{p}$ =(1，2)， $\vec{p}\otimes\vec{q}$ =(－4，－3)，则 $\vec{q}$ =___________

三、解答题

★★21.已知平面内三向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 的模为 1，它们相互之间的夹角为 120^0。

（1）求证：$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$；（2）$|k\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|>1$，求 k 的取值范围。

★★★22. 设两个向量 $\overrightarrow{e_1}$ 、 $\overrightarrow{e_2}$ 满足 $|\overrightarrow{e_1}|=2$，$|\overrightarrow{e_2}|=1$， $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 60^0，若向量 $\overrightarrow{m}=2\lambda\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2}$ 与向量 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为钝角，求实数 λ 的取值范围。

★★★23.△ABC 内接于以 o 为圆心，l 为半径的圆，且 $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{o}$，求：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$， $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$。

★★24.已知 $\vec{a}$ =(cosα，sinα)， $\vec{b}$ =(cosβ，sinβ)，0<α<β<π。

（1）求证： $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直；

（2）若 k$\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ －k$\vec{b}$ 的长度相等，求 β－α 的值（k 为非零的常数）

★★★25.已知 A(3，0)，B(0，3)，C(cosα，sinα)。（1）若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，求 sin2α 的值；（2）若 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{13}$，且 α∈(0，π)，求 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角。

★★★26.已知$\vec{a}$=(2，2)，$\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}$=－2。

（1）求向量$\vec{b}$；（2）若$\vec{t}$=(1，0)，且$\vec{b}\perp\vec{t}$，$\vec{c}$=(cosA，$2\cos^2\frac{C}{2}$)，其中 A、C 是△ABC 的内角，若 A、B、C 依次成等差数列，求$|\vec{b}+\vec{c}|$的取值范围。

★★★★27.已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$及实数 x、y，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{c}=\vec{a}+(x^2-3)\vec{b}$，$\vec{d}=-y\vec{a}+x\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，若$\vec{c}\perp\vec{d}$，且$|\vec{c}|\le\sqrt{10}$。

（1）求 y 关于 x 的函数关系 y=f(x)及定义域;

（2）求函数 f(x)的单调区间。

★★★28、平面向量$\overrightarrow{OA}$=(1，7)，$\overrightarrow{OB}$=(5，1)，$\overrightarrow{OP}$=(2，1)，点 M 为直线 OP 上一动点。

（1）当$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$取最小值时，求$\overrightarrow{OM}$的坐标;（2）当点 M 满足（1）中的条件和结论时，求∠AMB 的余弦值。

★★★29、（1）求 y 是 x 的函数；（2）是否在直线 y=2x 和直线 y=3x 上分别存在一点 B、C，使得满足∠BPC 为锐角时 x 取值集合为{x| x<－$\sqrt{7}$ 或 x>$\sqrt{7}$ }？若存在，求出这样的 B、C 的坐标；若不存在，说明理由。

★★★★30、已知 $\vec{a}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=4\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$，其中 $\overrightarrow{e_1}$ =(1，0)，$\overrightarrow{e_2}$ =(0，1)。

（1）计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}+\vec{b}|$的值；

（2）如果存在 n 个不全为零的实数 k_1，k_2，…，k_n，使 $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{o}$ 成立，则称 n 个向量 $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{a_n}$ “线性相关”，否则为“不线性相关”，依此定义，三个向量 $\overrightarrow{a_1}$ =(－1，1)，$\overrightarrow{a_2}$ =(2，1)，$\overrightarrow{a_3}$ =(3，2)是否为“线性相关”的，请说明你的判断根据；

（3）平面上任意三个互不共线的向量 $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$ 一定是线性相关的吗？为什么？

第 4 讲　直线的方程

一、知识梳理

1、直线的方向向量

设直线l与非零向量$\vec{d}$所在的直线平行或者重合，将$\vec{d}$叫做直线l的一个方向向量.

2、直线的法向量

设直线l与非零向量$\vec{n}$所在的直线垂直，将$\vec{n}$叫做直线l的一个法向量.

3．直线的点方向式方程

若直线l经过点(x_0,y_0)，且它的一个方向向量是$\vec{d}=(u,v)(uv\neq 0)$，则该直线的点方向式方程为：$\dfrac{x-x_0}{u}=\dfrac{y-y_0}{v}$.

4．直线的点法向式方程

若直线l经过点(x_0,y_0)，且它的一个法向量是$\vec{n}=(a,b)(uv\neq 0)$，则该直线的点法向式方程为：$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

5.直线的一般式方程为：$ax+by+c=0$.

四、典型例题

题型一：直线的点方向式方程

★例 1 、写出经过点$P(3,-5)$且方向向量为$\vec{d}=(3,4)$直线l的点方向式方程.

★例 2 、写出下列直线的一个方向向量

1) $\dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{y-3}{3}$

2) $x=1$

★★例 3 、已知ΔABC的三个顶点的坐标分别为$A(2,1),B(-2,3),C(6,-7)$，求过点A且与BC平行的直线方程；

★★★**例 4** 、已知ΔABC的三个顶点的坐标分别为$A(2,1),B(-2,3),C(6,-7)$，求 AC 边上中线所在的直线方程。

★★★**例 5** 、点$P(2,y)$在$A(-2,-1),B(5,4)$两点所连的直线上，求 y 的值。

题型二：直线的点法向式方程

★**例 6** 、求经过点 P 且垂直于$\vec{n}$的点法向式方程：

1） $P(3,-5),\vec{n}=(1,2)$

2） $P(3,0),\vec{n}=(3,-4)$

3） $P(3,-5),\vec{n}=(1,0)$

4） $P(0,0),\vec{n}=(0,2)$

★★**例 7**、已知ΔABC的三个顶点为$A(1,6),B(-1,-2),C(6,3)$

（1）求 AB 边上的高 CF 所在直线的方程；

（2）求 AC 边的垂直平分线的方程；

★★**例 8** 、求过点$(2,-1)$，且以直线$3x-2y+5=0$的法向量为方向向量的直线方程.

★★★**例 9** 、已知直线l 过点$A(2,3)$ ，且$M(1,2),N(-5,4)$ 两点到直线l的距离相等，求直线l的方程.

★★★**例 10** 、若直线$l_1:(2-m)x+my+3=0$的法向量恰为直线$l_2:x-my-3=0$的方向向量，求实数 m 的值

三、拓展提高

★★★★1.已知ΔABC的三个顶点坐标为$A(1,1),B(5,4),C(3,8)$，过点 A 作直线l将三角形的面积分成 1：3 的两部分，求直线l的方程。

★★★★2．已知三角形的三个顶点$A(2,1),B(-2,3),C(6,-7)$，求：

（1）AC 边上的中线及高的直线方程;

（2）BC 边上的中垂线的直线方程.

四、巩固练习

★1.直线 3x-y+2=0 的单位法向量是_____________.

★2.过 P(4,-3)且垂直 y 轴的直线方程是 _____________.

★★3.若直线(2-m)x+my+3=0 的一个法向量恰为直 线 x-my-3=0 的一个方向向量，求实数 m 的值_____________.

★4.如果向量$\vec{d}$是直线 l 的 一个方向向量，点$P(x_0,y_0)$是直线 l 上的任意一点。

（1）如果$d=(u,v)$的坐标都不为零，那么直线 l 的点方向式方程为_____________.

（2）若 u=0，$v\neq 0$则直线 l 的方程为_____________.

（3）若$v=0,u\neq 0$，则直线 l 的方程为_____________.

★★5.求过点 P（3，-5）且与向量$\vec{d}=(-3,4)$）平行的直线 l 的点方向式方程_____________.

★6.求经过 A(-3,-2) ,B(3,-7)两点的直线 l 的点方向式方程_____________.

★★7.直线 l 的方程为 2x-3y+7=0，则其点方 向式方程可以是_____________.

点法向式方 程可以是_____________.

★8.观察下列直线,并指出直线必过的一个点和直线的一个方向向量:

(1)$\frac{x-3}{3}=\frac{y+5}{4}$　(2) $-4(x-4)=7(y-6)$　(3)$x+3=0$　(4)$y=2$

★★9.已知点 P(2,-1)及直线 l:3x+2y-5=0，

求： (1)过点 P 且与 l 平行的直线方程;（点方向式）

(2)过点 P 且与 l 垂直的直线方程.（点法向式）

★★★10.正方形 ABCD 的顶点 A 的坐标为(-4,0)，它的 中心 M 的坐标为(0,3)，求正方形两条对角线 AC、BD 所在的直线方程.（AC 用点方向式，BD 用点法向式）

★★★11.已知 A、B、C 的坐标分别为(1,3)， (b,0)， (0,c)，其中 b、c 均为正整数，问过这三点的 直线 l 是否存在？若存在，求出 l 的方程；若 不存在，说明理由.

★★★12. 直线 l 过 点（2,1），方向向量为（3,4），求 l 与两坐标轴所围成的三角形面积

★★★★13.ΔABC 的顶点为 A(2,-1),B(4,3),C(3,-2)

（1）求 BC 边上的中线 AD 所在直线的点方向式方程

（2）若过点 A 作直线 l，它把ΔABC 的面积分成$1:2$两部分，求直线 l 的方程。(点方向式）

第 5 讲　直线的倾斜角和斜率

一、知识梳理

1、直线的倾斜角

设直线l与x轴相交于点M，将x轴绕着点M按逆时针方向旋转至与直线l重合时所成的最小正角α叫做直线l的倾斜角；当直线l与x轴平行或重合时，规定其倾斜角$\alpha=0$.

因此直线的倾斜角的取值范围是$\left[0,\ \pi\right)$.

2、直线的斜率

当$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$时，将$k=\tan\alpha$叫做直线l的斜率；当$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，直线的斜率k不存在

一般地，经过点$P_1\left(x_1,\ y_1\right)$、$P_2\left(x_2,\ y_2\right)$的直线的斜率$k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ \left(x_1\neq x_2\right)$.

3、直线的倾斜角$\alpha=\begin{cases}\arctan k & \left(k\geq 0\right)\\ \pi+\arctan k & \left(k<0\right)\end{cases}$，其中$k$为直线的斜率.

方向向量$\vec{d}$	法向量$\vec{n}$	斜率k	倾斜角α
$\left(u,\ v\right)$		$\dfrac{v}{u}$	
	$\left(a,\ b\right)$		
		k	$\begin{matrix}\arctan k & \left(k\geq 0\right)\\ \pi+\arctan k & \left(k<0\right)\end{matrix}$

4、直线的点斜式方程：$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$；

直线的斜截式方程：$y=kx+b$；

二、典型例题

★例 1．已知直线l经过点P且倾斜角为α，写出直线的点斜式方程

1） $P\left(-2,5\right),\alpha=60^{\circ}$

2) $P\left(3,-4\right),\alpha=135^{\circ}$.

★★例 2．下列命题中正确的是______（填写序号）

（1）直线 l 的倾斜角为 α，则斜率为 $\tan\alpha$；

（2）直线的斜率为 k，则直线的倾斜角为 $\arctan k$；

（3）与 y 轴平行的直线没有倾斜角；

（4）任何一条直线都有倾斜角，但不是都有斜率.

★★例 3．直线 l 经过点 $P\left(1,2\right),Q\left(m,3\right)$，求直线 l 的斜率、倾斜角；

★★例 4．已知点 $M\left(-4,3\right),N\left(2,15\right)$，经过点 M 的直线 l 的倾斜角是直线 MN 倾斜角的两倍，求直线 l 的斜率。

★★★例 5.（1）直线 l 经过两点 $A\left(\sin\theta,\cos^{2}\theta\right),B\left(0,1\right)$，求直线 l 的倾斜角的范围

（2）已知直线 l 的斜率 $k\in\left(-\infty,\sqrt{3}\right]$，求直线的倾斜角 θ 的范围。

★★例 6.（1）已知直线 l 经过点 $\left(0,b\right)$，斜率为 k，求直线 l 的方程；

（2）已知直线 l 在 y 轴上的截距为—3，且经过点 $\left(-2,1\right)$，求直线 l 的方程。

★★例 7．求过点 $P\left(-3,24\right)$ 且垂直于直线 $3x+y-3=0$ 的一般方程。

★★例 8. 求经过点 $P\left(3,-4\right)$ 且两坐标轴上截距相等的直线方程；

★★★例 9．求经过 $A\left(0,1\right)$ 作一直线 l，使它夹在直线

$l_1: x-3y+10=0, l_2: 2x+y-8=0$ 之间的线段恰被点 A 平分，求直线 l 的方程.

★★★例 10．不论 m 为何值，直线 $2x-my+1-3m=0$ 均过定点，求此定点的坐标。

三、拓展提高

★★★★1.已知 A,B 两点分别在 x 轴和 y 轴上，点 $P\left(-5,4\right)$ 分 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 $\dfrac{1}{2}$，求直线 AB 的方程。

★★★★2．一条直线 l 过点 $P\left(1,4\right)$，分别交 x 轴，y 轴的正半轴于 A，B 两点，O 为原点，求 ΔAOB 的面积最小时直线 l 的方程.

四、巩固练习

★1．直线 $ax+by=ab(a<0,b<0)$ 的倾斜角是……（　　）

（A）$\arctan(-\dfrac{b}{a})$　（B）$\arctan(-\dfrac{a}{b})$　（C）$\pi-\arctan(\dfrac{b}{a})$　（D）$\pi-\arctan(\dfrac{a}{b})$

★★2．若 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$，则直线 $y=x\cot\alpha$ 的倾斜角是………（　　）

（A）α　（B）$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　（C）$\alpha-\dfrac{\pi}{2}$　（D）$\pi+\alpha$

★★3．直线 $x\cos\theta+y+m=0$ 的倾斜角范围是……………（　　）

$(A)[0,\pi)$　$(B)[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}]$　(C) $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}]$　$(D)[0,\dfrac{\pi}{4}]\cup[\dfrac{3\pi}{4},\pi)$

★★4．l_1：$y=mx$，l_2：$y=nx$，设 l_1 的倾斜角是 l_2 倾斜角的 2 倍，l_1 的斜率是 l_2 斜率的 4 倍，并且 l_1 不平行于 x 轴，那么 mn=…………………（　　）

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B)2　　(C)－3　　(D) 1

★★5．若直线 $ax+by+c=0$ 在第一、二、三象限，则………（　　）。

（A）$ab>0,bc>0$　　（B）$ab>0,bc<0$　　（C）$ab<0,bc>0$　　（D）$ab<0,bc<0$

★6．下列四个命题中真命题是…………………………（　　）

(A)经过点 $P(x_o,y_o)$的直线都可以用方程 $y-y_o=k(x-x_o)$表示.

(B)经过任意两不同点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$的直线都可以用方程$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$表示.

(C)不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示.

(D)经过定点 $A(0,b)$的直线都可以用方程 $y=kx+b$ 表示.

★★7．过点（－2，1）在两条坐标轴上的截距绝对值相等的直线条数有…（　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

★8．若直线的倾斜角为 $\pi+\arctan(-\frac{1}{2})$ 且过点(1,0)，则直线的方程为_____________.

★★9．经过点 P（0，－1）并且倾斜角的正弦值为 $\frac{3}{5}$ 的直线方程为______________.

★★★10．直线经过点 P（－2，－1）并且在两坐标轴上的截距和为 0，则此直线方程为_____.

★★11．直线经过点 P（－2，－1）并且在两坐标轴上的截距相等，则此直线方程为______

★★★12．已知直线 l 过点 $P(-1,2)$，且与以 $A(-2,-3)$,$B(3,0)$为端点的线段有公共点，则直线 l 的斜率的值范围是：___________

★★13．直线 L 过点 P（2，－3）并且倾斜角比直线 $y=2x$ 的倾斜角大 45º，求直线 L 的方程.

★★14、直线 L 在 x 轴上的截距比在 y 轴上的截距大 1 并且经过点（6，－2），求此直线方程.

★★★15．求将直线 $x-y+\sqrt{3}=2$ 绕点 $\left(2,\sqrt{3}\right)$逆时针旋转 $\frac{\pi}{12}$ 后所得直线方程.

第 6 讲　两条直线的位置关系

一、知识梳理

1、两直线的相交、平行与重合

l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$；l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$

设$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 、$D_x=\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}$、$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$

当$D\neq 0$时，直线l_1与l_2相较于一点$\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)$；

当$D=0$时，若$D_x\neq 0$或$D_y\neq 0$，则直线l_1与l_2平行；

若$D_x=D_y=0$，则直线l_1与l_2重合.

2、两直线的夹角公式

l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$；l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$

直线l_1与l_2的夹角公式：$\cos\theta=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}}\sqrt{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}}}$或$\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$.

特别地，$a_1a_2+b_1b_2=0\Leftrightarrow l_1\perp l_2$；$k_1k_2=-1\Rightarrow l_1\perp l_2$.

二、典型例题

★例 1．判断下列各组两直线的位置关系，如果它们相交，求其交点坐标：

① l_1：$3x+5y-12=0$，l_2：$7x-10y-2=0$

② l_1：$x-4y-12=0$，l_2：$x=4$

③l_1：$3x-y-10=0$，l_2：$6x-2y+5=0$

★★例 2．讨论下列直线之间的位置关系：

l_1： $y+1=k_1(x-3)$， l_2： $y-2=k_2(x+3)$

解：对于两条直线方程重新整理，得________________________

$D=$_______________， $D_x=$__________________ $D_y=$________________，

所以当 $D\neq 0$ 时，即______________，两条直线________；

当 $D=0$ 时，即______________，此时 $D_x=$________， $D_y=$________，

当 $D_x=D_y=0$ 时，两条直线________；

当 D_x,D_y 不同时为 0 时，两条直线________，此时 k_1,k_2 满足_________.

★★ 例 3． 是否存在实数 k，使直线 $l_1:3x-(k+2)y+6=0$ 与直线 $l_2:kx+(2k-3)y+2=0$ 平行？若存在，求 k 的值；若不存在，请说明理由.

★★例 4. 若直线 $nx-y-n+1=0$ 与直线 $x-ny=2n$ 的交点在第二象限，求 n 的取值范围.

★★★例 5．讨论下列直线之间的位置关系：

l_1： $x+m^2y+6=0$， l_2： $(m-2)x+3my+2m=0$。

★★★例 6. 已知两直线 $l_1:x+(m+1)y+m-2=0,l_2:2mx+4y+16=0$. 当 m 为何值时，

l_1 与 l_2 （1）相交；（2）平行；（3）重合.

★★★例 7．若三条直线$(m+1)x+8y+2=0$、$x+(m-1)y-4=0$、$x+y-3=0$不能围成三角形，求m的值．

★★例 8．已知点M是直线l：$x-2y-4=0$与x轴的交点，把直线l绕点M顺时针旋转$\frac{\pi}{4}$，求所得到的直线方程的倾斜角．

★★例 9．已知直线l经过点$P(-2,\sqrt{3})$，且与直线l_0：$x-\sqrt{3}y+2=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求直线l的方程．

★★例 10．已知直线$l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，用k_1,k_2表示l_1与l_2的夹角．

★★★例 11．求由方程$\frac{|x|}{2}+|y|=1$所表示的曲线围成的图形的面积．

★★例 12．若直线$ax-y+2=0$与直线$3x-y+b=0$关于直线$y=-x$对称，求a,b的值．

三、拓展提高

★★★★1．已知直线$l: x+y-2=0$，一束光线经过点$P\left(0,\sqrt{3}+1\right)$，以$120^{\circ}$的倾斜角投射到直线$l$上，经$l$反射，求反射光线所在的直线.

★★★★2．已知直线l：$2x-y=0$，$A(0,1)$，$B(2,0)$，$C(4,0)$

(1)在l上求一点P，使$|PB|+|PC|$最小；
(2)在l上求一点Q，使$||QA|-|QB||$最大.

四、巩固练习

★★1、设直线l_1：$ax+2y+3a=0$与直线l_2：$3x+\left(a-1\right)y=a-7$平行.跟下列条件分别求实数a的取值范围.

（1）l_1与l_2相交；（2）l_1与l_2平行；（3）l_1与l_2重合；（4）l_1与l_2垂直.

★★2、已知直线 l_1：$ax+2y+6=0$ 和直线 l_2：$x+(a-1)y+a^2-1=0$.

（1）试判断 l_1 与 l_2 是否平行；

（2）$l_1\perp l_2$时，求 a 的值.

★★3、已知两条直线 l_1：$ax-by+4=0$ 和 l_2：$(a-1)x+y+b=0$.若 $l_1 /\!/ l_2$，且原点到这两条直线的距离相等，求的实数 a、b 的值.

★★4、无论m为何实数，直线$\left(2m-1\right)x-\left(m+3\right)y-m+11=0$恒过定点____________.

★★5、已知直线 l_1：$4x+7y-4=0$，l_2：$mx+y=0$，l_3：$2x+3my-4=0$.当 m 为何值时，三条直线不能构成三角形.

★6、直线 $x+3=0$ 与直线 $\sqrt{3}x-y+2=0$ 的夹角等于______________.

★7、直线 $y-2=0$ 与直线 $x+\sqrt{3}y+3=0$ 的夹角等于______________.

★★8、已知直线 l：$5x+2y+3=0$.

（1）求直线 l_1：$3x+7y-13=0$ 与直线 l 的夹角大小；

（2）设直线 l_2 经过点 $P(1,2)$，且与直线 l 的夹角等于 45°，求 l_2 的方程.

★★9、已知等腰三角形一腰所在直线的方程是 $x-2y-2=0$，底边所在直线的方程是 $x+y-1=0$.若点 $(-2,\ 0)$ 在另一腰上，求该腰所在直线的方程.

★10、过点 $(0,1)$ 且与直线 $x-2y+1=0$ 垂直的直线方程是

A． $2x+y-1=$ (　　B． $2x+y+1=0$

C． $x-2y+2=0$　D． $x-2y-1=0$

★★11.已知直线 $l_1:(a-3)x+(4-a)y+1=0$ 与 $l_2:2(a-3)x-2y+3=0$ 平行，

则 $a=$____________.

★12．如果直线 $ax+2y+1=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 垂直，那么 a 的值为（　　）

(A)1　　(B) $-\dfrac{1}{3}$　　(C) $-\dfrac{2}{3}$　　(D)－2

★★13．$a=0$ 是直线 $x+2ay-1=0$ 与 $(3a-1)x-ay-1=0$ 平行的（　　）

(A)充分不必要条件　(B) 必要不充分条件　(C)充要条件　(D)既不充分也不必要条件

★★★14．设 $\alpha\in\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$，则直线 $x+y\sqrt{1-\cos\alpha}+m=0$ 与直线 $x\sin\alpha+y\sqrt{1+\cos\alpha}+n=0$ 的位置关系是（　　）

(A)平行　　(B)垂直　　(C)斜交　　(D) 平行或者垂直

★★15．直线 $x+y+4=0$ 和直线 $5x-2y=0$ 的夹角的正切值等于（　　）

(A) $\frac{4}{3}$　　(B) $\frac{7}{3}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{3}{7}$

★★16．直线 l_1：$2x-3y+1=0$ 与 l_2：$x-3=0$ 的夹角大小为（　　）

(A) $arc\tan\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{\pi}{2}-arc\tan\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{\pi}{2}-arc\tan\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}+arc\tan\frac{2}{3}$

★★★17．直线 l 绕其上一点 P 逆时针旋转 15º 后得到直线 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$，再逆时针旋转 75º 后得到直线 $x+y-1=0$，则 l 的方程为（　　）

(A) $x-y-1=0$　　(B) $x+y-1=0$　　(C) $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$　　(D) $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$

★★★18．坐标平面上的三条直线 $x-2y+1=0$、$x=1$、$x+ky=0$ 将平面划分为六部分，则实数 k 的值为（　　）

(A) 0 或-2　　(B) -1 或-2　　(C) 0 或-1　　(D) 0，-1 或-2

★★★19．已知直线 l_1：$x+my+6=0$ 与直线 l_2：$(m-2)x+3y+2m=0$，则当实数 m 为何值时：

（1）l_1 与 l_2 平行；　（2）l_1 与 l_2 垂直；　（3）l_1 与 l_2 夹角为 45°.

第 8 讲　点到直线的距离

一、知识梳理

1、点到直线的距离公式：$P\left(x_0,y_0\right)$ 到直线 $l:ax+by+c=0$ 的距离为 $d=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2、两条平行直线 $l_1:ax+by+c_1=0,l_2:ax+by+c_2=0$ 的距离公式：$d=\dfrac{\left|c_1-c_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

点到直线的距离公式：$P\left(x_0,y_0\right)$ 到直线 $l:ax+by+c=0$ 的距离为 $d=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 点到直线的有向距离公式：$P\left(x_0,y_0\right)$ 到直线 $l:ax+by+c=0$ 的有向距离为 $\delta=\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

二、典型例题

1、求点到直线的距离

★例 1:（1）求点 $P(2,3)$ 到直线 $5x+12y-3=0$ 的距离.

（2）求点 $P_0\left(-1,2\right)$ 到直线的距离：①l∶$3x=2$；②$3y=2$

（3）求两条平行线 $2x-7y+8=0$ 和 $2x-7y-6=0$ 之间的距离.

★例 2.求过点 $A\left(-1,2\right)$ 且与原点的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的直线方程距离

★★例 3.直线 l_1 过点 $A\left(0,1\right)$,直线 l_2 过点 $B(5,0)$,如果 $l_1 // l_2$ 且 l_1 与 l_2 的距离为 5；求 l_1 l_2 的距距离离

2.点到直线的距离公式及其应用.

★**例 1.** 已知ΔABC的三个顶点坐标分别为$A(1,3)$、$B(3,1)$、$C(-1,0)$,求ΔABC的面积.

★★**例 2.** 已知直线l：$y=kx+1$与两点$A(-1,5)$、$B(4,-2)$，若直线l与线段AB相交，求k的取值范围.

★★例 3.已知直线l在x轴和y轴上的交点分别是（–9，0）和（0，9）.

（1）写出l的方程；

（2）在l上求一点P，使P点到点F_1（–3，0）和点F_2（3，0）的距离之和最小，并求出这最小值.

三、**拓展与提高**

★★例 1：已知直线l：$ax+by+c=0$和点P（x_0，y_0），点P到直线l的有向距离d（P，l）用如下方法规定：若$b\neq0$，$d(P,l)=\dfrac{|b|(ax_0+by_0+c)}{b\sqrt{a^2+b^2}}$；若$b=0$，$d(P,l)=\dfrac{ax_0+c}{a}$.

（1）已知直线l：$3x-4y+12=0$，原点O到直线l的有向距离d（O，l）等于______________；

（2）点A（–5，6）到直线m：$2x+3=0$的有向距离d（A，m）等于________________.

（3）已知点A（2，1）和点B（3，–1），是否存在通过点A的直线l，使得d（B，l）=2，如果存在，求出所有这样的直线l；如果不存在，说明理由.

★★★例 2：如图，平面中两条直线l_1和l_2相交于点 O，对于平面上任意一点 M，若 p 、q 分别是 M 到直线l_1和l_2的距离，则称有序非负实数对（ p ， q ）是点 M 的“距离坐标”．已知常数 $p\geq 0$，$q\geq 0$，给出下列命题：

①若 $p=q=0$，则“距离坐标”为（0，0）的点有且仅有 1 个；

②若 $pq=0$，且 $p+q\neq 0$，则“距离坐标”为（ p ， q ）的点有且仅有 2 个；

③若 $pq\neq 0$，则“距离坐标”为（ p ， q ）的点有且仅有 4 个．

上述命题中，正确命题的个数是（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3．

例 3：求 $\sqrt{a^2+2a+2}+\sqrt{a^2-4a+13}$ 的最小值．

★★★例 4：

集合 $L=\left\{l\,\middle|\,\text{直线}l\text{和直线}y=2x\text{相交，且交点的横坐标恰好等于直线}l\text{的斜率}\right\}$.

(1)点 $\left(-2,2\right)$ 到 L 中哪条直线的距离最小;

(2)已知 $a\in R^{+}$, 设 $P\left(-2,a\right)$ 到 L 中直线的距离最小值为 $d_{\min}$, 求 $d_{\min}$ 的解析式

四、巩固练习

一、填空题

★1． 点 $P(3,2)$ 到直线 $l:3x-2y=13$ 的距离是__________．

★2． 原点 O 到直线 $x\cos\theta+y\sin\theta+2=0,\theta\in R$ 的距离为_____________．

★3． 已知直线 $l_1:2x-y+a=0$ 与直线 $l_2:-4x+2y+1=0$，且直线 l_1 与直线 l_2 的距离为 $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$，则实数 a 的值为__________．

★5． 若点（4，a）到直线 4x–3y–1=0 的距离不大于 3，则 a 的取值范围为__________．

★4． 已知点 P 为直线 $3x-4y+2=0$ 上的任意一个动点，则点 P 到点 $A(3,-1)$ 的距离的最小值是________________．

★★5． 已知直线 l 过点(1, 2)，并且与点 M(2, 3)和 N(4, –5)的距离相等，则直线 l 的方程

为______________________.

★★6．过点（3，5）的所有直线中，距离原点最远的直线方程是________________.

二、选择题

★7． 点 $P(x\,,y)$到 y 轴的距离是 （ ）

(A) x (B) y (C) $|x|$ (D) $|y|$

★6．下列各组点在直线 $5x-12y+6=0$ 的异侧的是 （ ）

（A）$(3,5),(6,7)$ （B）$(1,1),(15,2)$

（C）$(0,0),(10,3)$ （D）$(-3,2),(5,7)$

三、解答题

★8． 已知平行直线 l_1与l_2的距离为 $\sqrt{5}$，且直线 l_1 经过原点，直线 l_2 经过点 $(1,3)$，求直线 l_1与l_2的方程.

★★9. 已知 ΔABC 的三个顶点坐标分别为 $A(1,1)$、$B(9,3)$、$C(2,5)$，求 $\angle BAC$ 的角平分线所在直线的方程.

★★10．已知直线 l 过点 $P(0,1)$，且被平行直线 $l_1:3x+4y-8=0$与$l_2:3x+4y+2=0$ 所截得的线段的长为 $2\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

★★11．已知 ΔABC 的顶角 $A(3,-1)$, $\angle B,\angle C$ 平分线所在的直线方程分别是 $x=0, y=x$，求边 BC 所在的直线方程.

★★★12．两条平行线分别过点 P(-2,-2)和 Q(1,3)，它们之间的距离为 d，如果这两条直线各自绕着 P,Q 旋转并保持互相平行.

（1）求 d 的变化范围；

（2）用 d 表示这两条直线的斜率；

（3）当 d 取最大值时，求这两条直线的方程．

★★★13．若平面内一条封闭曲线上任意两点自己的距离达到最大值，则连接这两点的线段称为该曲线的直径．写出曲线 $|x-1|+\dfrac{|y|}{2}=1$ 的直径方程．

★★★★14、已知三条直线 $l_1: 2x\text{-}y+a=0\left(a>0\right), l_2\text{:-}4x+2y+1=0$，$l_3$：$x+y\text{-}1=0$，若直线 l_1 与 l_2 的距离是 $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$．（1）求 a 的值；

(2)能否找到一点 P 使点 P 同时满足下列三个条件：①点 P 是第一象限的点；②点 P 到点 l_1 的距离是点 P 到 l_2 的距离的 $\dfrac{1}{2}$，③点 P 到点 l_1 的距离与点 P 到 l_3 的距离之比 $\sqrt{2}:\sqrt{5}$；若能，求点 P 坐标；若不能，说明理由。

★★★★15、已知平面上的的线段 l 及点 P，任取 l 上一点 Q，线段 PQ 的最小值称为点 P 到线段 l 的距离，记为 $d\left(P,l\right)$．

(1) ①求点 $A\left(2,2\right)$ 到线段 l：$x\text{ - }y\text{-}3=0\left(3\le x\le 5\right)$ 的距离 $d\left(A,l\right)$

②求点 $B\left(1,1\right)$ 到线段 l：$x\text{ - }y\text{-}3=0\left(3\le x\le 5\right)$ 的距离 $d\left(B,l\right)$

(2) 若曲线 C 是边长为 6 的等边三角形,则点集 $D=\left\{P\middle|d\left(P,C\right)\le 1\right\}$ 所表示的图形的面积为多少？

(3) 求到两条线段 l_1,l_2 距离相等的点的集合 $C=\left\{P\middle|d\left(P,l_1\right)=d\left(P,l_2\right)\right\}$，其中 $l_1=AB; l_2=BD, A\left(0,1\right), B\left(0,0\right), D\left(2,0\right)$

第 9 讲　对称问题

一、知识梳理：

1、已知 P 点、曲线 C_1 和曲线 C_2，如果将其中一条曲线绕 P 点旋转 180^0，可以和另一条曲线重合，则称曲线 C_1 和曲线 C_2 关于 P 点对称，P 为对称中心。

2、两个中心对称点 P,Q 的连线过 ________ 且 ________

3、已知直线 l、曲线 C_1 和曲线 C_2，如果将其中一条曲线沿直线 l 对折，可以和另一条曲线重合，则称曲线 C_1 和曲线 C_2 关于直线 l 对称，直线 l 为对称轴。

4、两个轴对称点 P,Q 的连线和 ________ 垂直且 ________。

5、$A(x,y)$ 关于 $P(a,b)$ 对称点为 $B(2a-x,2b-y)$

6、曲线 $C:F(x,y)=0$ 关于关于 $P(a,b)$ 对称曲为线为 $F(2a-x,2b-y)=0$

二、典型例题

1、中心对称

★例 1.（1）求点 $P(2,3)$ 关于点 M（1，2）的对称点 Q 的坐标；

（2）求直线 $l:2x+3y-1=0$ 关于点 $M(1,2)$ 对称的直线方程.

2、轴对称

★例 2. 求点 $P(2,3)$ 关于直线 $l:x-y-4=0$ 对称点 Q 的坐标.

★★例 3. 光线沿直线 $l_1:x-y-2=0$ 射入，经直线 $m:3x-y+3=0$ 反射，求反射光线所在直线 l_2 的方程.

★★**例 4**．已知ΔABO的一个顶点$A\left(3,-1\right)$，$\angle B$平分线所在直线方程为$x=0$，$\angle C$的平分线所在直线方程为$y=x$，求BC边所在直线的方程.

★★★**例 5：已知点**$A(4,1),B(6,-3)$,在x轴上求一点 M ,使

(1)$|MA|^2+|MB|^2$最小

(2)$|MA|+|MB|$最小

(3)$\left||MA|-|MB|\right|$最小

(4)$|MB|-|MA|$最大

三、拓展与提高

★★1.已知$l:2x-y=0$，点$A\left(0,1\right),B\left(2,0\right),C\left(4,1\right)$

①在l上求一点P使$|PB|+|PC|$最小，

②在l上求一点Q使$\left||QA|-|QB|\right|$最大

★★2 .已知ΔABC中，$A\left(2,1\right)$，B在x轴上，C在直线$y=x$上，求ΔABC 周长最小值

★★★3 光线从$P(-3, 4)$射出，到达x轴上的点Q后，被x轴反射到y轴上的点M，又被y轴反射，这时的反射光线恰好经过点D（$-1, 6$），求QM所在直线的方程.

四、巩固练习

一、填空题

★1. 已知两定点 P（－2，－2）和 Q（0，－1），取一点 R（2，m），使 $|PR|+|PQ|$ 最小，则实数 m 的值为______________.

★2. 若光线从点 $A(-3，5)$射到直线 $l: 3x-4y+4=0$ 之后，反射光线经过点 B(3，9)，则此光线从 A 到 B 所经过的路程的长是____________________.

★★3. 若直线 l 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则它关于直线 $y=x$ 对称直线的斜率为____________.

★★4．一条光线从点 M（5, 3）射出，且与 x 轴正方向成的角的大小为 α， 遇 x 轴后反射．若 $\tan\alpha$ ＝3，则反射线所在的直线方程是____________________.

★★★5. *ABCD* 是平行四边形，已知点 A(–1，3)和 C(–3，2)，点 D 在直线 x–3y–1=0 上移动，则点 B 的轨迹方程是____________________.

二、选择题

★6．与直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 $(1,-1)$ 对称的直线方程为（　　）

（A）$3x-2y+2=0$　　（B）$2x+3y+7=0$

（C）$3x-2y-12=0$　　（D）$2x+3y+8=0$

★7．设 $f(x)=x+1$，那么直线 $y=f(x+1)$ 关于直线 $x=2$ 对称的直线方程是（　　）

（A）$y=x-6$　　（B）$y=x+6$

（C）$y=6-x$　　（D）$y=-x-2$

★★8. 若直线 l_1 与 l_2 关于直线 $y=-x$ 对称，l_1 的方程为 $y=ax+b$，$a\neq 0$，则 l_2 的方程是

（A）$y=ax+b$（$a\neq 0$）　（B）$y=-\frac{x}{a}+b$（C）$y=-\frac{x}{a}+\frac{b}{a}$　（D）$y=\frac{x}{a}+\frac{b}{a}$

三、解答题

★★9. 一束光线从 M（5, 3）射出，被直线 $l: x+y-1=0$ 反射，若入射光线绕 M 点逆时针旋转 θ 角后与直线 l 平行，且 $\tan\theta$＝2．求入射光线和反射光线所在直线的方程.

★★10. 已知ΔABC的一个顶点 A（4，－1），其内角 B，C 的平分线方程分别是$y=x$－1 和

x=1，求BC边所在的直线方程.

★★11. 已知直线l_1和l_2关于直线 2x–2y+1=0 对称，若l_1的方程是 3x–2y+1=0，求l_2的方程.

★★★12.（1）在直线$l:3x-y+2=0$上求一点 P，使得到两定点 A（8, 6），C（－4, 0）的距离之差最大.

（2）在直线$l:3x-y$＋2＝0 上求一点 P，使得 P 到两定点A（8,6），B（2，－2）的距离之和最小.

★★★13.（1）求函数$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+8}$的最小值，并求此时的 x 的值.

（2）求函数$y=\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+8}$的最小值，并求此时的 x 的值.

第 10 讲　曲线与方程的概念

一、知识梳理

1、曲线与方程的关系：

（1）曲线C上任意一点的坐标都是方程$F(x，y)=0$的解；

（2）方程$F(x，y)=0$的解为坐标的点都在曲线C上。

则曲线C为方程$F(x，y)=0$的曲线，方程$F(x，y)=0$的曲线的方程

2、求曲线方程的基本步骤：

（1）建立适当的直角坐标系，设曲线C上任意一点的坐标为$M(x，y)$；

（2）写出适合条件P的点M的集合$P=\{M|P(m)\}$；

（3）用坐标表示条件$P(m)$，列出方程$F(x，y)=0$；

（4）化简方程$F(x，y)=0$为最简形式；

（5）证明方程$F(x，y)=0$为曲线C的方程。

3、求曲线的交点：曲线C_1: $F_1(x，y)=0$与曲线C_2: $F_2(x，y)=0$交点为$\begin{cases} F_1(x，y)=0 \\ F_2(x，y)=0 \end{cases}$的解

直线l: $ax+by+c=0$与曲线C: $F(x，y)=0$相交弦长为

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}\,|y_1-y_2|$$

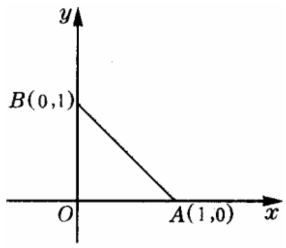
二、典型例题

曲线与方程

★★例 1． 已知两点$A(-1,1)$和$B(3,-1)$，求证：线段AB的垂直平分线l的方程是$2x-y-2=0$.

★★例 2．（1）已知$A(1,0)$、$B(0,1)$．线段AB的方程是不是$x+y-1=0$？为什么？

（2）到两坐标轴距离相等的点的轨迹 C 的方程是不是 $x-y=0$？为什么？



例2（1）

★例 3．已知方程 $x^2+4x-2y+1=0$ 所表示的曲线为 C.

（1）判断点 $A\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$、$B(1,-3)$ 是否在曲线 C 上.

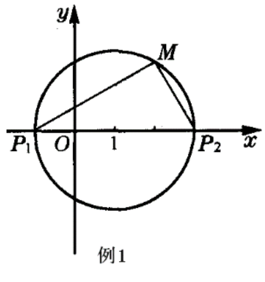
（2）若点 $(a,3)$ 在曲线 C 上，求实数 a 的值.

★★例 4.（1）两条直线 $l_1:a_1x+b_1y+1=0$ 和 $l_2:a_2x+b_2y+1=0$ 相交于点 $P(3,-4)$，求过点 $A(a_1,b_1),B(a_2,b_2)$ 的直线方程；

（2）根据（1）推广出一个一般结论,使得（1）成为该结论的一个特殊情形.

求曲线方程

★★例 1．如图，已知两定点 $P_1(-1,0)$ 和 $P_2(3,0)$，求到点 P_1 和 P_2 的距离的平方和是 16 的点的轨迹方程.



例1

★★例 2．动点 M 与距离为 4 的两个定点 A、B 满足 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$，建立适当的坐标系，并

求动点 M 的轨迹方程.

★★★**例 3.** 已知定点 A （4，0 ）和曲线 $x^2+y^2=1$ 上的动点 B，求线段 AB 的中点 P 的轨迹方程.

★★**例 4.** 已知 ΔABC 的边 AB 长为 $2a$，边 BC 上的中线长为 m，试求顶点 C 的轨迹方程.

曲线的公共点

★★**例 1.** 求曲线 $x^2+y^2=17$ 和曲线 $xy=4$ 的公共点.

★★**例 2.** 已知曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=9$，当 b 为何值时，直线 l:$2x-y+b=0$ 与曲线 C 有：（1）两个公共点？　　（2）一个公共点？　　（3）没有公共点？

★★★**例 3.** 求直线 $y=2x+1$ 被抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ 截取的线段长度.

四、巩固练习

★★1. 判断下列点是否在方程 $x^2+y^2=9$ 的曲线上.

（1）$M\left(-1,2\sqrt{2}\right)$；　　（2）$P\left(2,3\right)$；　　（3）$Q\left(3\cos\theta,3\sin\theta\right)$.

★2．到 x 轴的距离等于 $\sqrt{3}$ 的点所组成的直线的方程是 $y=\sqrt{3}$ 吗？为什么？

★3．若将曲线 C 上的点的集合记为 C，将以方程 $F\left(x,y\right)=0$ 的解为坐标的点的集合记为 F，则下列各式分别表示什么意义：

（1）C Ü F；　　（2）F Ü C；　　（3）$C=F$．

★4．已知 a,b 均为实数，$2a-3b=1$．直线 $l:ax+by-5=0$ 是否过定点？若过定点，求出这个定点的坐标；若不过定点，说明理由．

★★5．求到点 $A\left(1,1\right)$ 的距离等于到 x 轴的距离的动点的轨迹方程．

★★6．求到直线 $x-y-1=0$ 的距离为 2 的动点 P 的轨迹方程．

★★7．已知动点 M 和 $A\left(1,1\right)$、$B\left(2,0\right)$ 两点，若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2$，求动点 M 的轨迹方程．

★★8．点 A 在曲线 $y=x^2+3$ 上运动，连接点 A 与定点 $B\left(6,0\right)$，求 AB 的中点 M 的轨迹方程．

四、课后练习

一、填空题

★1．无论任实数 k 取何值，直线 $y=k(x-1)+1$ 恒过定点______________．

★2．到 x 轴的距离等于 2 的点组成的曲线方程为______________．

★★3．已知命题甲：点 P 在曲线 $y=|x|$ 上，命题乙：点 P 到两坐标轴的距离相等．命题甲是命题乙的________________条件．

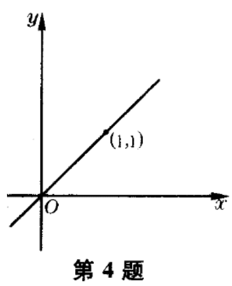
★★★4．曲线 C: $f\left(x,y\right)=0$ 关于点 $\left(a,b\right)$ 对称的曲线 C' 的方程为_________________．

二、选择题

★5．下列方程能表示如图所示的直线的是　　（　　）

(A) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$；　　(B) $x^2-y^2=0$；

(C) $x-|y|=0$；　　(D) $2^x-2^y=0$．



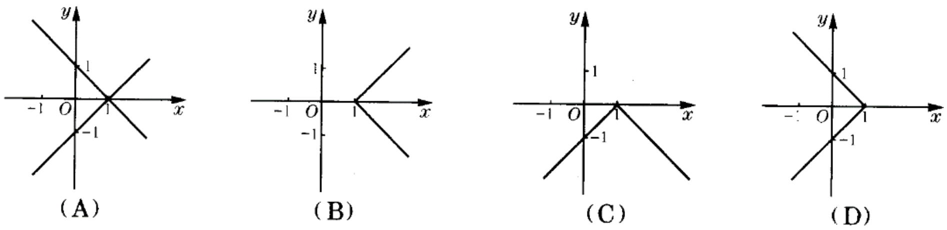
第 4 题

★★6．下列各组方程中表示相同曲线的是　　（　　）

(A) $y=x,\ \dfrac{y}{x}=1$；　　(B) $y=x,\ y=\sqrt{x^2}$；

(C) $|x|=|y|,\ \sqrt{x}=\sqrt{y}$；　　(D) $|x|=|y|,\ x^2=y^2$.

★★7．方程 $y=-\sqrt{x^2-2x+1}$ 的图形是下图中的　　（　　）



★★★8．若点 P 的坐标为 (a,b)，曲线 C 的方程为 $F(x,y)=0$，则“$F(a,b)=0$”是“点 P 在曲线 C 上”的　　（　　）

(A) 充分非必要条件；　　(B) 必要非充分条件；

(C) 充要条件；　　(D) 既非充分又非必要条件.

三、解答题

★★9．已知等腰三角形底边的两个端点的坐标分别是 $B(4,2)$、$C(-2,0)$，求第三个顶点 A 的轨迹方程.

★★10．已知点 P 到点 $F_1(4,0)$ 的距离与它到点 $F_2(-4,0)$ 的距离的比为 2，求点 P 的轨迹方程.

★★11．已知曲线 C：$y^2=x+1$ 和定点 $A(3,1)$，B 为曲线 C 上任意一点，若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，当点 B 在曲线 C 上运动时，求点 P 的轨迹方程

第 11 讲　圆的标准方程和圆的一般方程

一、知识梳理

1、圆 C 的标准方程：$(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=r^2$

2、圆 C 的一般方程：$x^2+y^2+\mathrm{D}x+Ey+F=0\left(\mathrm{D}^2+E^2-4F>0\right)$

3、直线 l：$\mathrm{A}x+By+\mathrm{C}=0$ 和圆 $C:(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=r^2$ 的位置关系:$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

（1）直线 l 和圆 C 相交 $\Leftrightarrow d<r$；　　　（2）直线 l 和圆 C 相切 $\Leftrightarrow d=r$；

（3）直线 l 和圆 C 相离 $\Leftrightarrow d>r$

4、圆 $C_{1:}:(x\text{-}a_1)^2+(y\text{-}b_1)^2=r_1^2$ 和圆 $C_2:(x\text{-}a_2)^2+(y\text{-}b_2)^2=r_2{}^2$ 的位置关系:

$|C_1C_2|=\sqrt{(a_1\text{-}a_2)^2+(b_1\text{-}b_2)^2}$

（1）圆 $C_{1:}$ 和圆 C_2 相交 $\Leftrightarrow |r_1\text{-}r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$

(2)圆 $C_{1:}$ 和圆 C_2 相切 $\Leftrightarrow |C_1C_2|=|r_1\text{-}r_2|$ 或 $|C_1C_2|=r_1+r_2$,

（3）圆 $C_{1:}$ 和圆 C_2 内含或外离 $\Leftrightarrow |C_1C_2|<|r_1\text{-}r_2|$ 或 $|C_1C_2|>r_1+r_2$

二、典型例题

圆的标准方程

★★例 1．分别求满足下列条件的圆的方程

（1）过原点且在 x 轴，y 轴截得的弦长分别是 4 和 2 的圆的方程

（2）圆心在 l：$x-y+4=0$ 上，并且经过两圆 $x^2+y^2-4x-3=0$ 和 $x^2+y^2\text{-}4y\text{-}3=0$ 的交点的圆的方程

★★例 2．方程 $x^2+y^2+2k^2x\text{-}y+k+\dfrac{1}{k}=0$ 所表示的曲线关于 $2x+y+1=0$ 对称，则 $k=$(　)

$(A)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　$(B)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　$(C)\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(D) 不存在

1、★已知两个定点 $A(-2,0),B(1,0)$，如果动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，则 P 点的轨迹所围成的面积等于(　　)　$(A)\pi$　　　$(B)4\pi$　　　$(C)8\pi$　　　$(D)9\pi$

2、★圆心在直线 $2x-y-7=0$ 上的圆 C 与 y 轴相交于两点 $A(0,-4),B(0,-2)$,则圆 C 的

方程为________

3、★★方程$|x|$-1=$\sqrt{1\text{-}y^2}$ 表示的曲线为（ ）

(A) 一条直线 (B) 两条射线 (C) 一个圆 (D)两个半圆

★★例 3. 如图，已知$M\left(x_0, y_0\right)$为圆$C: x^2+y^2=r^2$上一点，求过点 M 的圆 C 的切线 l 的方程.

★★★例 4. 已知圆$O: x^2+y^2=4$，分别求过点$A\left(1, \sqrt{3}\right)$和$B(2,3)$的切线方程.

圆的一般方程

★例 1. 判断下列方程是否表示圆，并说明理由.

（1）$x^2+y^2-2x-4y+6=0$； （2）$x^2+y^2-2x-4y=0$；

（3）$x^2+y^2-2x-4y+5=0$； （4）$x^2+y^2+ax+2y+2=0$.

★例 2. 求经过$A(1,0)$、$B(3,0)$、$C(2,2)$三点的圆的方程.

★★例 3. 求经过点$M(2,2\sqrt{3})$，与圆$x^2+y^2=4$相切的直线方程.

★★例 4. 求经过$A(4,2)$、$B(-1,3)$两点，且在两坐标轴上的四个截距之和是 14 的圆的方程.

4、★圆C的半径为1，圆心在第一象限，与y轴相切，与x相交于A,B两点，$|AB|=\sqrt{3}$

则圆C的标准方程是___________

5、★★以点$(2,-1)$为圆心且与直线$3x-4y+5=0$相切的圆C的方程是（　　）

$(A)(x-2)^2+(y+1)^2=3$　　$(B)(x+2)^2+(y-1)^2=3$

$(C)(x-2)^2+(y+1)^2=9$　　$(D)(x+2)^2+(y+1)^2=3$

6、★★设A为圆$(x-1)^2+y^2=1$上的动点，PA是圆的切线,且$|PA|=1$,则P点的轨迹方程为（　）

$(A)(x-1)^2+y^2=4$　　$(B)(x-1)^2+y^2=2$　　$(C)y^2=2x$　　$(D)y^2=-2x$

三、拓展与提高

★★1、.过点$M\left(\sqrt{3},y_0\right)$作圆$O:x^2+y^2=1$的切线，切点为$N$，如果$\angle OMN\geq\dfrac{\pi}{6}$，那么$y_0$的取值范围是_______

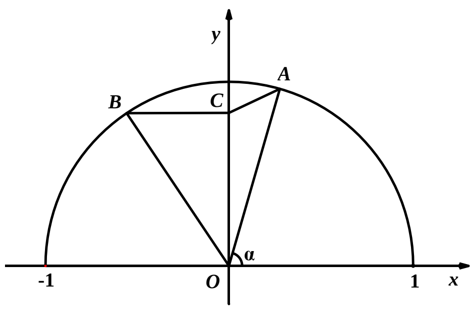
★★2、已知$k\in\mathbf{Z}$，若曲线$x^2+y^2=k^2$与曲线$xy=k$无交点，则$k=$_____

★★★★3、如图，在平面直角坐标系xOy中，角α的顶点在原点，始边与x轴的非负半轴重合，终

边交单位圆于点A，且$\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，将角$\alpha$的终边绕原点逆时针方向旋转$\dfrac{\pi}{3}$，交单位圆与点$B$，过$B$作$BC\perp y$轴于点$C$.

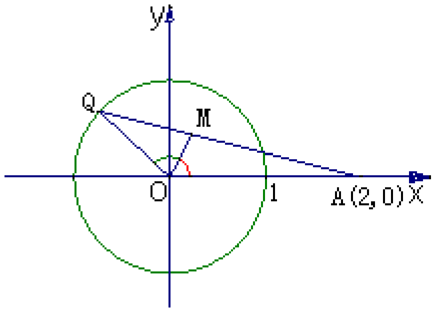
（1）若点A的纵坐标为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求点B的横坐标；

（2）求ΔAOC的面积S的最大值.



★★★4．自点$A(-3,3)$发出的光线l射到x轴上，被x轴反射，其反射光线所在直线与圆$(x-2)^2+(y-2)^2=1$相切，求光线l所在的直线方程.

★★★5．如图，已知定点 $A(2，0)$，点 Q 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点，$\angle AOQ$ 的平分线交 AQ 于 M，当 Q 点在圆上移动时，求动点 M 的轨迹方程．



四、课后练习

一、填空题

★1．圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 的圆心为____________，半径为____________．

★2．圆 $x^2+y^2=a$ 与 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 有公共点，则 a 取值范围是______________．

★★3．由曲线 $y=|x|$ 和 $x^2+y^2=4$ 所围成的图形面积为______________．

★4．分别根据下列条件，求相应圆的方程．

（1）圆心为 $C\left(-\dfrac{3}{2},3\right)$，半径为 $R=\sqrt{3}$．________________________

（2）圆心为 $C\left(\sqrt{2},1\right)$，过点 $A\left(-1,\sqrt{2}\right)$．________________________

（3）与 x 轴相交于 $A(1,0)$、$B(5,0)$ 两点，且半径等于 $\sqrt{5}$．

____

★★5．已知 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+a=0$ 表示圆，则实数 a 的值是______________．

★★6．求过点 $M\left(2,2\sqrt{3}\right)$ 且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线的方程是______________．

★★7. 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线，则这条切线的夹角的大小为________.

★★★8．“$A=C\neq 0,且B=0$”是“方程 $Ax^2+bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的方程”的______________________条件．

★★★9．直线 $Ax+By=0$ 与圆 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 的位置关系是______________．

二、选择题

★★10．判断点 $M(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$ 和圆 $x^2+y^2=3$ 的位置关系为（　　）

（A）M 在圆外　　（B）M 在圆上

（C）M 在圆内　　（D）M 是圆心

★★12．设圆 $x^2+y^2+2ax+2y+\left(a-1\right)^2=0$，若 $0<a<1$，则坐标系原点 O

A．在圆上　　B．在圆外　　C．在圆内　　D．以上各种关系都有可能．

★★13．若圆 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 关于直线 $x-2y=0$ 对称，则　　（　　）

A．$a=2c$　　B．$a=b$　　C．$a+2b=0$　　D．$a=2b$．

三、解答题

★★14．求过点 $A\left(2,-3\right)$ 和 $B\left(-2,-5\right)$，且圆心在直线 $x-2y-3=0$ 上的圆的方程．

★★★15. 已知圆 $x^2+y^2-2x+2y-3=0$ 和圆 $5x^2+5y^2-x+7y-\dfrac{45}{2}=0$ 关于直线 l 对称，求直线 l 的方程．

★★★16. 设方程 $x^2+y^2-2(m+3)x+2(1-4m^2)y+16m^4+9=0$，若该方程表示一个圆，求 m 的取值范围及这时圆心的轨迹方程。

第 12 讲　直线和圆的位置关系

一、知识梳理

1、圆C的标准方程：$(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=r^2$

2、圆C的一般方程：$x^2+y^2+\mathrm{D}x+Ey+F=0\left(\mathrm{D}^2+E^2-4F>0\right)$

3、圆$C:(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=r^2$的参数方程$\begin{cases}x=a+rcos\theta\\y=b+rsin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi)$

4、直线l：$\mathrm{A}x+By+\mathrm{C}=0$和圆$C:(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=r^2$的位置关系:$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

（2）直线l和圆C相交$\Leftrightarrow d<r$；　　（2）直线l和圆C相切$\Leftrightarrow d=r$；

（3）直线l和圆C相离$\Leftrightarrow d>r$

5、圆$C_{1:}:(x\text{-}a_1)^2+(y\text{-}b_1)^2=r_1^{\ 2}$和圆$C_2:(x\text{-}a_2)^2+(y\text{-}b_2)^2=r_2^{\ 2}$的位置关系:

$|C_1C_2|=\sqrt{(a_1\text{-}a_2)^2+(b_1\text{-}b_2)^2}$

（1）圆$C_{1:}$和圆C_2相交$\Leftrightarrow|r_1\text{-}r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$

(2)圆$C_{1:}$和圆C_2相切$\Leftrightarrow|C_1C_2|=|r_1\text{-}r_2|$或$|C_1C_2|=r_1+r_2$,

（3）圆$C_{1:}$和圆C_2内含或外离$\Leftrightarrow|C_1C_2|<|r_1\text{-}r_2|$或$|C_1C_2|>r_1+r_2$

二、典型例题

1、直线和圆的位置关系

★★例 1 已知圆$C:x^2+(y-1)^2=5,$与直线l：$mx-y+1\text{-}m=0$;

（1）判断直线和圆的位置关系；

(2)设直线l与圆C相交于A,B两点，且$|AB|=\sqrt{17}$,求直线l的方程;

(3)设直线l与圆C相交于A,B两点，求弦AB的中点的轨迹方程;

★例 2：1、与圆$x^2+(y\text{-}2)^2=1$相切，且在两坐标上截距相等的直线有________条

★★2、已知直线l：$x-y+6=0$和$C:(x\text{-}1)^2+(y\text{-}1)^2=2$，则圆$C$上各点到直线$l$的距离最小值是__________

★★3、已知圆$(x\text{-}3)^2+(y\text{-}4)^2=r^2$上有两点到直线$4x+3y-4=0$的距离为$2$，则半径为$r$的取值范围是__________

2、拓展与提高

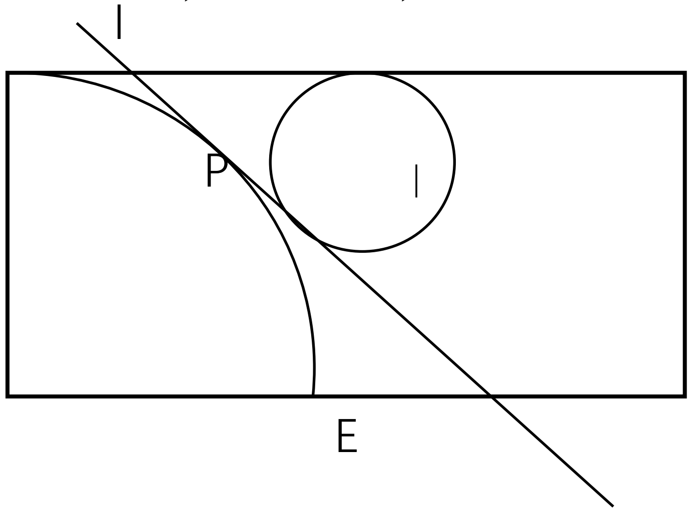
★★例 3：(1)若实数 x，y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$，求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和 $2x-y$ 的最小值；

（2）若实数 x，y 满足 $(x-2)^2+y^2=3,(x\geq 2)$ 求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和 $2x-y$ 的最小值；

★★★例 4：如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=\sqrt{3},BC=1$,以 A 为圆心 1 为半径,的圆与 AB 交于 E (圆弧 DE 为圆在矩形内的部分).

(1) 在圆弧 DE 上确定 P 点的位置,使过 P 点的切线 l 平分矩形 $ABCD$ 的面积;

(2) 若动圆 M 与满足题(1)中的切线 l 及边 DC 都相切,试确定 M 的位置,使圆 M 在矩形内部面积最大的圆



四、课后练习

★1、直线 $ax+by=1$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 相交,则点 $P(a,b)$ 与圆的位置关系是_______

★2、设直线 $ax-y+3=0$ 与圆 $(x\text{-}1)^2+(y\text{-}2)^2=4$ 相交于 A,B 两点，且弦长 $|AB|$ 为 $2\sqrt{3}$,则 $a=$_______

★★3、已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x\text{-}1)^2+(y\text{-}3)^2=20$ 相交于 A,B 两点，则直线 AB 的方程是__

★★4、过点 $(2,3)$ 的直线 l 与圆 $C: x^2+y^2+4x+3=0$ 相交于 A,B 两点，当弦长 $|AB|$ 为最大时，直线 l 的方程是___________

★★5、过圆 $C_{1}:(x\text{-}4)^2+(y\text{-}5)^2=10$ 和圆 $C_2:(x+2)^2+(y\text{-}7)^2=12$ 的交点的直线方程为___

★★6、已知两圆 $x^2+y^2-2x-5=0$ 和 $x^2+y^2+2x\text{-}4y\text{-}4=0$ 相交于 A,B 两点，则线段 AB 的垂直平分线方程是___________

★★7、过原点的直线与圆 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 相交所得弦长为 2 ,则该直线方程是

____

★★8、到直线 $x-y=0$ 和直线 $2x+y=0$ 的距离相等的动点的轨迹方程是________

★★★9、$M(3,0)$是圆 $x^2+y^2-8x-2y+10=0$ 内一点,过点 M 最长的弦所在直线方程是

____

★★★10、设 $A(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转,12s 转一周,已知 $t=0$ 时,点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则当 $0\le t\le 12$ 时,动点 A 的纵坐标 y 关于 t (单位: s)的函数的单调递增区间是 ( )

$(A)[0,1]$ $(B)[1,7]$ $(C)[7,12]$ $(D)[0,1]$和$[7,12]$

★★★11、已知圆 O 的半径为1, PA, PB 为该圆的两条切线, A, B 为两切点,那么 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为( )

$(A)-4+\sqrt{2}$ $(B)-3+\sqrt{2}$ $(C)-4+2\sqrt{2}$ $(D)-3+2\sqrt{2}$

★★★12、已知过点 $A(0,1)$,且方向向量为 $\vec{a}=(1,k)$ 的直线 l 和圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 相交于 M, N 不同两点.

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 求证: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 为定值;

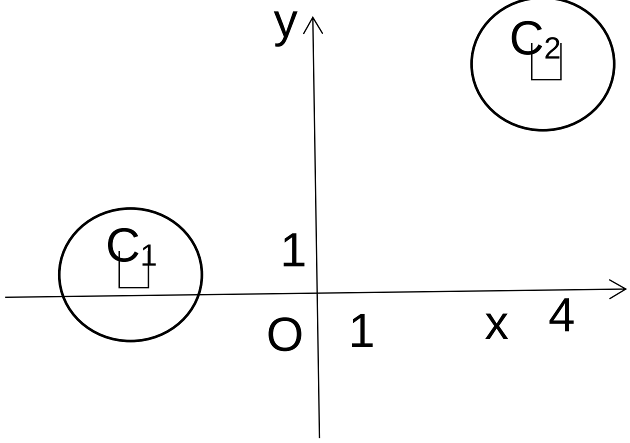
(3) 若 O 为坐标原点,且 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$, 求实数 k 的值.

★★★★13.在平面直角坐标系 xoy 中，已知圆 C_1：$(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 和

圆 C_2：$(x-4)^2+(y-5)^2=4$.

（1）若直线 l 过点 $A(4,0)$，且被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程；

（2）设 P 为平面上的点，满足：存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2，它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交，且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等，试求所有满足条件的点 P 的坐标.



第 13 讲　椭圆的标准方程和性质

一、知识梳理

1．椭圆的概念

平面内到两个定点 F_1、F_2 的距离的和为常数 $2a$ (大于$|F_1F_2|=2c$) 的点的轨迹叫做椭圆．

这两定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫焦距．

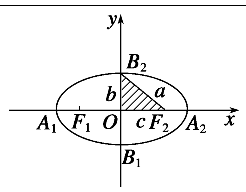
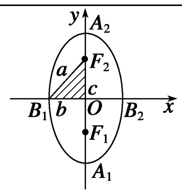
由不同的 a 和 c 的大小关系可得到不同的轨迹

(1) 若______，则集合 P 为椭圆；

(2) 若______，则集合 P 为线段；

(3) 若______，则集合 P 为空集．

2．椭圆的标准方程和几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$(a>b>0)$</td><td>$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
$(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="7">性
质</td><td>范围</td><td>$-a\le x\le a$
$-b\le y\le b$</td><td>$-b\le x\le b$
$-a\le y\le a$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">对称轴：坐标轴　　　对称中心：原点</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$
$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$</td><td>$A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$
$B_1(-b,0)$，$B_2(b,0)$</td></tr>
<tr><td>轴</td><td colspan="2">长轴 A_1A_2 的长为 $2a$；短轴 B_1B_2 的长为 $2b$</td></tr>
<tr><td>焦距</td><td colspan="2">$F_1F_2=2c$</td></tr>
<tr><td>a，b，c 的关系</td><td colspan="2">$c^2=a^2-b^2$</td></tr>
</table>

3．直线和椭圆的位置关系

将直线方程与椭圆方程联立，消去一个未知数，得到一个一元二次方程，若方程有两个不同解（即 $\Delta>0$），则直线与椭圆有两个不同的交点；若方程有两个相等的解 $(\Delta=0)$，则直线与椭圆有两个相同的交点（相切）；若方程无解，则直线与椭圆没有公共点．

二、典型例题

1. 求椭圆的标准方程

例 1：★(1) 已知椭圆经过两点 $A(1,-2\sqrt{2}), B(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$，求椭圆的标准方程.

★★(2) 求经过点(2,3)，且与椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 有共同焦点的椭圆的标准方程.

2.求椭圆的轨迹方程

例 2：★★(1) 点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上的动点，O 为坐标原点，点 Q 在线段 OP 上，且 Q 分 $\overrightarrow{OP}$ 所成比等于 2，求点 Q 的轨迹方程.

★★(2) 已知圆 $x^2+y^2-6x-55=0$，动圆 M 经过定点 A(-3,0)，且与已知圆相内切，求圆心 M 的轨迹方程.

3.焦点三角形

例 3：★★(1) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上是否存在点 P，使 P 与椭圆的两个焦点的连线垂直，若存在求出点 P 的坐标，若不存在说明理由.

★★★（2）已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的两焦点$F_1,F_2$在 x 轴上，P 为椭圆上任意一点，

且$\angle F_1PF_2$的最大值为$\frac{\pi}{3}$，求 b 的值.

★★★（3） 已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1, F_1, F_2$是它的两个焦点，若 P 是椭圆上任一点，

求$|PF_1|^2+|PF_2|^2$的最小值.

4. 直线与椭圆

例 4：★★（1）已知椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1$和直线$y=2x+m$恒有两个不同的交点 A、B，

求 AB 连线段中点 M 的轨迹方程.

★★★（2）若椭圆$ax^2+by^2=1(a,b>0)$与直线$x+y=1$交于 A、B 两点，M 为 AB 的中点，

直线 OM 的斜率为 2，且$OA\perp OB$，求椭圆方程.

三、拓展提高

★★★★1．如图，已知 A，B，C 是长轴为 4 的椭圆上三点，点 A 是长轴的一个顶点，BC 过椭圆中心 O，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{AC}\right|$．

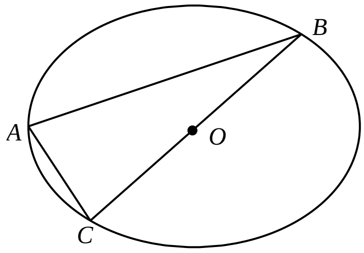


图　15-16

（1）建立适当的坐标系，求椭圆方程．

（2）如果椭圆上两点 P，Q 使直线 CP，CQ 与 x 轴围成底边在 x 轴上的等腰三角形，是否总存在实数 λ，使 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{AB}$？请给出证明．

★★★★2．学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验．设计方案如图 1 5—1 7．航天器运行（按顺时针方向）的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$，变轨（即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线）后返回的轨迹是以 y 轴为对称轴、$M\left(0，\dfrac{64}{7}\right)$ 为顶点的抛物线的实线部分，降落点为 D（8，0）．观测点 A（4，0）、B（6，0）同时跟踪航天器．

（1）求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程．

（2）试问：当航天器在 x 轴上方时，观测点 A、B 测得离航天器的距离分别为多少时，应向航天器发出变轨指令．

四、巩固练习

一、填空题：

★1. 方程$5x^2+ky^2=5k$是焦点在y轴上的椭圆，则k的取值范围是________________.

★★2. 椭圆的两焦点$F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，且经过$P(2,\sqrt{2})$，若$Q(1,a)$也在椭圆上，

则$\left|QF_1\right|+\left|QF_2\right|=$______.

★3. 设椭圆的中心在原点，短轴长是$2\sqrt{5}$，且椭圆经过点$P(\sqrt{3},-2)$，

则椭圆标准方程为_______.

★★4. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1,F_1,F_2$分别为它的焦点，过焦点$F_1$引$CD$与$x$轴

成α角$(0<\alpha<\pi)$，则ΔF_2CD的周长为_____________.

★★5. 设P为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一点，$F_1,F_2$分别为左右焦点，

如果$\angle PF_1F_2=75^\circ,\angle PF_2F_1=15^\circ$，则椭圆中的$c:a=$________________.

★6. 已知椭圆C的焦点分别为$F_1(-2\sqrt{2},0)$和$F_2(2\sqrt{2},0)$，长轴长为6，设直线$y=x+2$交椭圆C于两点A,B，则线段AB的中点坐标为________ .

★★7. ΔABC中，$A(-1,0),C(1,0)$，边$a>b$，且满足$\sin A,\sin B,\sin C$成等差数列，

则点B的轨迹方程为_________________.

★★8. 已知椭圆的对称轴是坐标轴，短轴的一个端点与两个焦点组成一个正三角形，

焦点到椭圆的最短距离为$\sqrt{3}$，则椭圆方程为_______.

★★★9. 椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的长轴端点为$M$、$N$，不同于$M$、$N$的点$P$在此椭圆上，

则PM、PN的斜率之积为_____________.

★★★10. 设AB是过椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$的中心的弦，$F$是椭圆的一个焦点，

则ΔABF的面积的最大值为_____________.

★★★11. 椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的焦点为$F_1,F_2$，点$P$为其上的动点，当$\angle F_1PF_2$为锐角时，

点P横坐标的取值范围为________________.

★★★12. 椭圆 $2x^2+y^2=a^2$ 与连结 $A(1,2)$ 、 $B(2,3)$ 的线段没有公共点，

则正数 a 的范围为_______.

二、选择题：

★★13.我国发射的“神舟”号宇宙飞船的运行轨道是以地球的中心 F_2 为一个焦点的椭圆，近地点 A 距地面为 m 千米，远地点 B 距地面为 n 千米，地球半径为 k 千米，则飞船运行轨道的短轴长为 (　　)

A． $2\sqrt{(m+k)(n+k)}$　　B． $\sqrt{(m+k)(n+k)}$　　C． mn　　D． $2mn$

★★14.已知 F_1,F_2 是椭圆的两个焦点，满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，则椭圆焦距与长轴之比的取值范围是 (　　)

A． $(0,1)$　　B． $(0,\frac{1}{2}]$　　C． $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D． $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

★★★15.已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$.如果直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 与椭圆的一个交点 M 在 x 轴上的射影恰好是椭圆的右焦点 F ，则 m 的值为 (　　)

A． 2　　B． $2\sqrt{2}$　　C． 8　　D． $2\sqrt{3}$

★★★16.以过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点且垂直于 x 轴的弦 PQ 为直径的圆与点 $A(a,0)$ 的位置关系是 (　　)

A．点 A 在圆内　　B．点 A 在圆外　　C．点 A 在圆上　　D．点 A 与圆为关系不定

三、解答题：

★★17.已知圆 O_1: $x^2+(y-2)^2=1$，圆 O_2: $x^2+(y+2)^2=25$，动圆 M 与圆 O_1 外切、与圆 O_2 内切，求动圆圆心 M 所在的曲线方程.

★★18.已知椭圆 $x^2+4y^2=4$ 与直线 $y=2x+m$ 相交于 A 、B 两点，

(1) 当 $m=1$ 时，求 ΔOAB 的面积.

(2) 是否存在 m ，使得可以作 AB 为直径且过 O 的圆，若存在，求出 m .

★★★19.已知椭圆的焦点为$F_1(-t,0),F_2(t,0)(t>0),P$在椭圆上，$\left|F_1F_2\right|$是$\left|PF_1\right|,\left|PF_2\right|$的等差中项.

(1) 求椭圆方程；

(2) 设A是椭圆的左顶点，在椭圆上是否存在点M（不同于点A）使$\angle F_2MA=90^\circ$？若存在，请求出点M的坐标；若不存在，请说明理由.

★★★★20.点A,B分别是椭圆$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$长轴的左右两个顶点，$F$是其右焦点，点$P$在椭圆上，位于$x$轴上方，且$PA\perp PF$。（1）求点$P$的坐标；（2）点$M$是椭圆长轴$AB$上的点，$M$到直线$AP$的距离等于$\left|MB\right|$，求椭圆上的点到点$M$距离的最小值。

★★★21.已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$上有两点关于直线$y=4x+m$对称，求实数$m$的取值范围。

第 14 讲 双曲线的标准方程和性质

一、知识梳理

1. 双曲线的定义

平面内到两个定点 F_1、F_2($F_1F_2=2c>0$)的距离的差的绝对值等于常数 $2a(2a<2c)$，则点 P 的轨迹叫________．这两个定点叫双曲线的________，两焦点间的距离叫________．

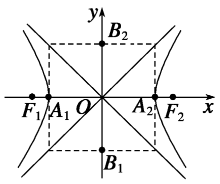
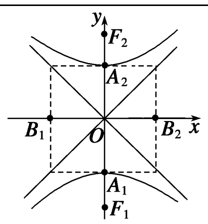
集合 $P=\{M||MF_1-MF_2|=2a\}$，$F_1F_2=2c$，其中 a、c 为常数且 $a>0$，$c>0$；

(1)当________时，P 点的轨迹是________；

(2)当________时，P 点的轨迹是________；

(3)当________时，P 点不存在．

2．双曲线的标准方程和几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$(a>0，b>0)$</td><td>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$(a>0，b>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">性
质</td><td>范围</td><td>$x\geq a$ 或 $x\leq -a$，$y\in\mathbf{R}$</td><td>$x\in\mathbf{R}$，$y\leq -a$ 或 $y\geq a$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td>对称轴：坐标轴
对称轴：坐标轴</td><td>对称中心：原点
对称中心：原点</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>顶点坐标：
$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$</td><td>顶点坐标：
$A_1(0，-a)$，$A_2(0，a)$</td></tr>
<tr><td>渐近线</td><td>$y=\pm\frac{b}{a}x$</td><td>$y=\pm\frac{a}{b}x$</td></tr>
<tr><td>实虚轴</td><td colspan="2">线段 A_1A_2 叫做双曲线的实轴，它的长 $A_1A_2=2a$；线段 B_1B_2 叫做双曲线的虚轴，它的长 $B_1B_2=2b$；a 叫做双曲线的实半轴长，b 叫做双曲线的虚半轴长</td></tr>
<tr><td colspan="2">a、b、c
的关系</td><td colspan="2">$c^2=a^2+b^2\ (c>a>0，c>b>0)$</td></tr>
</table>

3. 实轴长和虚轴长相等的双曲线为____________，其渐近线方程为_________.

4　双曲线标准方程的求法：(1)定义法，根据题目的条件，判断是否满足双曲线的定义，若

满足，求出相应的 a、b、c，即可求得方程．(2)待定系数法，其步骤是：①定位：确定双曲线的焦点在哪个坐标轴上；②设方程：根据焦点的位置设出相应的双曲线方程；③定值：根据题目条件确定相关的系数．

二、典型例题

1 求双曲线的标准方程

★1.已知双曲线 C 的中心在坐标原点，它的焦距为$4\sqrt{13}$，一条渐近线方程为$2x-3y=0$，求此双曲线的方程.

★2.求以双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的渐近线为渐近线，过点$A(-6\sqrt{3},-12)$的双曲线方程.

★★3.求以实轴长为 6，焦距为 10 的双曲线的标准方程.

★★4.实轴长为 12，一条渐近线为$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=0$的双曲线的标准方程.

★★5.双曲线 C 与椭圆$\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{36}=1$有共同的焦点，它们的交点中有一个交点的纵坐标为 4，求双曲线的方程.

★★6. 中心为原点的双曲线 C 经过点 $A(-2\sqrt{7},3),B(7,6\sqrt{2})$，求该双曲线的方程，并指出渐近线的夹角.

三、直线与双曲线

★★★7. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点，而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点。

(1) 求双曲线 C_2 的方程；

(2) 若直线 l： $y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线 C_2 有两个不同的交点，求 k 的取值范围。

★★★8. 过 $M(0,1)$ 的直线 l 交双曲线 $4x^2-my^2=1$ 的两支交于 P、Q 两点，且 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$，求 m 的取值范围。

三、拓展提高

★★1、已知 $A(1,4)$，F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，P 是双曲线右支上的动点，求 $PF+PA$ 的最小值.

★★2、已知双曲线的方程是 $16x^2-9y^2=144$.

(1)求此双曲线的焦点坐标、渐近线方程；

(2)设 F_1 和 F_2 是双曲线的左、右焦点，点 P 在双曲线上，且 $PF_1\cdot PF_2=32$，求$\angle F_1PF_2$ 的大小.

★★★3、已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

(1)求双曲线 C 的渐近线方程；

(2)已知 M 点坐标为(0,1)，设 P 是双曲线 C 上的点，Q 是点 P 关于原点的对称点．记 $\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$，求 λ 的取值范围.

★★★4、过双曲线$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$ 的右焦点 F_2 且倾斜角为 30°的直线交双曲线于 A、B 两点，O 为坐标原点，F_1 为左焦点.

(1)求 AB；

(2)求$\triangle AOB$ 的面积；

(3)求证：$AF_2+BF_2=AF_1+BF_1$.

四、课后练习

一、填空题：

★1. 双曲线$2x^2-3y^2=1$的渐近线方程是________________.

★2. 以双曲线$-\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$的顶点为焦点，焦点为顶点的椭圆方程是_______________.

★★3. 双曲线$mx^2+y^2=1$的虚轴长是实轴长的 2 倍，则$m=$____________.

★★4. 双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$的两条渐近线的夹角为___________.

★★5. 双曲线$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$的两个焦点分别为$F_1,F_2$，双曲线上的点$P$到$F_1$的距离为 12，则$P$到$F_2$的距离为___________.

★★6. 已知双曲线$k^2x^2-y^2=1\left(k>0\right)$的一条渐近线的法向量是$\left(1,2\right)$，那么$k=$_______

★★7. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda}=1$（$a^2>\lambda>b^2$）的焦点坐标为_____________

★★8. 与曲线$\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{49}=1$共焦点，而与曲线$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$共渐近线的双曲线方程为______.

★★9. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的实轴长 4，则双曲线上的一点$\left(4,\sqrt{3}\right)$到两渐近线的距离的乘积等于__________.

★★★10. 若双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a_1^2}-\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$和双曲线

$C_2:\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$的焦点相同，且$a_1>a_2$给出下列四个结论：

①$a_1^2-a_2^2=b_2^2-b_1^2$；　　②$\dfrac{a_1}{a_2}>\dfrac{b_2}{b_1}$；

③双曲线C_1与双曲线C_2一定没有公共点；　④$a_1+a_2>b_1+b_2$；

其中所有正确的结论序号是__________.

★★★11. 设P为双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$虚轴的一个端点，Q为双曲线上的一个动点，

则$|PQ|$的最小值为______.

★★★12. 已知 F 是双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点，点$A(-1,4)$，P 是双曲线左支上的动点，则$|PF|+|PA|$的最小值为______________。

★★★13. 关于曲线$C: x^4-y^3=1$，给出下列四个结论：

① 曲线C是双曲线； ② 关于y轴对称；

③ 关于坐标原点中心对称； ④ 与x轴所围成封闭图形面积小于 2.

则其中正确结论的序号是_________.（注：把你认为正确结论的序号都填上）

二、选择题：

★★14. P为双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{12}=1$上一点，P_1,P_2分别是左、右焦点，若$|PF_1|=|PF_2|=3:2$，则△PF_1F_2的面积是（ ）

A．$6\sqrt{3}$； B．$12\sqrt{3}$； C．12； D．24 .

★★15. 直线$y=x+1$与曲线$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x|x|}{4}=1$的公共点的个数是（ ）

（A）1 个 （B）2 个 （C）3 个 （D）4 个

★★★16. 已知$A(2,-1)$，$B(-1,1)$，O为坐标原点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，其中$m$、$n\in \mathrm{R}$，且$2m^2-n^2=2$，则动点$P$的轨迹是 （ ）

A．焦距为$\sqrt{3}$的椭圆 B．焦距为$2\sqrt{3}$的椭圆

C．焦距为$\sqrt{3}$的双曲线 D．焦距为$2\sqrt{3}$的双曲线

三、解答题：

★★17. 已知ΔABC的底边 BC 长为 12，且底边固定，顶点 A 是动点，使$\sin B-\sin C=\dfrac{1}{2}\sin A$，求点 A 的轨迹.

★★18. 讨论$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$表示何种圆锥曲线，它们有何共同特征．

★★★19. 已知点$D(1,\sqrt{2})$在双曲线C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上，且双曲线的一条渐近线的方程是$\sqrt{3}x+y=0$．

(1) 求双曲线C的方程；

(2) 若过点$(0,1)$且斜率为k的直线l与双曲线C有两个不同交点，求实数k的取值范围；

(3) 设(2)中直线l与双曲线C交于A、B两个不同点，若以线段AB为直径的圆经过坐标原点，求实数k的值．

★★★20. 已知直线l与圆锥曲线C相交于两点A,B，与x轴，y轴分别交于D、E两点，且满足$\overrightarrow{EA}=\lambda_1\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{EB}=\lambda_2\overrightarrow{BD}$．双曲线$C$：$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，$\lambda_1+\lambda_2=6$，求点$D$的坐标．

★★★★21. 已知 F_1、F_2 为为双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，焦距 $|F_1F_2|=6$，过左焦点 F_1 垂直于 x 轴的直线，

与双曲线 C 相交于 A,B 两点，且 ΔABF_2 为等边三角形.

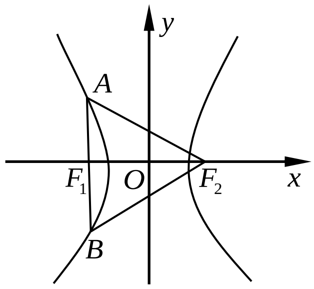
（1）求双曲线 C 的方程；

（2）设 T 为直线 $x=1$ 上任意一点，过右焦点 F_2 作 TF_2 的垂线交双曲线 C 与 P,Q 两点，

求证：直线 OT 平分线段 PQ（其中 O 为坐标原点）；

（3）是否存在过右焦点 F_2 的直线 l，它与双曲线 C 的两条渐近线分别相交于 R,S 两点，

且使得 ΔF_1RS 的面积为 $6\sqrt{2}$？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.



第 16 讲　抛物线的标准方程和性质

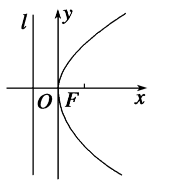
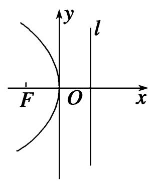
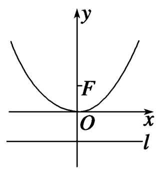
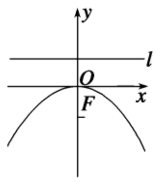
一、知识梳理

1．抛物线的概念

平面内到一个定点 F 和一条定直线 l(F 不在 l 上)的距离________的点的轨迹叫做抛物线. 点 F 叫做抛物线的________，直线 l 叫做抛物线的________.

要注意点 F 不在定直线 l 上，否则轨迹不是抛物线，而是一条直线.

2．抛物线的标准方程与几何性质

标准方程	$y^2=2px$ ($p>0$)	$y^2=-2px$ ($p>0$)	$x^2=2py$ ($p>0$)	$x^2=-2py$ ($p>0$)
	p 的几何意义：焦点 F 到准线 l 的距离			
图形				
顶点	$O(0,0)$			
对称轴	$y=0$		$x=0$	
焦点	$F(\frac{p}{2}，0)$	$F(-\frac{p}{2}，0)$	$F(0，\frac{p}{2})$	$F(0，-\frac{p}{2})$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
范围	$x\geq0$，$y\in\mathbf{R}$	$x\leq0$，$y\in\mathbf{R}$	$y\geq0$，$x\in\mathbf{R}$	$y\leq0$，$x\in\mathbf{R}$
开口方向	向右	向左	向上	向下

3．关于抛物线的几何性质

抛物线的几何性质，抛物线的焦点弦具有很多重要性质，而且应用广泛．例如：

已知过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点的直线交抛物线于 A、B 两点，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则有下列性质：$AB=x_1+x_2+p$ 或 $AB=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$($\alpha$ 为 AB 的倾斜角)，$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$等.

二、典型例题

1. 抛物线的标准方程

★1.求以原点为顶点，坐标轴为对称轴，且焦点在直线 $y=2x-4$ 上的抛物线方程.

★2.过抛物线 $x^2=ay$ 的焦点 F 作 y 轴的垂线，交抛物线与 A、B 两点，若 $|AB|=6$，求抛物线的方程.

★★3.已知抛物线 C 的顶点为双曲线 $S:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的中心，抛物线 C 的焦点为双曲线 S 的焦点，求抛物线 C 的方程.

★★4.若抛物线 $y^2=2px$ 上横坐标为 4 的点到焦点的距离为 5，求则此抛物线的方程.

★★5.若抛物线 $y^2=16x$ 上一点 M 到 x 轴的距离等于 12，求点 M 到抛物线的焦点距离.

★★★6.已知抛物线 C 的顶点在原点，它的准线 l 经过双曲线 $S:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点，且准线 l 与双曲线 S 交于 P(2,3)和 Q(2,-3)两点，求抛物线 C 和双曲线 S 的方程.

2. 抛物线的焦点弦

★7.经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作倾角为 $\frac{\pi}{3}$ 的弦 AB，求 AB 的长.

★★8.已知过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点作直线交抛物线于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，若 $x_1+x_2=4p$，求|AB|的长.

★★9.过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点，且斜率为 1 的直线交抛物线于 A、B 两点，若 $|AB|=8$，求抛物线的方程.

3. 直线与抛物线

★★★10.求与抛物线 $y^2=8x$ 只有 1 个交点，并且经过点 M(2,4)的直线方程.

★★★11.若抛物线 $y^2=2x$ 上存在两点关于直线 $y=x+b$ 对称，求实数 b 的取值范围.

三、拓展提高

★1、将两个顶点在抛物线 $y^2=2px(p>0)$上，另一个顶点是此抛物线焦点的正三角形个数记为 n，则 $n=$________.

★★2、已知顶点在原点，焦点在 x 轴上的抛物线截直线 $y=2x+1$ 所得的弦长为$\sqrt{15}$，求抛物线方程.

★★3、已知定点 $F(0,1)$和直线 l_1：$y=-1$，过定点 F 与直线 l_1 相切的动圆圆心为点 C.

(1)求动点 C 的轨迹方程；

(2)过点 F 的直线 l_2 交轨迹 C 于两点 P、Q，交直线 l_1 于点 R，求$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$的最小值.

四、课后练习

一、填空题：

1. ★抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标是________ .

2. ★抛物线的焦点在直线 $y=2x+2$ 上，且对称轴垂直于 y 轴，则其标准方程是________.

3. ★★顶点在原点，坐标轴为对称轴的抛物线过点 $(-2,3)$，则它的方程是______________ .

4. ★★抛物线 $y^2=x$ 上到其准线和顶点距离相等的点的坐标为______________.

5. ★★过已知点 $A(0,p)$ 且与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 只有一个交点的直线有______条.

6. ★★已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 $y=2x-4$ 与 C 交于 A,B 两点，则 $\cos\angle AFB=$___________.

7. ★★已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 有一内接直角三角形，直角顶点在坐标原点，一直角边所在直线方程为 $y=2x$，斜边长为 $5\sqrt{3}$，则抛物线方程为_____________.

8. ★★两个顶点在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，另一个顶点是此抛物线焦点的正三角形个数为____.

9. ★★★若 AB 是抛物线 $y^2=18x$ 的一条过焦点 F 的弦，$|AB|=20$，AD、BC 垂直于 y 轴，D、C 分别为垂足，则梯形 $ABCD$ 的中位线的长是______________.

10. ★★★若点 A 的坐标为 $(3,1)$，F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，点 P 是抛物线上的一动点，则 $|PA|+|PF|$ 取得最小值时点 P 的坐标是_________ .

11. 过★★★抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，

    则 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=$____.

12. ★★★ AB 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的动弦，且 $|AB|=a(a>2p)$，则 AB 的中点 M 到 y 轴的最近距离为______.

二、选择题：

13. ★方程 $\sqrt{2(x+3)^2+2(y-1)^2}=|x-y+3|$ 表示的曲线是 ( )

A.圆 B.椭圆 C.双曲线 D.抛物线

14. ★已知曲线 $C_1: y=-x^2+4x-2$ 与 $C_2: y^2=x$ 关于直线 l 对称，则 l 的方程是（ ）

A. $x+y+2=0$ B. $x+y-2=0$ C. $x-y+2=0$ D. $x-y-2=0$

15. ★★动圆与 y 轴相切，且与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相外切，则动圆圆心的轨迹方程是 ( )

A. $y^2=4x(x>0)$ B. $y^2=4x(x>0)$ 和 $y=0$

C. $y^2=4x(x>0)$ 和 $y=0(x<0)$ D. $y^2=4x$ 和 $y=0$ 且 $x\neq 0$

16. ★★抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上有 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$ 三点，F 是它的焦点，若 $|AF|,|BF|,|CF|$ 成等差数列，则 （ ）

A． x_1,x_2,x_3 成等差数列 B． x_1,x_3,x_2 成等差数列

C． y_1,y_2,y_3 成等差数列 D． y_1,y_3,y_2 成等差数列

三、解答题：

17. ★★斜率为 1 的直线过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，且与抛物线交于两点 A 、 B .

（1）求 $|AB|$ 的值；

（2）将直线 AB 按向量 $\vec{a}=(-2,0)$ 平移得直线 m， N 是 m 上的动点，求 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$ 的最小值.

18. ★★的距离比它到直线 $x+4=0$ 的距离小 2，若记点 P 的轨迹为曲线 C .

（1）求曲线 C 的方程；

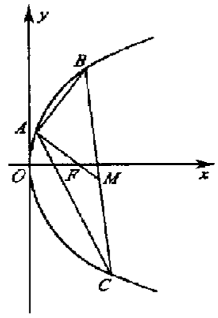
（2）若直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，且 $OA\perp OB$，求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

19. ★★★如图，已知点 $A(2,8)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$ 都在抛物线 $y^2=2px$ 上，ΔABC 的重心与此抛物线的焦点 F 重合.

（1）写出该抛物线的方程和焦点 F 的坐标；

（2）求线段 BC 中点的坐标；

（3）求 BC 所在直线的方程.

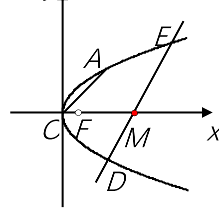


20. ★★★在平面直角坐标系 xoy 中，抛物线 C 的顶点在原点，经过点 $A(2,2)$，其焦点 F 在 x 轴上.

(1)求抛物线 C 的标准方程；

(2)求过点 F，且与直线 OA 垂直的直线方程；

(3)设过点 $M(m,0)(m>0)$ 的直线交抛物线 C 于 D、E 两点，$|ME|=2|DM|$，记 D 和 E 两点间的



第 17 讲 直线与圆锥曲线的位置关系综合

1.直线与椭圆

★★1.过椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 的一个焦点，且倾角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线交椭圆于 M、N 两点，求|MN|的长.

★★2.设直线 $l:2x-y=b$ 和椭圆 $C:\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{25}=1$，当 b 为何取值范围时，直线和椭圆有两个公共点，并求出直线被椭圆截得的弦长.

★★3.已知直线 $l:y=x+t$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A、B 两点，求 $S_{\triangle AOB}$ 的最大值.

★★★4.已知直线 $y=x+1$ 交椭圆 $ax^2+by^2=1(a,b>0)$ 于 P、Q 两点，满足 $|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$OP\perp OQ$，求椭圆方程.

★★★5.过点 P(8,1)引椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的割线交椭圆于 P、Q 两点，求弦 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

2. 直线与双曲线

★★1.已知双曲线$2x^2-3y^2=6$，若它的一条弦 AB 被直线$y=4x$平分，求弦 AB 的斜率.

★★★2.直线$y=kx+1$与双曲线$3x^2-y^2=1$相交于两点 A、B，当 k 为何值时，以 AB 为直径的圆经过坐标原点.

★★★3.垂直于直线$x+2y-3=0$的直线 l 被双曲线$C:\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$截得的弦长为$\frac{4\sqrt{5}}{3}$，求直线 l 的方程.

★★★★4.已知直线$l_1:y=kx-1$与双曲线$x^2-y^2=1$的左支交于 A、B 两点

(1)求斜率 k 的取值范围；

(2)若直线l_2经过点 P(-2,0)和线段 AB 的中点 Q，且l_2在 y 轴上的截距为-16，求直线l_1的方程.

3. 直线与抛物线

★★1.过点 A(2,1)作抛物线 $y^2=4x$ 的弦 MN，而 A 恰为 MN 的中点，求 MN 所在的直线的方程.

★★2.抛物线 $y=2x^2$ 上两点 A、B，O 为坐标原点，且 $OA\perp OB$，求△OAB 面积的最小值.

★★★3.过直角坐标平面 xOy 中的抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作一条倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线，与抛物线相交于 A、B 两点，

(1)用 p 表示 A、B 之间的距离；

(2)证明∠AOB 的大小是与 p 无关的定值，并求出这个定值.

★★★4.已知抛物线 $y^2=2px$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 仅有 1 个公共点，求 p 的取值的范围.

第 18 讲　期末复习

题型一：定义、图像和性质

★例 1:已知三角形 ABC 的两顶点为 $B(-2,0),C(2,0)$，它的周长为 10，求顶点 A 轨迹方程.

★★变式练习 1：　椭圆的一个顶点为 A（2，0），其长轴长是短轴长的 2 倍，求椭圆的标准方程

★★例 2：设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，过 F_2 作直线与椭圆交于两点 A,B，则 ΔABF_1 的周长为（　　）

A $2m$　　B $4a$　　C $2m+4a$　　D $2m+4b$

★★变式练习 1：已知 F_1、F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线与椭圆交于 M、N 两点，则△MNF_2 的周长为（　　）

A.8　　B.16　　C.25　　D.32

★★变式练习 2：已知 F_1,F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过点 F_1 的直线交椭圆于 A,B 两点，若 $\left|F_2A\right|+\left|F_2B\right|=12$，则 $\left|AB\right|=$________________

★★例 3：讨论 $\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 表示何种圆锥曲线，它们有何共同特征.

★★★例 4：已知左右焦点分别为 F_1,F_2 的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$，P 是双曲线上一点，若 $|PF_1|=3$，则 $|PF_2|=$____________.

★★变式练习 1：点 $(1,0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 到渐近线的距离是__________

★★变式练习 2：设 $k\in R$，$\frac{y^2}{k}-\frac{x^2}{k-2}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线，则半焦距的取值范围是________

★★变式练习 3：对于常数 m 、n，“$mn<0$”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示的曲线是双曲线”的（　　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

★★★例 5：设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点

（1）点 $A\left(2,2\right)$，若点 P 在抛物线上移动，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值是__________

（2）点 $B\left(2,3\right)$，若点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在抛物线上移动，则 $x_0+|PB|$ 的最小值是_______.

（3）直线 $l_1:4x-3y+6=0$、直线 $l_2:x=-1$，若点 P 在抛物线上移动，则 P 到 l_1 和 l_2 的距离之和的最小值是__________.

（4）A,B,C 为该抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$__.

题型二：弦长问题

★★例 1、设抛物线 $y^2=4x$ 截直线 $y=2x+m$ 所得的弦长 AB 长为 $3\sqrt{5}$，求 m 的值.

★★例 2、若直线 $y=x+t$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A,B 两点，当 t 变化时，$|AB|$ 的最大值是

A、2　　B、$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　C、$\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　D、$\frac{8\sqrt{10}}{5}$

★★例 3、已知直线 $y=x+1$ 与双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点，求 AB 的弦长.

★★变式练习 1.已知椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 与直线方程 $l:y=x+\dfrac{1}{2}$ 相交于 A、B 两点，求 AB 的弦长

★★变式练习 2．设抛物线 $y^2=4x$ 截直线 $y=2x+m$ 所得的弦长 AB 长为 $3\sqrt{5}$，求 m 的值.

★★例 3、(1)已知椭圆：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$，过左焦点 F 作倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的直线交椭圆于 A、B 两点，求弦 AB 的长.

★★(2) 已知椭圆 $4x^2+y^2=1$ 及直线 $y=x+m$. 若直线被椭圆截得的弦长为 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，求直线的方程.

题型三：中点问题

★★例 1、求椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的斜率为 3 的弦的中点轨迹方程

★★例 2、抛物线 $y=2x^2$ 截一组斜率为 2 的平行直线,所得弦中点的轨迹方程是________.

★★例 3、动点 P 在抛物线 $y=2x^2+1$ 上移动，若 P 与点 $Q(0,-1)$ 连线的中点为 M，则动点 M 的轨迹方程为………………………………………（　　）

(A) $y=2x^2$　　(B) $y=4x^2$　　(C) $y=6x^2$　　(D) $y=8x^2$

题型三：对称问题

★★例 1、求实数 m 的取值范围，使抛物线 $y^2=x$ 上存在两点关于直线 $y=m(x-3)$ 对称

★★★例 2、已知直线 $y=ax+1$ 与双曲线 $3x^2-y^2=1$ 交于 A 、 B 点.

（1）求 a 的取值范围;

（2）若以 A B 为直径的圆过坐标原点，求实数 a 的值;

（3）是否存在这样的实数 a，使 A 、 B 两点关于直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 对称？若存在，请求出 a 的值；若不存在，说明理由.

★★例 3、已知抛物线 $y=x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B，则|AB|等于

A.3　　B.4　　C.$3\sqrt{2}$　　D.$4\sqrt{2}$

题型四：面积问题

★★★例 1、 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，C 在直线 l：$y=x+2$ 上，且 $AB\parallel l$.

（I）当 AB 边通过坐标原点 O 时，求 AB 的长及 $\triangle ABC$ 的面积;

（II）当 $\angle ABC=90^\circ$，且斜边 AC 的长最大时，求 AB 所在直线的方程.

★★例 2、过双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4}=1$的右焦点$F$ 作一条垂直于x轴的垂线交双曲线C的两条渐近线于A、B两点，O为坐标原点，则△OAB的面积的最小值为______

★★★例 3、双曲线$\dfrac{x^2}{n}-y^2=1(n>1)$的两焦点为$F_1,F_2,P$是此双曲线上的一点，且满足$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{n+2}$，求$\Delta PF_1F_2$的面积。

巩固练习：

★1、已知动点M的坐标满足方程$5\sqrt{x^2+y^2}=|3x+4y-12|$，则动点$M$的轨迹是（　　）

A. 椭圆　　B. 双曲线　　C. 抛物线　　D. 以上都不对

★★2、抛物线$y=4x^2$上的一点M到焦点的距离为 1，则点M的纵坐标是（　　）

A．$\dfrac{17}{16}$　　B．$\dfrac{15}{16}$　　C．$\dfrac{7}{8}$　　D．0

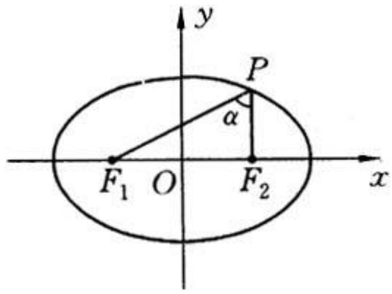
★★3、过抛物线$y^2=4x$的焦点作直线与抛物线相交于A、B两点，它们的横坐标之和等于 5，则这样的直线（）

A．有且仅有一条 B．有且仅有两条　　C．有无穷多条　D．不存在

★★4、(1)已知椭圆$\dfrac{y^2}{75}+\dfrac{x^2}{25}=1$，求它的斜率为 3 的弦中点的轨迹方程.

(2)由点$(-2,0)$向抛物线$y^2=4x$引弦，求弦的中点的轨迹方程

★★★5、已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上的一点，F_1,F_2 是焦点，$\angle F_1PF_2=\alpha$，求证：ΔF_1PF_2 面积是 $b^2\tan\frac{\alpha}{2}$.



★★★6、 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，$P$ 为双曲线上任一点，$\angle F_1PF_2=\theta$,求$\square F_1PF$ 的面积。

★★★★7、已知点 A 、B 点分别为椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 长轴的左右端点，点 F 为椭圆的右焦点.若 P 在椭圆上，且位于 x 轴上方，$PA\perp PF$.

（1）求点 P 的坐标;

（2）设 M 为椭圆长轴 AB 上一点，M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$，求椭圆上的点到 M 距离的最小值.